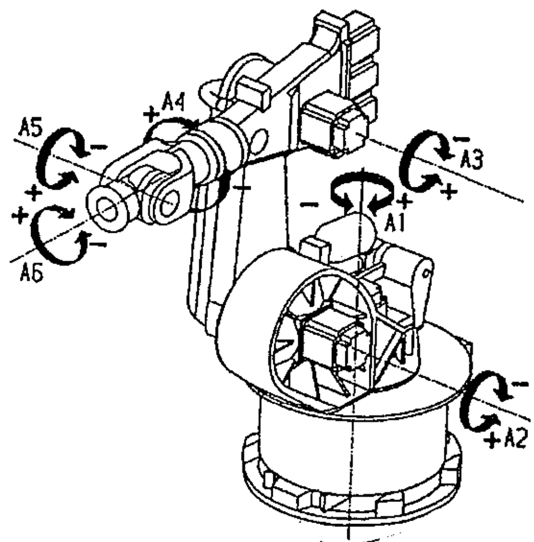
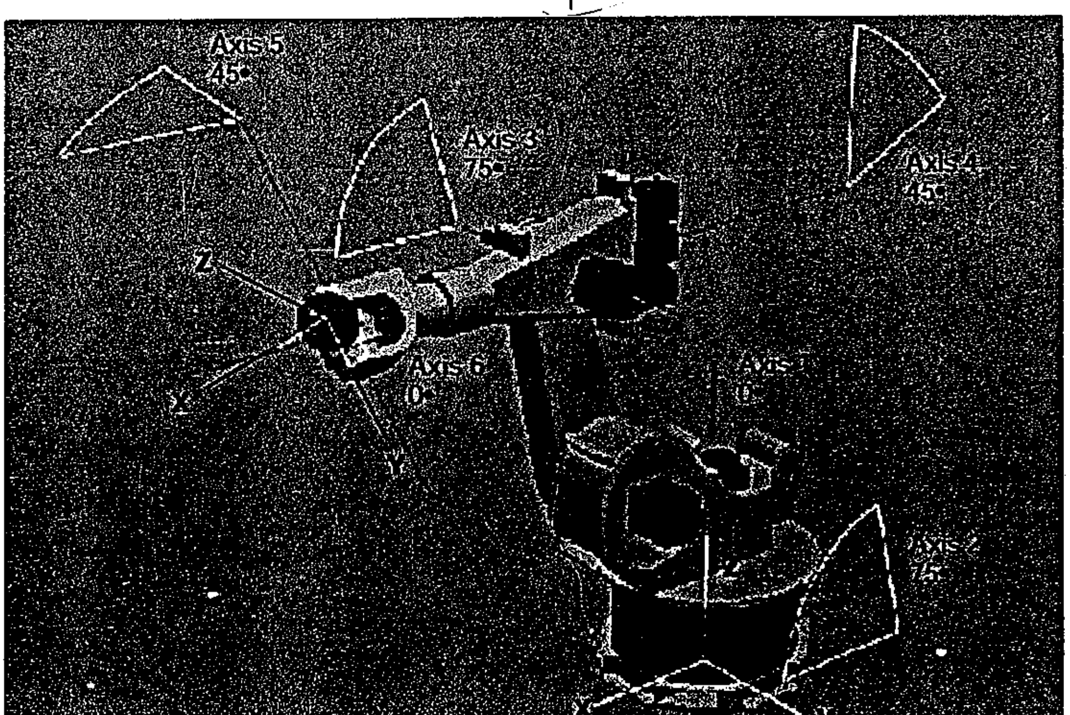
บทที่4

