

การวิเคราะห์

เชิงคณิตศาสตร์

MATHEMATICAL
ANALYSIS

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพร ตั้งควิเวชกุล

การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์
MATHEMATICAL ANALYSIS

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพร ตั้งควิเวชกุล
ปร.ด. (คณิตศาสตร์)

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม

คำนำ

ตำรารายวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์เล่มนี้ ได้ถูกจัดทำขึ้นเพื่อให้นิสิต นักศึกษา และผู้ที่สนใจที่จะศึกษาด้านการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ได้ใช้ศึกษาด้วยตนเอง อีกทั้งยังเป็นเอกสารในการประกอบการเรียน รายวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ (mathematical analysis) รหัสวิชา วท.คณ. 451 (MATH451) โดยเนื้อหาในเล่มนี้สอดคล้องตามมาตรฐานหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม โดยในเนื้อหาได้มีการกล่าวถึงตั้งแต่คุณสมบัติพื้นฐานของจำนวนจริง ลำดับของจำนวนจริง ตลอดไปจนถึงฟังก์ชันบนจำนวนจริง พร้อมทั้งเขียนบทพิสูจน์อย่างละเอียดเพื่อให้ผู้อ่านสามารถอ่านและศึกษาแนวทางการพิสูจน์ วิธีการพิสูจน์ในเล่มนี้ได้ด้วยตนเอง และยิ่งไปกว่านั้นผู้เขียนยังได้ยกตัวอย่างเพื่อประกอบความเข้าใจในแต่ละเนื้อหาและทฤษฎีบทไว้ด้วย ซึ่งหวังว่าผู้อ่านจะเข้าใจได้ง่ายยิ่งขึ้นจากการศึกษาจากตัวอย่างที่ได้ยกมาประกอบนี้ โดยแรงบันดาลใจในการเขียนตำราเล่มนี้มาจากประสบการณ์การสอนในรายวิชาดังกล่าว จึงได้รวบรวมเนื้อหาจากแหล่งความรู้หลายแห่ง เพื่อให้ได้เนื้อหาที่ครบถ้วน ตัวอย่างที่เหมาะสม และแบบฝึกหัดที่ต้องการให้ผู้เรียนได้ฝึกฝน ทั้งนี้เพื่อให้ได้ตำรารายวิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ที่มีความเหมาะสมต่อผู้เรียนและผู้ที่ต้องการศึกษาพื้นฐานความรู้ในเรื่องการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ รวมทั้งผู้ที่ต้องการเริ่มต้นจะศึกษาทางด้านนี้ด้วย โดยผู้อ่านสามารถศึกษาค้นคว้าและอ่านเพิ่มเติมด้วยตนเองจากตำราเล่มนี้ ซึ่งผู้เขียนได้บรรยายเหตุผลทั้งในการพิสูจน์และแบบฝึกหัดอย่างละเอียดและชัดเจน โดยในตำราฉบับนี้จะกล่าวถึงเนื้อหาบนขอบเขตของจำนวนจริง ซึ่งประกอบด้วยเนื้อหาทั้งหมดจำนวน 8 บท โดยมีรายละเอียดดังนี้

บทแรก ได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานของจำนวนจริง สัจพจน์สนาม และคุณสมบัติต่างๆของจำนวนจริง รวมถึงบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ สัจพจน์ความบริบูรณ์ และทฤษฎีบทที่สำคัญ อาทิเช่น คุณสมบัติอาร์คมีเดีย ซึ่งเป็นสมบัติของจำนวนจริงซึ่งได้ถูกนำไปใช้อ้างอิงอยู่เสมอ

บทที่ 2 ได้กล่าวถึงทอพอโลยีบนจำนวนจริง โดยได้กล่าวถึงบทนิยามของย่านใกล้เคียง เซตเปิด เซตปิด เซตกระชับ จุดภายนอกและจุดภายในบนจำนวนจริง รวมทั้งในส่วนท้ายของบทนี้ได้ให้ความรู้พื้นฐานของเรื่องปริภูมิอิงระยะทาง เพื่อแสดงให้เห็นว่าผู้อ่านได้ทำความรู้จักปริภูมิที่ขยายจากเซตของจำนวนจริงหรือปริภูมิยูคลิด และสามารถนำไปใช้ศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้น เช่น ปริภูมิอิงระยะทางและทอพอโลยีเบื้องต้น เป็นต้น

