บทที่ 2

หลักการและทฤษฎี

2.1 ตำแหน่งและโอเรียนเตชันของวัตถุ

(Position and Orientation of a rigid body)

ในการที่จะบอกถึงวัตถุในพื้นที่ว่าง ว่าอยู่ ณ. พิกัดใด ๆ นั้น สามารถจะกำหนดโดยใช้ตำแหน่งและโอเรียนเตชันของวัตถุภายในโครงสร้างระบบพิกัด เพื่อแสดงตำแหน่งของวัตถุนั้นอยู่ ซึ่งจะสัมพันธ์กับโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง

พิจารณารูปที่ 1 ให้จุด $O_0-x_0y_0z_0$ เป็นโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง โดยที่ x, y, z เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ของโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง และตำแหน่งของจุด O_1-$x_1y_1z_1$ เป็นตำแหน่งของโครงสร้างระบบพิกัดอีกระบบพิกัดหนึ่งบนวัตถุ โดยมีความสัมพันธ์กับโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง O_0-$x_0y_0z_0$ ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$k = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0$$

โดยที่ k_x, k_y, k_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ k และสามารถเขียนอยู่ในรูปของเวกเตอร์ (3x1) ได้ดังนี้

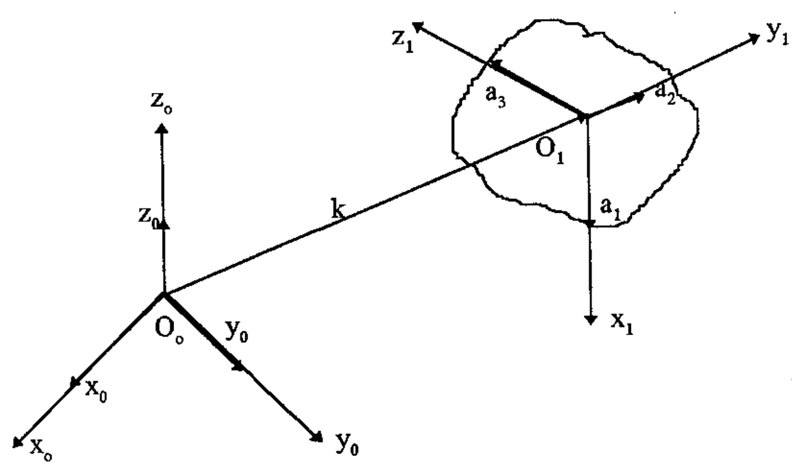
$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$$

ในส่วนโอเรียนเตชันของวัตถุ จะพิจารณาโดย โครงสร้างระบบพิกัดทั่วไปที่สัมพันธ์กับวัตถุในรูปของเวกเตอร์ 1 หน่วย ซึ่งจะอ้างอิงไปที่โครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง ให้ O_1-$x_1y_1z_1$ เป็นตำแหน่งของโครงสร้างระบบพิกัดอีกระบบพิกัดหนึ่งบนวัตถุ โดย O_1 คือ

จุดศูนย์กลางของโครงสร้างระบบพิกัด และ x_1 ,y_1 , z_1 คือ เวกเตอร์ 1 หน่วย ของแกนโครงสร้างโดยสามารถเขียนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์กับโครงระบบพิกัดอ้างอิงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1x}x + a_{1y}y + a_{1z}z \\ y_1 &= a_{2x}x + a_{2y}y + a_{2z}z \\ z_1 &= a_{3x}x + a_{3y}y + a_{3z}z \end{aligned}$$

โดยที่ส่วนประกอบของ เวกเตอร์ 1 หน่วย สามารถจะบอกด้วย cosines ของแกนของโครงสร้างพิกัด O_1-$x_1y_1z_1$

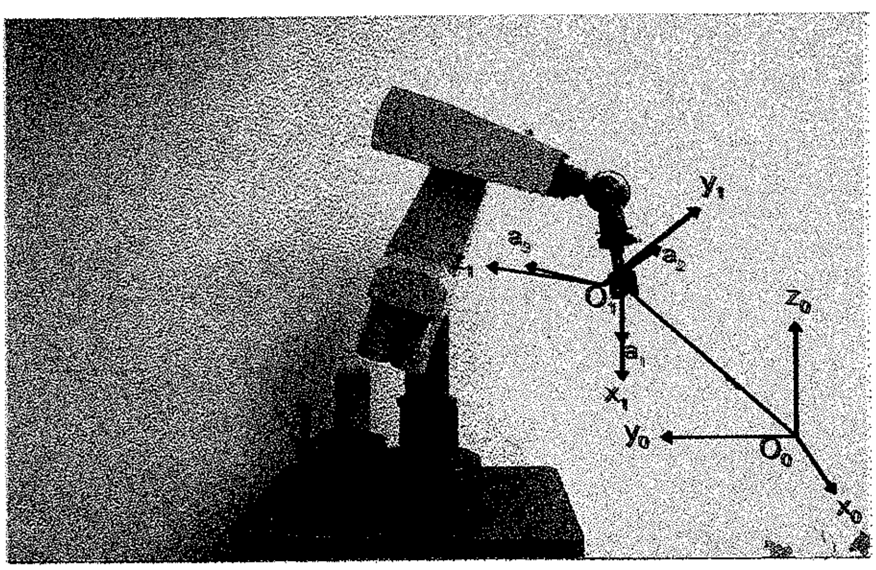


รูปที่ 2.1 แสดงตำแหน่งและโอเรียนเตชันของวัตถุ

2.2 การแปลงระบบพิกัดร่วมของหุ่นยนต์

(Homogeneous Coordinate Transformation of Robot)