ผลการทดลอง และผลการวิเคราะห์

4.1 ลักษณะทางกายภาพของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2

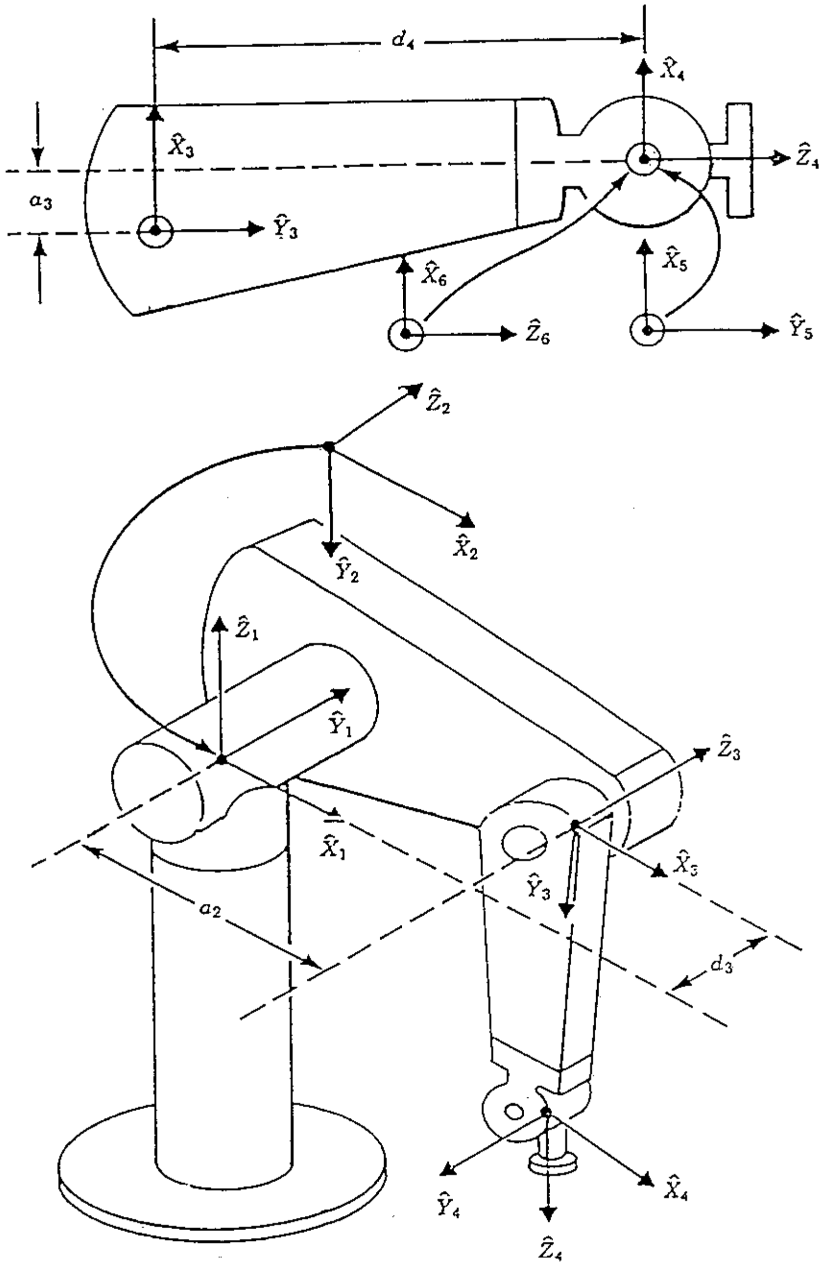
หุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 เป็นหุ่นยนต์ 6 แนวแกน ซึ่งมีลักษณะดังนี้ คือ





รูปที่ 4.1 แสดงลักษณะของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2

4.2 การศึกษาคิเนเมติกส์ (Kinematics) ของหุ่นยนต์ KUKA KRC 125/2



รูปที่ 4.2 แสดงลักษณะการเคลื่อนไหว และตัวแปรต่างๆ ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2

4.2.1 การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)

เราสามารถหาตัวแปรต่างๆ ที่ใช้ในการคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ ได้จากรูปที่ 4.1 คือ

Link, i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0°	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0°	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

ตารางที่ 4.1 แสดง Link parameter ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2

สมการการแปลงเมตริกซ์ ระหว่างจุดเชื่อมต่อ 2จุด (Link transformation) คือ

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

โดยที่ $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta$ และ $c_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $s_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$

ดังนั้นสมการการแปลงเมตริกซ์ระหว่างจุดเชื่อมต่อ 2 จุด (Link transformation) ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 คือ

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{4}_{6}T = {}^{4}_{5}T\,{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{6}T = {}^{3}_{4}T\,{}^{4}_{6}T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

โดยที่ $c_{23} = c_{(2-90)}c_3 - s_{(2-90)}s_3$ และ $s_{23} = c_{(2-90)}s_3 + s_{(2-90)}c_3$