บทที่ 3 ในบทนี้ได้เริ่มต้นจากการให้บทนิยามของลำดับบนจำนวนจริง จากนั้นได้ให้บทนิยามของการลู่เข้าและลิมิตของลำดับ รวมทั้งแสดงการพิสูจน์ของการลู่เข้าของลำดับโดยใช้บทนิยาม อีกทั้งยังได้กล่าวถึง บทนิยามของการมีขอบเขตของลำดับ ทฤษฎีบทที่สำคัญของลำดับและลิมิต ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในรายวิชาแคลคูลัส ยิ่งไปกว่านั้นในบทนี้ยังได้แนะนำลำดับโคซี ความสัมพันธ์ของลำดับโคซีกับการลู่เข้า เพื่อเป็นความรู้พื้นฐานที่จะถูกนำไปใช้ศึกษาต่อในระดับที่สูงขึ้นและสำหรับผู้ที่ต้องการนำไปศึกษาต่อทางด้านการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์

บทที่ 4 ได้แนะนำบทนิยามของฟังก์ชันบนจำนวนจริง การพิจารณาการลู่เข้าของฟังก์ชันบน

จำนวนจริง และทฤษฎีบทเกี่ยวกับคุณสมบัติที่สำคัญของลิมิตของฟังก์ชัน รวมทั้งลิมิตที่อนันต์และลิมิตค่าอนันต์ โดยเนื้อหาในบทนี้จะทำให้ทราบว่าลำดับของจำนวนจริงซึ่งได้ศึกษาในบทที่ 3 นั้นเป็นเพียงแค่กรณีเฉพาะกรณีหนึ่งของฟังก์ชันเท่านั้น

บทที่ 5 จากความรู้ในบทที่ 4 ได้รับความรู้เกี่ยวกับเรื่องของลิมิตของฟังก์ชันบนจำนวนจริง ดังนั้น ในบทนี้จะนำความรู้จากบทที่แล้วมาใช้ในการนิยามฟังก์ชันต่อเนื่อง จากนั้นจึงกล่าวถึงสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันต่อเนื่อง ทฤษฎีบทที่สำคัญของฟังก์ชันความต่อเนื่องพร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ และในส่วนท้ายของบทนี้ได้มีการกล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างประกอบ

บทที่ 6 เมื่อมีความรู้จากเรื่องของลิมิตของฟังก์ชันจากบทที่ 4 และบทที่ 5 แล้วนั้น ในบทนี้จะนำความรู้เหล่านั้นมากล่าวถึงเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยเริ่มต้นจากการกล่าวถึงบทนิยามของอนุพันธ์ และพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญของอนุพันธ์ รวมทั้งพิสูจน์คุณสมบัติของอนุพันธ์ที่เราได้นำไปใช้กันอยู่สม่ำเสมอในทางแคลคูลัส เช่น การหาอนุพันธ์ของผลบวก ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันเป็นต้น ยิ่งไปกว่านั้น ในบทนี้ยังแสดงบทพิสูจน์ทฤษฎีบทของโลปีตาลและทฤษฎีบทที่สำคัญของอนุพันธ์ เช่น ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยและทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ เป็นต้น

บทที่ 7 ได้กล่าวถึงปริพันธ์รีมันน์ของฟังก์ชัน โดยเริ่มจากการให้บทนิยามของปริพันธ์รีมันน์ บทพิสูจน์ของคุณสมบัติต่างๆ ของปริพันธ์รีมันน์ที่สำคัญ พร้อมทั้งตัวอย่างประกอบ และยิ่งไปกว่านั้น ในบทนี้ยังได้แสดงบทพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญของปริพันธ์ นั่นคือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