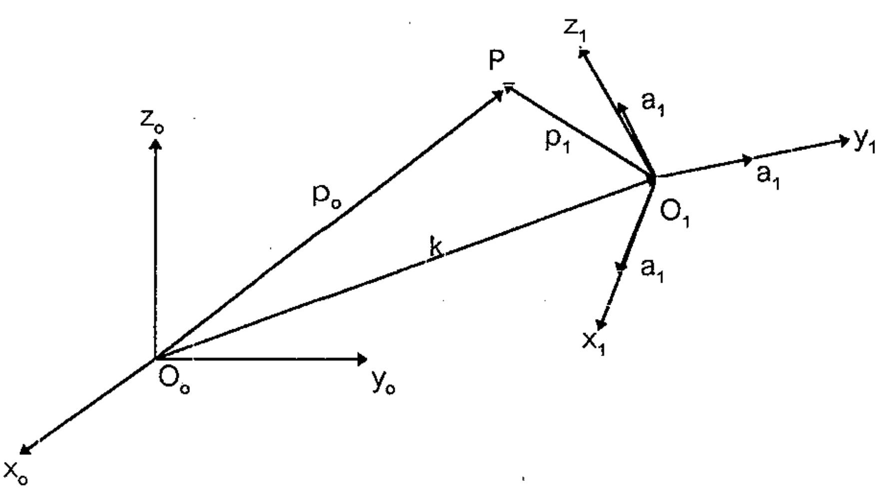
พิจารณารูปที่ 2 จุด O_0 คือ ฐานโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง โดยกำหนดให้ k เป็นเวกเตอร์ที่บอกตำแหน่งของระบบพิกัดอื่นและกำหนดให้ O_1 เป็นระบบพิกัดอีกระบบพิกัดหนึ่ง ทั้งนี้ เวกเตอร์ K จะบอกเฉพาะตำแหน่งของ O_1 เท่านั้น แต่ในขณะเดียวกันสามารถบอกมุมเพื่อแสดงโอเรียนเตชันที่ O_1 อยู่ได้โดยใช้เมตริกซ์ R ซึ่งเป็นเวกเตอร์การหมุน (Rotation Matrix) โดยลักษณะของเวกเตอร์การหมุนของเมตริกซ์ R จะเป็น เมตริกซ์ 3x3 ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ 1 หน่วย ของระบบพิกัด



รูปที่ 2.2 แสดงการอ้างอิงระบบพิกัดฐานและการแปลงระบบพิกัด

Rotation Matrix (R) คือ เมตริกซ์มุมฉาก 3x3 โดยมีแกน x, y, z ซึ่งเป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย (a_1, a_2, a_3) ของระบบพิกัด

$$R = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} \end{bmatrix}$$



รูปที่ 2.3 แสดงระบบพิกัดสัมพัทธ์และระบบพิกัดสมบูรณ์

พิจารณารูปที่ 3 จุด P คือระบบพิกัดหนึ่งที่อยู่บนระบบพิกัดอ้างอิง โดยที่ p_0 คือเวกเตอร์ของระบบพิกัด จุด P โดยมีความสัมพันธ์กับ โครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง O_0-$x_0y_0z_0$ และ p_1 คือ เวกเตอร์ของระบบพิกัด จุด P โดยมีความสัมพันธ์กับระบบพิกัด O_1-$x_1y_1z_1$ ซึ่งสามารถคำนวณได้โดย เวกเตอร์ตำแหน่ง k บวกด้วย p_1 คูณกับเวกเตอร์ การหมุน R

$$p_0 = k + Rp_1$$

Homogeneous Transformation เป็นการแปลงร่วมของการหมุนและการเคลื่อนที่ โดยเป็นลักษณะ Single matrix ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยเฉพาะจากระบบพิกัดหนึ่งไปสู่อีกระบบพิกัดหนึ่ง โดยจะเป็นลักษณะเมตริกซ์ 4x4

$$\left[\begin{array}{l|l} \text{Rotation matrix} & \text{Position Vector} \\ \hline \text{Perspective transformation} & \text{Scaling} \end{array}\right]$$

โดยเมื่อนำมาเขียนในรูปของเมตริกซ์ T (Transformer matrix) จะได้ดังนี้

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} & R & & k \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

R คือ เมตริกซ์ของการหมุนซึ่งเป็นเมตริกซ์ 3 x 3

k คือ เมตริกซ์ของการแปลงซึ่งเป็นเมตริกซ์ 3 x 1

จากสมการ $p_0 = k + Rp_1$ เมื่อใช้ Homogeneous Transformer matrix โดยการรวมเวกเตอร์ตำแหน่ง k กับ เมตริกซ์การหมุน R จะได้ตำแหน่งและมุมที่สมบูรณ์ของระบบพิกัดอีกระบบพิกัดหนึ่ง ที่มีความสัมพันธ์กับโครงสร้างระบบพิกัดอ้างอิง เมื่อทำการแปลงระบบพิกัดของจุด P จากระบบพิกัดหนึ่งไปสู่ระบบพิกัดหนึ่ง จะได้

$$\begin{bmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1x} & a_{2x} & a_{3x} & k_x \\ a_{1y} & a_{2y} & a_{3y} & k_y \\ a_{1z} & a_{2z} & a_{3z} & k_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \\ p_{1z} \\ 1 \end{bmatrix}$$

จากการแปลงร่วมของเวกเตอร์ตำแหน่ง k กับเวกเตอร์การหมุน R จะได้ แถวที่ 4 ของเมตริกซ์ 3x4 มีค่าเท่ากับ 0 และ 1 ทำให้ได้เมตริกซ์ 4x4

2.3 <u>การบอกลักษณะของวัตถุในทางคณิตศาสตร์</u>

<u>(Mathematics Description of Objects)</u>

ในการบอกลักษณะและตำแหน่งของวัตถุในทางคณิตศาสตร์ สามารถบอกได้โดยใช้ Homogeneous Transformer และการบอกลักษณะของวัตถุล้อมรอบที่อยู่ในรูปของ เมตริกซ์ 4 x N โดยที่ N คือ จำนวนจุดปลายของวัตถุ และจุดปลายของวัตถุจะแสดงได้โดยเวกเตอร์ตำแหน่ง (position Vector) เพื่อให้สามารถเข้าใจตำแหน่งของวัตถุจากตำแหน่งเริ่มแรกไปสู่ตำแหน่งใหม่ ซึ่งสามารถบอกลักษณะของวัตถุในตำแหน่งใหม่ได้จาก การคูณกันระหว่าง Homogeneous Transformer กับลักษณะของวัตถุในตำแหน่งเริ่มแรก ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} \text{Object} \end{bmatrix}_n = T * \begin{bmatrix} \text{Object} \end{bmatrix}_s$$