ดังนั้น จะได้ คือ

$$ {}^{1}_{6}T = {}^{1}_{3}T\,{}^{3}_{6}T = \begin{bmatrix} r^1_{11} & r^1_{12} & r^1_{13} & p^1_x \\ r^1_{21} & r^1_{22} & r^1_{23} & p^1_y \\ r^1_{31} & r^1_{32} & r^1_{33} & p^1_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

โดยที่ $r^1_{11} = c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6$

$r^1_{21} = -s_4c_5c_6 - c_4s_6$

$r^1_{31} = -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6$

$r^1_{12} = -c_{23}(c_4c_5s_6 + s_4s_6) + s_{23}s_5s_6$

$r^1_{22} = s_4c_5s_6 - c_4c_6$

$r^1_{32} = s_{23}(c_4c_5s_6 + s_4c_6) + c_{23}s_5s_6$

$r^1_{13} = -c_{23}c_4s_6 - s_{23}c_5$

$r^1_{23} = s_4s_5$

$r^1_{33} = s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5$

$p^1_x = a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}$

$p^1_y = d_3$

$p^1_z = -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}$

ซึ่งจะได้ สมการฟอร์เวิร์ดคิเนเมติก (Forward kinematic) ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 ดังนี้ คือ

$$ {}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

โดยที่

$$ \begin{aligned} r_{11} &= c_1\left[c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right] + s_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\ r_{21} &= s_1\left[c_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - s_{23}s_5c_6\right] - c_1\left(s_4c_5c_6 + c_4s_6\right) \\ r_{31} &= -s_{23}\left(c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) - c_{23}s_5c_6 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} r_{12} &= c_1\left[c_{23}\left(-c_4c_5s_6 - s_4s_6\right) + s_{23}s_5s_6\right] + s_1\left(c_4c_6 - s_4c_5s_6\right) \\ r_{22} &= s_1\left[c_{23}\left(-c_4c_5s_6 - s_4s_6\right) + s_{23}s_5s_6\right] - c_1\left(c_4c_6 - s_4c_5s_6\right) \\ r_{32} &= -s_{23}\left(-c_4c_5c_6 - s_4s_6\right) + c_{23}s_5c_6 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} r_{13} &= -c_1\left(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5\right) - s_1s_4s_5 \\ r_{23} &= -s_1\left(c_{23}c_4c_5 + s_{23}c_5\right) + c_1s_4s_5 \\ r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \end{aligned} $$

$$ \begin{aligned} p_x &= c_1\left(a_2c_{(2-90)} + a_3c_{23} - d_4s_{23}\right) - d_3s_1 \\ p_y &= s_1\left(a_2c_{(2-90)} + a_3c_{23} - d_4s_{23}\right) + d_3c_1 \\ p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_{(2-90)} - d_4c_{23} \end{aligned} $$

4..2.2 การคำนวณอินเวิร์ดคิเนเมติกส์ (Inverse kinematics)

ในการคำนวณหาอินเวิร์ดคิเนเมติกส์ (Inverse kinematics) หุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 จะเป็นการศึกษาการเคลื่อนที่โดยจะเริ่มจากปลายลงมายังฐาน กล่าวคือ จะสามารถหาตำแหน่งมุมของข้อต่อแต่ละข้อต่อที่กระทำต่อกัน เมื่อเราทราบตำแหน่งพิกัดของจุดปลายแขนของหุ่นยนต์

ดังนั้นตำแหน่งจุดปลายแขนของหุ่นยนต์ คือ

$$ {}^{0}_{6}T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{0}_{6}T = {}^{0}_{1}T(\theta_1)\,{}^{1}_{2}T(\theta_2)\,{}^{2}_{3}T(\theta_3)\,{}^{3}_{4}T(\theta_4)\,{}^{4}_{5}T(\theta_5)\,{}^{5}_{6}T(\theta_6) $$

จะได้

$$ \left[{}^{0}_{1}T(\theta_1)\right]^{-1}\,{}^{0}_{6}T = {}^{1}_{2}T(\theta_2)\,{}^{2}_{3}T(\theta_3)\,{}^{3}_{4}T(\theta_4)\,{}^{4}_{5}T(\theta_5)\,{}^{5}_{6}T(\theta_6) $$

$$ {}^{1}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

เมื่อเราทราบ ${}^{1}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (2, 4) จะเท่ากับ d_3
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{1}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (2, 4) จะเท่ากับ $-s_1p_x + c_1p_y$
ดังนั้นเราจะได้สมการ $-s_1p_x + c_1p_y = d_3$