บทที่ 8 ในบทสุดท้ายของเล่มนี้ ได้กล่าวถึงอนุกรมบนจำนวนจริง โดยเริ่มตั้งแต่การแนะนำอนุกรมอนันต์ การพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ รวมทั้งนำเสนอการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์แบบต่างๆ โดยในที่นี้ได้กล่าวถึง การทดสอบการลู่เข้าโดยการเปรียบเทียบ การทดสอบโดยอัตราส่วน การทดสอบโดยราก และการทดสอบโดยปริพันธ์ พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทของการทดสอบแบบต่างๆ ข้างต้นและได้ยกตัวอย่างประกอบในแต่ละการทดสอบอีกด้วย

ตำราเล่มนี้ สำเร็จลุล่วงด้วยดี ด้วยความช่วยเหลือจากหลายๆ ฝ่าย ผู้เขียนขอขอบคุณ ครูอาจารย์และครอบครัวที่ได้ให้กำลังใจ ขอขอบคุณอาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.นรินทร์ เพชรโรจน์ ที่ได้ประสิทธิประสาทความรู้ให้กับผู้เขียน ให้คำปรึกษาและคำแนะนำอย่างดีในการเขียนตำราเล่มนี้เสมอมา ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อิสระ อินจันทร์ สำหรับคำแนะนำ ความช่วยเหลือ ข้อเสนอแนะการจัดทำตำราฉบับนี้ รวมทั้งข้อคิดเห็นในการประเมินเอกสารฉบับนี้ ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ไพโรจน์ เขียวระยองและรองศาสตราจารย์ ดร.เกียรติศักดิ์ รัตนสีหา ที่ช่วยตรวจทาน แก้ไขข้อเสนอแนะ และข้อคิดเห็นในการประเมินตำราฉบับนี้ ขอขอบคุณอาจารย์ในหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยเหลือ ให้กำลังใจในการเขียนตำราเล่มนี้ให้สำเร็จลุล่วงสมบูรณ์ดี ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราฉบับนี้ จะเป็นประโยชน์สำหรับ อาจารย์ นิสิต นักศึกษา และผู้ที่สนใจศึกษาตำราฉบับนี้และสามารถนำความรู้ไปใช้ในการทำวิจัยและเรียนในระดับที่สูงขึ้นในโอกาสต่อไป

จิตติพร ตั้งควิเวกุล

กุมภาพันธ์ 2565

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ค
สารบัญรูป	จ
สัญลักษณ์	ฉ
บทที่ 1 จำนวนจริง	1
1.1 พีชคณิตและสมบัติอันดับของจำนวนจริง	1
1.2 ค่าสัมบูรณ์และเส้นจำนวนจริง	8
1.3 สมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง	14
1.4 บทสรุป	23
แบบฝึกหัดท้ายบท	24
บทที่ 2 ทอพอโลยีบนเส้นจำนวน	25
2.1 เซตเปิดและเซตปิด	25
2.2 จุดภายใน จุดภายนอกและจุดลิมิต	28
2.3 เซตกระชับ	32
2.4 ปริภูมิอิงระยะทาง	36
2.5 บทสรุป	44
แบบฝึกหัดท้ายบท	45
บทที่ 3 ลำดับของจำนวนจริง	47
3.1 ลิมิตของลำดับ	47
3.2 ลำดับโคชีและสมบัติของลำดับโคชี	68
3.3 ลำดับทางเดียวและลำดับย่อย	72
3.4 บทสรุป	81
แบบฝึกหัดท้ายบท	82
บทที่ 4 ลิมิตของฟังก์ชัน	85
4.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	85
4.2 ลิมิตด้านเดียว ลิมิตค่าอนันต์ และลิมิตที่อนันต์	98