T = คือ Transformer matrix

$$T = \left[\begin{array}{ccc|c} & R & & k \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$\left[\text{Object}\right]_n$ คือ ลักษณะของวัตถุในตำแหน่งใหม่

$$\left[\text{Object}\right]_n = \begin{bmatrix} x_{0,n} & x_{1,n} & \_\_\_ & x_{N-1,n} \\ y_{0,n} & y_{1,n} & \_\_\_ & y_{N-1,n} \\ z_{0,n} & z_{1,n} & \_\_\_ & z_{N-1,n} \\ 1 & 1 & \_\_\_ & 1 \end{bmatrix}$$

$\left[\text{Object}\right]_s$ คือ ลักษณะของวัตถุในตำแหน่งเริ่มแรก

$$\left[\text{Object}\right]_s = \begin{bmatrix} x_{0,s} & x_{1,s} & \_\_\_ & x_{N-1,s} \\ y_{0,s} & y_{1,s} & \_\_\_ & y_{N-1,s} \\ z_{0,s} & z_{1,s} & \_\_\_ & z_{N-1,s} \\ 1 & 1 & \_\_\_ & 1 \end{bmatrix}$$

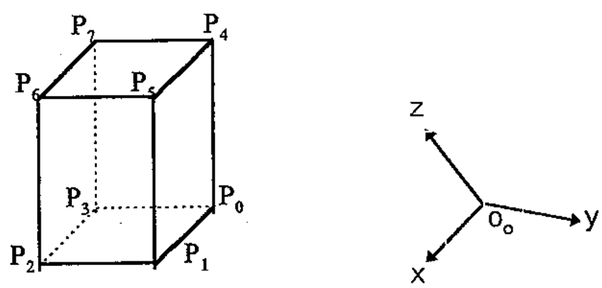
จากสมการข้างต้นสามารถแสดงสมการความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} x_{0,n} & x_{1,n} & \_\_\_ & x_{N-1,n} \\ y_{0,n} & y_{1,n} & \_\_\_ & y_{N-1,n} \\ z_{0,n} & z_{1,n} & \_\_\_ & z_{N-1,n} \\ 1 & 1 & \_\_\_ & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & R & & k \\ \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] * \begin{bmatrix} x_{0,s} & x_{1,s} & \_\_\_ & x_{N-1,s} \\ y_{0,s} & y_{1,s} & \_\_\_ & y_{N-1,s} \\ z_{0,s} & z_{1,s} & \_\_\_ & z_{N-1,s} \\ 1 & 1 & \_\_\_ & 1 \end{bmatrix}$$

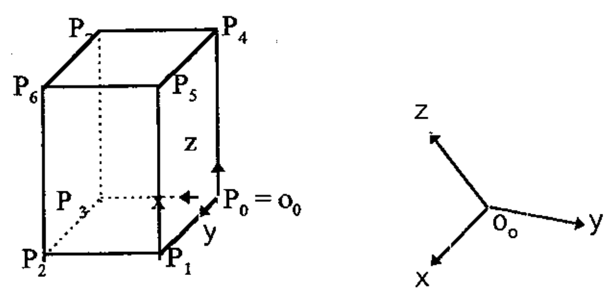
การบอกลักษณะของวัตถุล้อมรอบด้วยเมตริกซ์ 4xN โดย N คือ จำนวนจุดปลายของวัตถุ และในแต่ละจุดปลาย สามารถแสดงได้โดย Position vector ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix}^T$$

โดยที่ T คือ การเคลื่อนย้ายหรือการสับเปลี่ยน (Transpose)



รูปที่ 2.4 แสดงจุดปลายลูกบาศก์ $P_0 - P_1$ โดยที่ระบบพิกัดไม่ขึ้นอยู่กับลักษณะของลูกบาศก์



รูปที่ 2.5 แสดงจุดปลายลูกบาศก์ $P_0 - P_1$ โดยที่ระบบพิกัดที่กำหนดตามลักษณะของลูกบาศก์, โดยให้จุดกำเนิดคือ P_0

ในการบอกลักษณะของวัตถุเราจะกำหนดจุดกำเนิดของระบบพิกัดวัตถุให้คงอยู่กับที่ พิจารณาจากรูปที่ 5 กำหนดให้ลักษณะของวัตถุเป็นลักษณะลูกบาศก์ โดยมีจุดปลาย P_0 - P_7 ในระบบพิกัด และให้จุดกำเนิดอยู่กับที่ คือ จุด P_0 โดยมีทิศทางในแนวแกน x, y, z ซึ่งลักษณะของวัตถุในแต่ละจุดปลายในรูปของเมตริกซ์ดังนี้

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_2 = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 & b & c & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_6 = \begin{bmatrix} a & b & c & 1 \end{bmatrix}^T$$
$$P_7 = \begin{bmatrix} a & 0 & c & 1 \end{bmatrix}^T$$

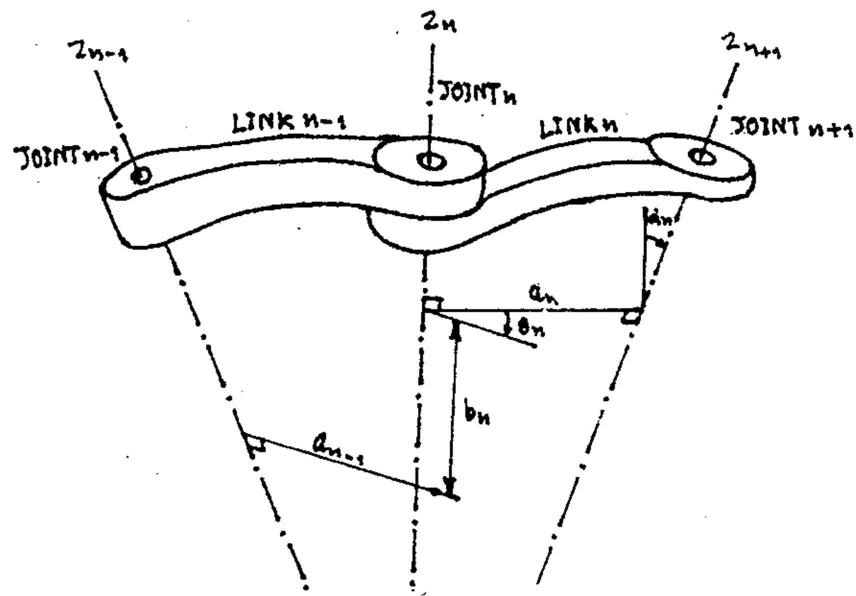
เมื่อนำมาเขียนในรูปของลูกบาศก์ในทางเมตริกซ์จะได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \text{ลูกบาศก์} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & a & 0 & 0 & a & a \\ 0 & b & b & 0 & 0 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c & c & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4 การแปลงในแขนกลหลายแกน