แก้สมการโดยใช้ตรีโกณมิติ (Trigonometric) จะได้

$$ p_x = \rho\cos\phi $$
$$ p_y = \rho\sin\phi $$

โดยที่ $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

$\phi = A\tan 2(p_y, p_x)$

จะได้

$$ c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{d_3}{\rho} $$

$$\sin(\phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho}$$

$$\cos(\phi - \theta_1) = \pm\sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}$$

$$\phi - \theta_1 = A\tan 2\left(\frac{d_3}{\rho}, \pm\sqrt{1 - \frac{d_2^3}{\rho^2}}\right)$$

ดังนั้นจะสามารถหา θ_1 ได้ คือ

$$\theta_1 = A\tan 2(p_y, p_x) - A\tan 2\left(d_3, \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}\right)$$

และเมื่อเราทราบ ${}^{1}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics) พิจารณาตำแหน่งที่ (1, 4) จะเท่ากับ $a_3c_{23} - d_4s_{23} + a_2c_2$

จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{1}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (1, 4) จะเท่ากับ $c_1p_z + s_1p_y$

ดังนั้นเราจะได้สมการ $a_3c_{23} - d_4s_{23} + a_2c_2 = c_1p_z + s_1p_y$

และเมื่อเราทราบ ${}^{1}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics) พิจารณาตำแหน่งที่ (3, 4) จะเท่ากับ $a_3s_{23} + d_4c_{23} + a_2s_2$

จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{1}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (3, 4) จะเท่ากับ $-p_z$

ดังนั้นเราจะได้สมการ $a_3s_{23} + d_4c_{23} + a_2s_2 = -p_z$

จากการแก้สมการทั้ง 2 ข้างบน เราจะได้

$$a_3c_3 - d_4s_3 = K$$

โดยที่ $$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}$$

แก้สมการ โดยใช้ตรีโกณมิติ (Trigonometric) หา θ_3 จะได้

$$\theta_3 = -A\tan 2(a_3, d_4) + A\tan 2\left(K, \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}\right)$$

จากสมการ

$$\left[{}^{0}_{3}T(\theta_2)\right]^{-1}\,{}^{0}_{6}T={}^{3}_{4}T(\theta_4)\,{}^{4}_{5}T(\theta_5)\,{}^{5}_{6}T(\theta_6)$$

$${}^{3}_{6}T=\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และเมื่อเราทราบ ${}^{3}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics) พิจารณาตำแหน่งที่ (1, 4) จะเท่ากับ a_3

จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{3}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (1, 4) จะเท่ากับ

$$c_1c_{23}p_x+s_1c_{23}p_y-s_{23}p_z-a_2c_3$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ $c_1c_{23}p_x+s_1c_{23}p_y-s_{23}p_z-a_2c_3=a_3$

และเมื่อเราทราบ ${}^{3}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics) พิจารณาตำแหน่งที่ (2, 4) จะเท่ากับ d_4

จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{3}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (2, 4) จะเท่ากับ

$$-c_1s_{23}p_x-s_1s_{23}p_y-c_{23}p_z+a_2s_3$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ $-c_1s_{23}p_x-s_1s_{23}p_y-c_{23}p_z+a_2s_3=d_4$

จากการแก้สมการทั้ง 2 ข้างบน เราจะได้

$$s_{23}=\frac{(-a_3-a_2c_3)p_z+(c_1p_x+s_1p_y)(a_2s_3-d_4)}{p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2}$$

$$c_{23}=\frac{(a_2s_3-d_4)p_z-(-a_3-a_2c_3)(c_1p_x+s_1p_y)}{p_z^2+(c_1p_x+s_1p_y)^2}$$

ดังนั้นจะสามารถหา θ_{23} ได้ คือ

$$\theta_{23}=A\tan 2\big[(-a_3-a_2c_3)p_z-(c_1p_x+s_1p_y)(d_4-a_3s_3),\\ (a_2s_3-d_4)p_z+(a_3+a_2c_3)(c_1p_x+s_1p_y)\big]$$