(Transformation Along The Kinematic Chain)

ลักษณะของแขนกลของหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจะประกอบด้วย แขน (Link) จุดเชื่อมต่อระหว่างแขน (Joint) ซึ่งเมื่อนำองค์ประกอบทั้งสองมาประกอบเข้ากัน จะได้เป็นลักษณะลูกโซ่ ที่เรียกว่า โซ่กล



รูปที่ 2.6 แสดงจุดต่อของแขนกล

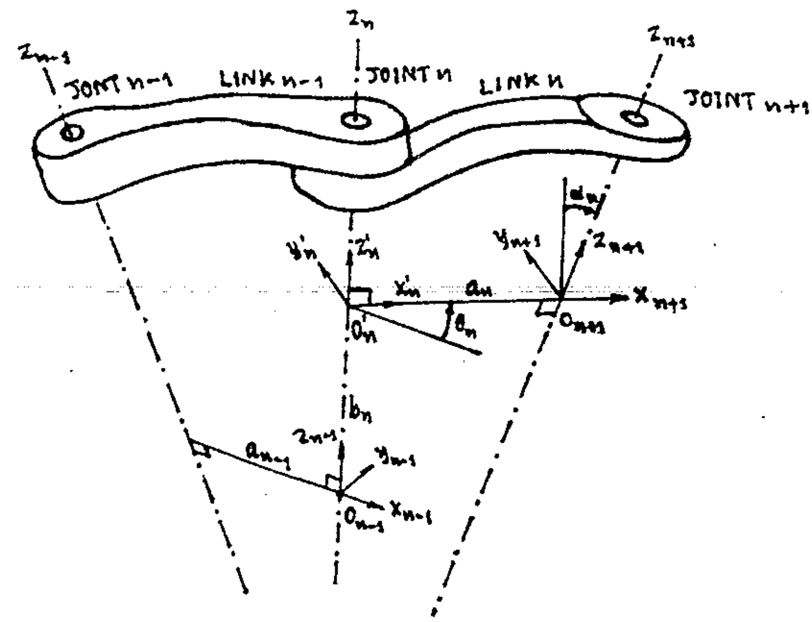
เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 6 ถ้าจำนวนของโซ่กล n จำนวน จะประกอบไปด้วย แขน n ตัว และจุดเชื่อมต่อระหว่างแขน n จุด ในการอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างส่วนต่าง ๆ ของแขนกล โดยการกำหนดระบบพิกัดในแต่ละจุดต่อของตัวเชื่อม ได้ดังนี้

a_n คือ ระยะห่างระหว่าง O_{n+1} และ $O_{n'}$

d_n คือ ระยะพิกัดของ $O_{n'}$ ตามแนวแกน z_{n-1}

α_n คือ มุมระหว่างแกน z_{n+1} และแกน z_n โดยหมุนตามเข็มนาฬิกา รอบแกน x หรือมุมที่เหลือจากการตั้งฉากกับเส้น a_n

θ_n คือ มุมระหว่างแกน x_n และแกน $x_{n'}$ โดยหมุนทวนเข็มนาฬิการอบแกน z_n



รูปที่ 2.7 แสดงระบบพิกัดจุดต่อของแขนกลแต่ละจุดต่อจะมีกลุ่มของพิกัด ตัวแปรจะกำหนดตามวิธีของ Denavit - Hartenberg

เมื่อพิจารณารูปที่ 7 โครงสร้างการเคลื่อนไหวของแขนกลสามารถแยกได้ 2 ลักษณะ คือ

1. การเคลื่อนที่ตามแนวแกน (Prismatic) โดยตัวแปรของการเคลื่อนที่นี้ คือ a_n และ d_n
2. การหมุนของตัวเชื่อมต่อ (Revolute) โดยตัวแปรของการหมุนนี้คือ α_n และ θ_n

ในการกำหนดระบบพิกัดของแขนกลแต่ละแขน สามารถใช้ทฤษฎีทางเรขาคณิตของ Denavit - Hartenberg ซึ่งเป็นการอธิบายการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของระบบพิกัด n มาอยู่ ณ ตำแหน่งของระบบพิกัด n+1 โดยระบบพิกัดจะถูกกำหนดโดย การหมุนและการเปลี่ยนตำแหน่ง ทั้งนี้สิ่งที่ต้องพิจารณาคือ

การหมุนรอบแกน z_n ด้วยมุมเท่ากับ θ_n

การเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน z_n ด้วยระยะทางเท่ากับ d_n

การเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน $x_{n+1} = x_n$ ด้วยระยะทางเท่ากับ a_n

การหมุนรอบแกน x_{n+1} ด้วยมุมเท่ากับ α_n

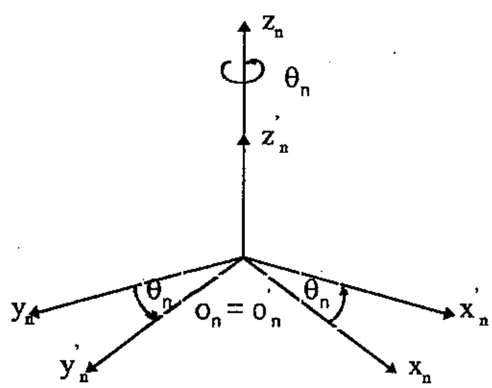
เมื่อนำมาแปลงร่วม (Homogeneous Transformer) จากโครงสร้างระบบพิกัดของแกน n ไปยังโครงสร้างระบบพิกัด n+1 โดยเขียนในรูปของ matrix 4x4 ได้ดังนี้

$$ {}_{n+1}^{\;\;n}A = Rot(z_n, \theta_n) * Trans(0,0,d_n) * Trans(a_n,0,0) * Rot(x_n, \alpha_n) $$