ซึ่งจะได้สมการ $\theta_2 = (\theta_{23} - \theta_3) + 90^\circ$

และเมื่อเราทราบ ${}^3_6T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (1, 3) จะเท่ากับ $-c_4s_5$
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^3_6T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (1, 3) จะเท่ากับ

$$r_{13}c_{13}c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23}$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$r_{13}c_{13}c_{23} + r_{23}s_1c_{23} - r_{33}s_{23} = -c_4s_5$$

และเมื่อเราทราบ ${}^3_6T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (3, 3) จะเท่ากับ s_4s_5
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^3_6T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (3, 3) จะเท่ากับ $-r_{13}s_1 + r_{23}c_1$
ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$-r_{13}s_1 + r_{23}c_1 = s_4s_5$$

จากการแก้สมการทั้ง 2 ข้างบน เมื่อ $s_5 \neq 0$ เราสามารถหา θ_4 จะได้

$$\theta_4 = A\tan 2(-r_{13}s_1 + r_{23}c_1, -r_{13}c_1c_{23} - r_{23}s_1c_{23} + r_{33}s_{23})$$

จากสมการ

$$\left[{}^0_4T(\theta_4)\right]^{-1} {}^0_6T = {}^4_5T(\theta_5)\,{}^5_6T(\theta_6)$$

โดยที่ $\left[{}^0_4T(\theta_4)\right]^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1c_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และเมื่อเราทราบ ${}^4_6T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (1, 3) จะเท่ากับ $-s_5$
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^4_6T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (1, 3) จะเท่ากับ

$$r_{11}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}(s_{23}c_4)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$r_{11}(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + r_{23}(s_1c_{23}c_4 - c_1s_4) - r_{33}(s_{23}c_4) = -s_5$$

และเมื่อเราทราบ ${}^{4}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (3, 3) จะเท่ากับ c_5
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{4}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (3, 3) จะเท่ากับ

$$r_{13}(-c_1 s_{23}) + r_{23}(-s_1 s_{23}) + r_{33}(-c_{23})$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ $r_{13}(-c_1 s_{23}) + r_{23}(-s_1 s_{23}) + r_{33}(-c_{23}) = c_5$

จากการแก้สมการทั้ง 2 ข้างบน เราสามารถหา θ_5 จะได้

$$\theta_5 = A\tan 2(s_5, c_5)$$

จากสมการ $\left[{}^{0}_{1}T(\theta_1)\right]^{-1} {}^{0}_{6}T = {}^{5}_{6}T(\theta_6)$

และเมื่อเราทราบ ${}^{5}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (3, 1) จะเท่ากับ s_6
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{5}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (3, 1) จะเท่ากับ

$$r_{11}(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - r_{21}(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + r_{31}(s_{23} s_4)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$s_6 = r_{11}(c_1 c_{23} s_4 - s_1 c_4) - r_{21}(s_1 c_{23} s_4 + c_1 c_4) + r_{31}(s_{23} s_4)$$

และเมื่อเราทราบ ${}^{5}_{6}T$ ซึ่งหาได้การคำนวณฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics)
พิจารณาตำแหน่งที่ (1, 1) จะเท่ากับ c_6
จากที่ผลคูณของสมการ ${}^{5}_{6}T$ ข้างบน เมื่อพิจารณาตำแหน่งที่ (1, 1) จะเท่ากับ

$$r_{11}[(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23} s_5] + r_{21}[(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - s_1 s_{23} s_5] - r_{13}(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5)$$

ดังนั้นเราจะได้สมการ

$$c_6 = r_{11}[(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4)c_5 - c_1 s_{23} s_5] + r_{21}[(s_1 c_{23} c_4 - c_1 s_4)c_5 - s_1 s_{23} s_5] - r_{13}(s_{23} c_4 c_5 + c_{23} s_5)$$

จากการแก้สมการทั้ง 2 ข้างบน เราสามารถหา θ_5 จะได้

$$\theta_6 = A\tan 2(s_6, c_6)$$

4.3 การศึกษาการเคลื่อนที่ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ (Trajectory jeneration)

โครงงานวิจัยนี้ เราได้ใช้รูปแบบการเคลื่อนที่แบบคิวบิคโพลิโนเมียล (Cubic polynomial) เพราะว่าเป็นสมการกำลังสาม ซึ่งสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรได้ไม่ซับซ้อนมาก และเป็นรูปแบบการเคลื่อนที่ที่ราบเรียบที่สุด ซึ่งเป็นกราฟที่ง่ายต่อความเข้าใจและมีความสะดวกในการคำนวณ คือ มีตัวแปรที่น้อย อีกทั้งเป็นรูปแบบของการเคลื่อนที่ที่นิยมใช้กันมาก

สมการตำแหน่งของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ในคิวบิคโพลิโนเมียล(Cubic polynomial) คือ

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

โดยที่ ตำแหน่งเริ่มต้น (Initial position) ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ $\theta(0) = \theta_0$

และ ตำแหน่งสุดท้าย (Final position) ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ $\theta(t_f) = \theta_f$

จากสมการตำแหน่งในคิวบิคโพลิโนเมียล(Cubic polynomial) จะสามารถหาสมการความเร็วที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์จากจุดเริ่มต้นไปยังจะสิ้นสุด คือ

$$\theta'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

โดยที่ ความเร็วเริ่มต้น (Initial velocity) ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ $\theta'(0) = 0$

และ ความเร็วสุดท้าย (Final velocity) ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ $\theta'(t_f) = 0$

จากสมการตำแหน่งในคิวบิคโพลิโนเมียล(Cubic polynomial) จะสามารถหาสมการความเร่งที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์จากจุดเริ่มต้นไปยังจะสิ้นสุด คือ

$$\theta''(t) = 2a_2 + 6a_3 t$$

จากสมการข้างต้นเราทั้ง 3 สมการ เราสามารถหาค่าตัวแปร a_i โดยการการแก้สมการจะได้

$$a_0 = \theta_0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 3\,(\theta_f - \theta_0) \div t_f^2$$

$$a_3 = -2\,(\theta_f - \theta_0) \div t_f^3$$

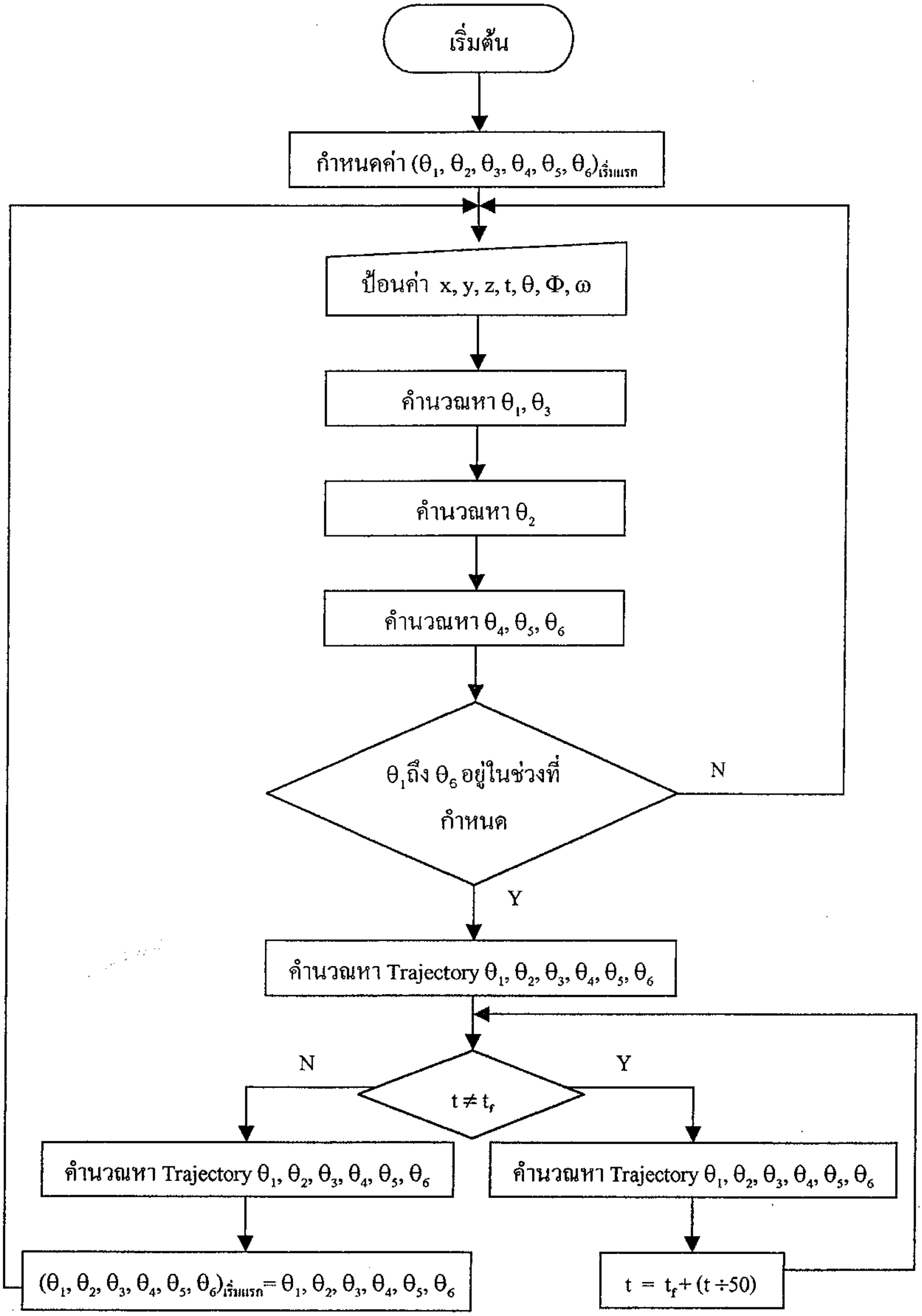
ดังนั้น เราจะสามารถควบคุมความเร็วและอัตราเปลี่ยนแปลงทิศทางของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ที่กำหนดขึ้น ภายใต้ข้อกำหนดเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของแต่ละข้อต่อของหุ่นยนต์ ตามสมการข้างต้นได้