โดยที่ ${}_{n+1}^{\;\;n}A$ คือ Homogeneous Transformer matrix จากแกน n ไปสู่แกน n+1

เมื่อนำมาพิจารณาทีละขั้น ได้ดังนี้

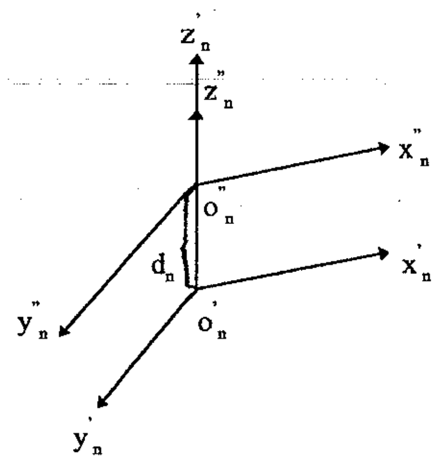
1. การหมุนรอบแกน z_n ด้วยมุมเท่ากับ θ_n



รูปที่ 2.8 การหมุนของ θ_n รอบแกน z_n

$$ Rot(z_n, \theta_n) = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n & 0 & 0 \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

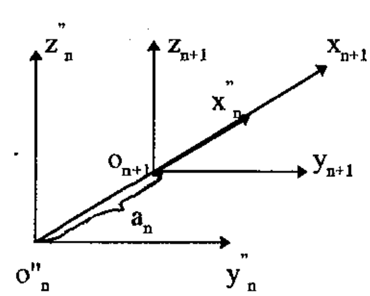
2. การเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน z_n ด้วยระยะทางเท่ากับ d_n



รูปที่ 2.9 เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน z_n ด้วยระยะทาง d_n

$$Trans(0,0,d_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

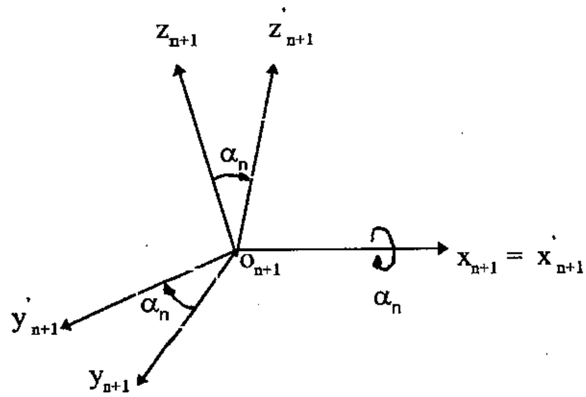
3. การเคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x_{n+1} ด้วยระยะทางเท่ากับ a_n



รูปที่ 2.10 เคลื่อนที่ไปตามแนวแกน x_{n+1} ด้วยระยะทาง a_n

$$\text{Trans}(a_n,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

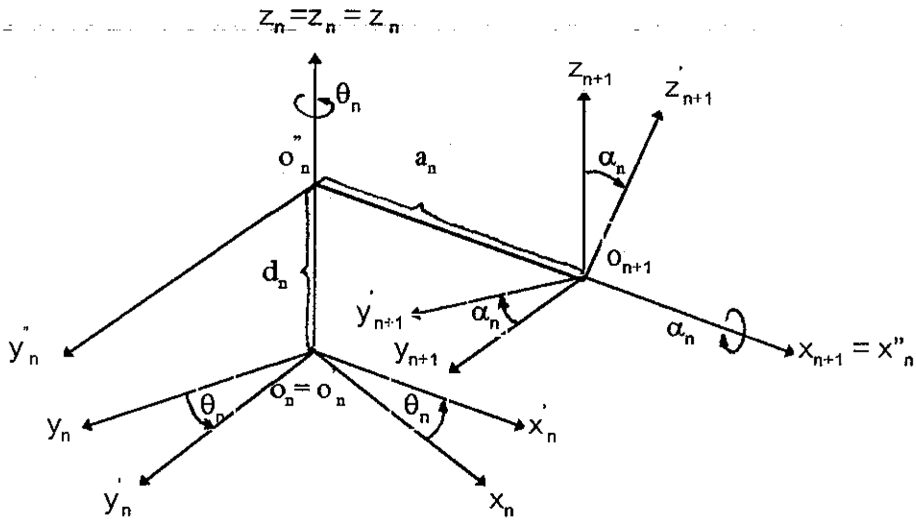
4. การหมุนรอบแกน x_{n+1} ด้วยมุมเท่ากับ α_n



รูปที่ 2.11 การหมุน α_n รอบแกน x_{n+1}

$$\text{Rot}(x_n,\alpha_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นผลของการ Homogeneous Transformation matrix ระหว่างจุดเชื่อมต่อทั้ง 2 จุด



รูปที่ 2.12 ผลของการแปลงระหว่าง Joint_n และ Joint_{n+1}

$$
{}_{n+1}^{\ n}A = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n & 0 & 0 \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
* \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n & 0 \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$ {}_{n+1}^{\;\;n}A = \begin{bmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n\cos\alpha_n & \sin\theta_n\sin\alpha_n & a_n\cos\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n\cos\alpha_n & -\cos\theta_n\sin\alpha_n & a_n\sin\theta_n \\ 0 & \sin\alpha_n & \cos\alpha_n & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

จากสมการเมตริกซ์ 4x4 ที่ได้ สามารถแยกได้ 2 ลักษณะ คือ คอลัมน์ตั้งแต่ 1-3 จากทางทางซ้าย จะเป็นเมตริกซ์ ระหว่างจุดต่อ 2 จุด ใด ๆ ซึ่งจะเกิดการหมุนขึ้น คือ จะเกิด θ_n หมุนรอบแกน z_n, โดยจะสมมูลกับ z_n และ α_n หมุนรอบแกน x_n, โดยจะสมมูล กับ x_{n+1} ส่วนคอลัมน์ทางขวา ก็คือ ตำแหน่งของเวกเตอร์ k ระหว่างจุด O_n กับ O_{n+1}

2.5 การหมุนของระบบพิกัด (Rotation of Coordinate)

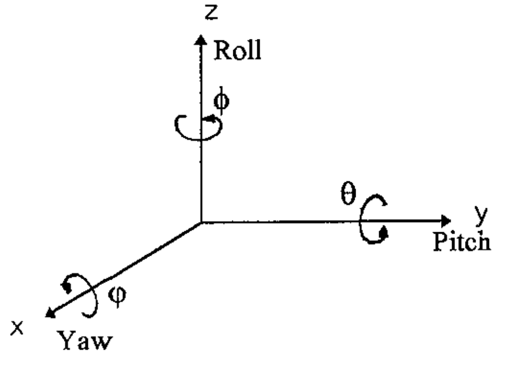
ลักษณะการหมุนโดยทั่วไปมี 3 ลักษณะ คือ

Roll (ϕ) เป็นการหมุนรอบแกน z

Pitch (θ) เป็นการหมุนรอบแกน y

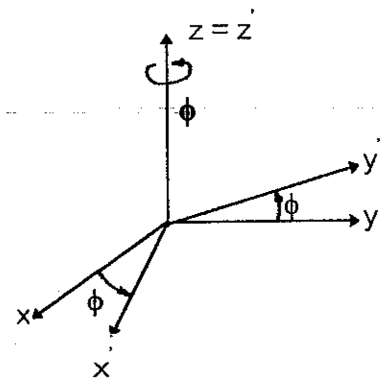
Yow (φ) เป็นการหมุนรอบแกน x

โดยที่ φ, θ, ϕ คือ ความเร็วเชิงมุมรอบแกน x, y, z ตามลำดับ

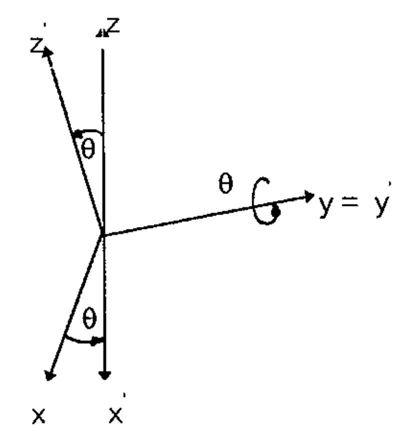


รูปที่ 2.13 แสดงการหมุนรอบแกนต่าง ๆ

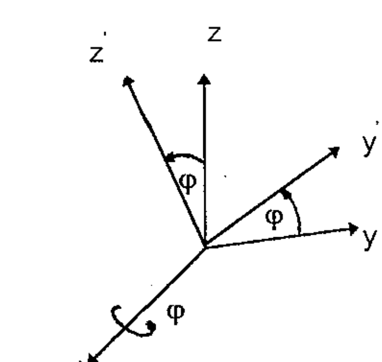
จากการหมุนในแต่ละแกนทำให้เกิดมุมของแกนที่เหลือซึ่งมุมจะเท่ากับความเร็วเชิงมุมของแกนหมุนนั้น ดังรูป



รูปที่ 2.14 แสดงการหมุนรอบแกน z



รูปที่ 2.15 แสดงการหมุนรอบแกน y



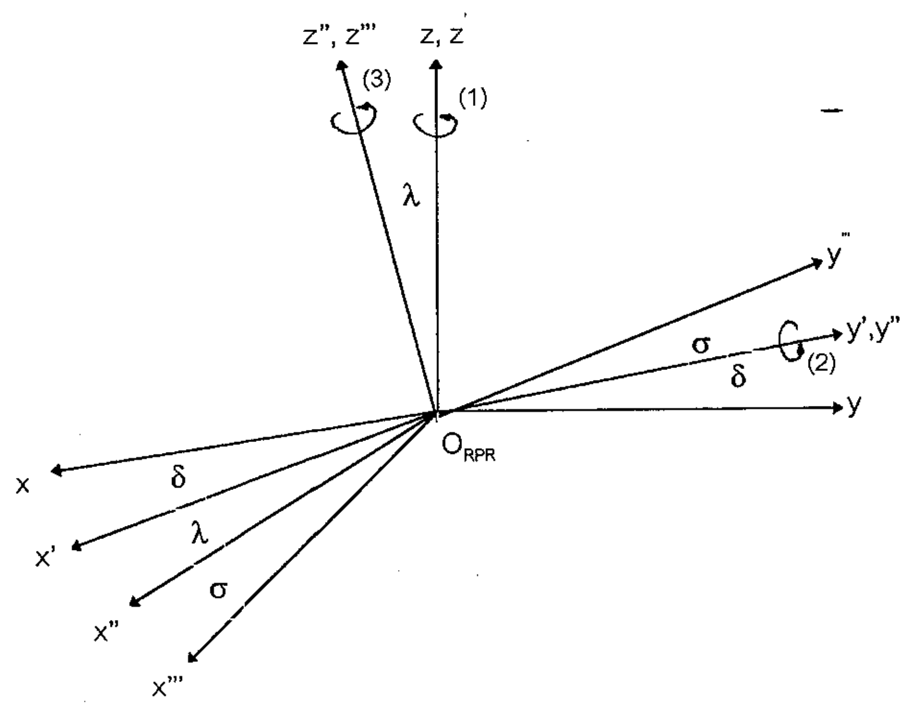
รูปที่ 2.16 แสดงการหมุนรอบแกน x

การหมุนในระบบพิกัด สามารถอธิบายในรูปของเมตริกซ์ R ซึ่งเป็นเมตริกซ์ 3x3 ของ Homogeneous Transformation matrix ซึ่งลำดับการหมุนที่ใช้ในการประยุกต์ใช้กับแขนกลอุตสาหกรรม มีอยู่ 3 ลักษณะ คือ

- roll - pitch - roll
- roll - pitch - yow
- roll - yow - roll

ในการอธิบายการหมุนรอบแกน x, y, z สามารถอธิบายในรูปของตัวแปรของมุม 3 ตัวแปร โดยการกำหนดมุมของวัตถุให้อยู่ในรูปของมุม ออยเลอร์ (Euler Angles) ที่เป็นสมการทางคณิตศาสตร์ คือ

1. Roll - Pitch - Roll R_{RPR} $(\partial,\lambda,\sigma)$



รูปที่ 2.17 Euler angle R_{RPR} $(\partial,\lambda,\sigma)$ สำหรับ Roll - Pitch - Roll