4.4 การเขียนโปรแกรมควบคุม และโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ เพื่อจำลองการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์

เป็นการนำเอาสมการอินเวิร์ดคิเนเมติกส์ (Inverse kinematics) ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 มาสร้างเป็นโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ และนำสมการฟอร์เวิร์ดคิเนเมติกส์ (Forward kinematics) ของหุ่นยนต์อุตสาหกรรม KUKA KRC 125/2 มาสร้างเป็นโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ทั้งนี้ในการเขียนโปรแกรมนี้ เราได้ใช้โปรแกรม Delphi 5 ช่วยในการออกแบบ, สร้าง และทดสอบแอพพลิเคชันต่างๆ

โดยที่ โปรแกรมที่ได้จะแบ่งเป็น 2 ส่วน คือ โปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ และ โปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ โดยที่ ในส่วนของโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ผู้ใช้โปรแกรมจะต้องป้อนค่าตำแหน่งพิกัดปลายของหุ่นยนต์เริ่มแรก (x_0, y_0, z_0), ตำแหน่งพิกัดปลายของหุ่นยนต์ใหม่ (x_1, y_1, z_1) และมุมของเข้าสู่จุดปลายของหุ่นยนต์ (Roll, Yaw, Pitch) ลงในโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ซึ่งสามารถคำนวณมุมของแต่ละข้อต่อในตำแหน่งเริ่มแรก $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)_{\text{เริ่มแรก}}$ และในตำแหน่งใหม่ออกมาได้ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6)_{\text{ใหม่}}$ และในส่วนของโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์นั้น ผู้ใช้โปรแกรมจะต้องนำค่ามุมที่ได้จากโปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ป้อนลงในโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ซึ่งโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์สามารถแสดงภาพในแต่ละระนาบ เพื่อที่จะจำลองการเคลื่อนที่ของตำแหน่งพิกัดปลายของหุ่นยนต์จากตำแหน่งเริ่มแรกไปสู่ตำแหน่งใหม่ได้ อีกทั้ง ในส่วนโปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ มีการแสดงกราฟการเคลื่อนที่ของตำแหน่งข้อต่อแต่ละข้อต่อ (Trajectory), ความเร็ว (Velocity), ความเร่ง (Acceleration) ด้วย ทั้งนี้ เราได้เขียนโปรแกรมที่เป็นไปตามลักษณะของแผนผังแสดงการทำงานของโปรแกรม (Flow chart) ดังนี้ คือ

โปรแกรมควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์



โปรแกรมแสดงผลการควบคุมการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์