รูปแบบของ Roll - Pitch - Roll

Roll คือ การหมุนรอบแกน Z , (∂)

Pitch คือ การหมุนรอบแกน Y' , (λ)

Roll คือ การหมุนรอบแกน Z" , (σ)

พิจารณารูปที่ 17 ผลคูณของการหมุนในรูปของ เมตริกซ์ คือ

$$R_{RPR}(\partial,\lambda,\sigma) = R_z(\partial) * R_{y'}(\lambda) * R_{z''}(\sigma)$$

$$R_z(\partial) = \begin{bmatrix} \cos\partial & -\sin\partial & 0 \\ \sin\partial & \cos\partial & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{Roll}$$

$$R_{y'}(\lambda) = \begin{bmatrix} \cos\lambda & 0 & \sin\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\lambda & 0 & \cos\lambda \end{bmatrix}_{Pitch}$$

$$R_{z''}(\sigma) = \begin{bmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma & 0 \\ \sin\sigma & \cos\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{Roll}$$

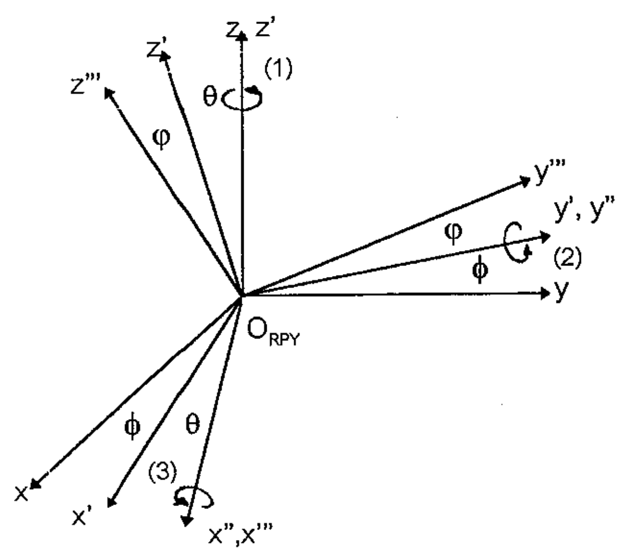
ดังนั้น ผลของการคูณจะได้

$R_{RPR}\ (\partial,\lambda,\sigma)\ =$

$$\begin{bmatrix} \cos\partial\cos\lambda\cos\sigma - \sin\partial\sin\sigma & -\cos\partial\cos\lambda\sin\sigma - \sin\partial\cos\sigma & \cos\partial\sin\lambda \\ \sin\partial\cos\lambda\cos\sigma + \cos\partial\sin\sigma & -\sin\partial\cos\lambda\sin\sigma + \cos\partial\cos\sigma & \sin\partial\sin\lambda \\ -\sin\lambda\cos\sigma & \sin\lambda\sin\sigma & \cos\lambda \end{bmatrix}$$

ลักษณะเฉพาะของ Roll - Pitch - Roll คือ เมตริกซ์การหมุน $R_{RPR}\ (\partial,\lambda,\sigma)$ จะใช้การไม่ได้เมื่อมุม λ มีค่าเท่ากับ 0° และ 180°

2. Roll - Pitch - Yaw $R_{RPY}\ (\phi, \theta, \varphi)$



รูปที่ 2.18 Euler angles $R_{RPY}\ (\phi, \theta, \varphi)$ สำหรับ Roll - Pitch - Yaw

รูปแบบของ Roll - Pitch - Yaw

Roll คือ การหมุนรอบแกน Z , (ϕ)

Pitch คือ การหมุนรอบแกน Y' , (θ)

Yaw คือ การหมุนรอบแกน X'' , (φ)

พิจารณารูปที่ 18 ผลคูณของการหมุนในรูปของ เมตริกซ์ คือ

$$R_{RPY}(\phi, \theta, \varphi) = R_z(\phi) * R_{y'}(\theta) * R_{x''}(\varphi)$$

$$R_z(\phi) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Roll}}$$

$$R_{y'}(\theta) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\text{Pitch}}$$

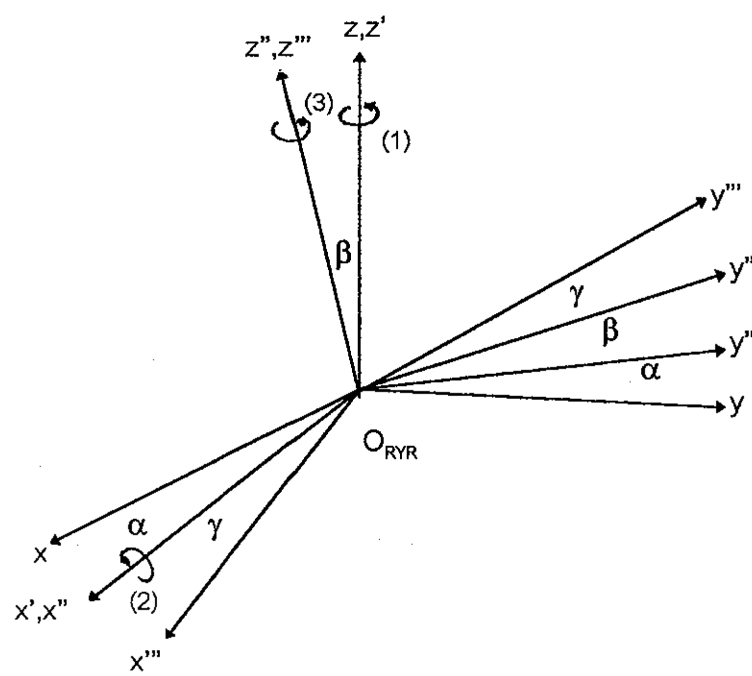
$$R_{x''}(\varphi) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{Yaw}}$$

ดังนั้น ผลของการคูณเมตริกซ์ จะได้

$$R_{RPY}(\phi,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta\sin\varphi - \sin\phi\cos\varphi & \cos\phi\sin\theta\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi \\ \sin\phi\cos\theta & \sin\phi\sin\varphi\sin\theta + \cos\phi\cos\varphi & \sin\phi\sin\theta\cos\theta - \cos\phi\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix}$$

ลักษณะเฉพาะของ Roll - Pitch - Yaw คือ เมตริกซ์การหมุน $R_{RPY}(\phi,\theta,\varphi)$ จะใช้การไม่ได้เมื่อมุม θ มีค่าเท่ากับ $+90^{\circ}$ และ -90°

3. Roll - Yaw - Roll $R_{RYR}(\alpha,\beta,\gamma)$



รูปที่ 2.19 Euler angles $R_{RYR}(\alpha,\beta,\gamma)$ สำหรับ Roll - Yaw - Roll

รูปแบบของ Roll - Yaw - Roll

Roll คือ การหมุนรอบแกน Z ,(α)

Yaw คือ การหมุนรอบแกน X' ,(β)

Roll คือ การหมุนรอบแกน Z'' ,(γ)

พิจารณารูปที่ 19 ผลคูณของการหมุนในรูปของ เมตริกซ์ คือ

$$R_{RYR}(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha) * R_{x'}(\beta) * R_{z''}(\gamma)$$

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{Roll}}$$

$$R_{x'}(\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{Yaw}}$$

$$R_{z''}(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{Roll}}$$

ดังนั้น ผลของการคูณเมตริกซ์ จะได้

$$R_{RYR}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}$$

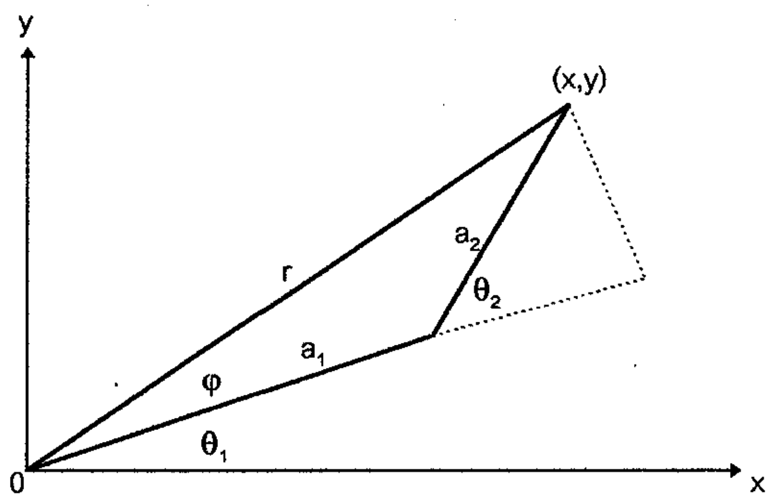
ลักษณะเฉพาะของ Roll - Yaw - Roll คือ เมตริกซ์การหมุน $R_{RPY}(\phi, \theta, \varphi)$ จะใช้การไม่ได้เมื่อมุม β มีค่าเท่ากับ 0° และ 180°

2.6 การคำนวณ การเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์ (Determination kinematics of Robot)

การคำนวณ การเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์ (Determination kinematics of Robot) เป็นการหาสมการสำหรับการอธิบายการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ โดยสมการนี้จะแสดงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ขององค์ประกอบต่าง ๆ คือ แขนของหุ่นยนต์ (Link) และ จุดต่อเชื่อมของแขนหรือจุดหมุน (Joint) ซึ่งในแต่ละองค์ประกอบจะขึ้นอยู่กับโครงสร้างของหุ่นยนต์ในแต่ละตัว โดยในการอธิบายการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ จะใช้ Transformation metric และการหาสมการเพื่ออธิบายการเคลื่อนที่ สามารถหาได้ 2 ลักษณะ คือ Forward kinematics และ Inverse kinematics

2.6.1 <u>Forward kinematics</u> เป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ โดยเริ่มจากฐานไปสู่จุดปลายซึ่ง Transformation metric ที่ได้จะเป็นตัวแปลงจาก Robot coordinate ไปสู่ Cartesian coordinate x, y, z ซึ่งการ Forward kinematics ส่วนใหญ่จะใช้ในการป้อนกลับเพื่อดูตำแหน่ง ในการคำนวณโดยการ Forward kinematics นี้จะใช้วิธีการ Transformation metric เพื่อหาลักษณะของการเคลื่อนไหวของแต่ละแขนกลแล้วนำมาแสดงความสัมพันธ์ของแขนกลทั้งหมด ซึ่งจะทำให้ได้ลักษณะของการเคลื่อนไหวของหุ่นยนต์ที่สมบูรณ์

2.6.2 Inverse kinematics เป็นการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ โดยเริ่มจากจุดปลายลงมายังฐาน ซึ่งการ Inverse kinematics ส่วนใหญ่จะใช้ในการทำงานจริงของหุ่นยนต์ เนื่องจากสามารถวิเคราะห์ เข้าใจได้ และสามารถเห็นผลได้ทันทีในการคำนวณโดยวิธีการ Inverse kinematics เมื่อพิจารณาจากรูปที่ 18 ซึ่งเป็นลักษณะแขนกล 2 แขน



รูปที่ 2.20 แสดงการ Inverse kinematics ของแขนกล 2 แขน

เมื่อพิจารณาจากรูปจะได้

$$x = a_1\cos\theta_1 + a_2\cos(\theta_2 + \theta_2)$$

$$y = a_1\sin\theta_1 + a_2\sin(\theta_2 + \theta_2)$$

สามารถหา r ได้จาก $r^2 = x^2 + y^2$

ดังนั้นจากกฎของ cosines ทำให้ได้

$$r^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(¶ - \theta_2)$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_2 = (r^2 - a_1^2 - a_2^2) / 2a_1a_2$$

$$\sin\theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta_2}$$

$$\theta_2 = \mathrm{ATAN2}(\cos\theta_2, \sin\theta_2)$$

จาก $\tan\varphi = (a_2 \sin\theta_2) / (a_1 + a_2\cos\theta_2)$

$$\tan(\varphi + \theta_1) = y/x$$

ดังนั้นสามารถหา θ_1 ได้จาก

$$\theta_1 = \mathrm{ATAN2}(x,y) - \mathrm{ATAN2}(\sin\theta_2, a_1 + a_2\cos\theta_2)$$