4.3 บทสรุป	110
แบบฝึกหัดท้ายบท	110
บทที่ 5 ฟังก์ชันต่อเนื่อง	111
5.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง	111
5.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป	124
5.3 บทสรุป	130
แบบฝึกหัดท้ายบท	131
บทที่ 6 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	133
6.1 อนุพันธ์	133
6.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้	142
6.3 หลักเกณฑ์โลปีตาล	149
6.4 อนุพันธ์อันดับสูง	156
6.5 บทสรุป	158
แบบฝึกหัดท้ายบท	159
บทที่ 7 การหาปริพันธ์	161
7.1 ปริพันธ์รีมันน์	161
7.2 คุณสมบัติของปริพันธ์รีมันน์	169
7.3 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส	178
7.4 บทสรุป	186
แบบฝึกหัดท้ายบท	187
บทที่ 8 อนุกรมของจำนวนจริง	189
8.1 อนุกรมอนันต์	189
8.2 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม	195
8.3 บทสรุป	205
แบบฝึกหัดท้ายบท	206
บรรณานุกรม	209
เฉลยแบบฝึกหัด	213
ดัชนี	232

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า	
2.1	ย่านใกล้เคียงของ x	26
2.2	ย่านใกล้เคียงลบออกของ x	26
2.3	เซตเปิด	26
4.1	ค่าลิมิตของ f ที่จุด a	86
4.2	ลิมิตทางขวาของ f ที่จุด a	99
4.3	ลิมิตทางซ้ายของ f ที่จุด a	100
5.1	ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง	121
5.2	จุดตรึง	124
6.1	ค่าสูงสุดเฉพาะที่	142
6.2	ค่าต่ำสุดเฉพาะที่	143
6.3	$f(x) = x $	144
6.4	$f(x) = x^3$	144
6.5	ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม	147
7.1	$L(P, f)$ และ $U(P, f)$	162

สัญลักษณ์

ก่อนอื่นผู้เขียนขอกำหนดสัญลักษณ์ที่จะถูกในเอกสารคำสอนเล่มนี้ ซึ่งมีดังต่อไปนี้

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\emptyset$	เซตว่าง
$\in$	เป็นสมาชิกของ
$A \subseteq B$	เซต A เป็นเซตย่อยของเซต B
$A = B$	เซต A เท่ากับเซต B
$A \subset B$	$A \subseteq B$ และ $A \neq B$
$A \cup B$	เซต A ยูเนียนกับเซต B
$A \cap B$	เซต A อินเตอร์เซกชันกับเซต B
$\cup_{j=1}^n A_j$	การยูเนียนของเซตจำกัด
$\cap_{j=1}^n A_j$	การอินเตอร์เซกชันของเซตจำกัด
$A \setminus B, A - B$	ส่วนเติมเต็มสัมพัทธ์ของ B ใน A
$\forall$	สำหรับสมาชิกทุกตัว
$\exists$	สำหรับสมาชิกบางตัว หรือ จะมีสมาชิกบางตัว
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}'$	เซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{I}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{I}^+$	เซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{I}^-$	เซตของจำนวนเต็มลบ
$\mathbb{I}_0$	เซตของจำนวนเต็มศูนย์
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$+\infty$	ค่าอนันต์ทางบวก
$-\infty$	ค่าอนันต์ทางลบ
D_f	เซตของโดเมนของฟังก์ชัน f
R_f	เซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน f
$\max S$	สมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของเซต S
$\min S$	สมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดของเซต S

บทที่ 1

จำนวนจริง

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงคุณสมบัติต่างๆ บนจำนวนจริง โดยเริ่มต้นจากการแนะนำสัจพจน์สนาม และสัจพจน์อันดับของจำนวนจริง ไม่ว่าจะเป็น สมบัติปิด สมบัติเอกลักษณ์ และสมบัติอื่นๆ บนเซตของจำนวนจริง เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้และนำไปใช้พิสูจน์ในบทเรียนอื่นๆ ต่อไป จากนั้นจะกล่าวถึง ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง ซึ่งสิ่งนี้จะถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิจารณาจำนวนบนเซตของจำนวนจริง โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ คือ ไม่ว่าจะนำจำนวนจริงใดๆ ใส่ลงในค่าสัมบูรณ์จะได้ออกมาเป็นค่าที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 เสมอ โดยหลักการพิจารณาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงใดๆ นั้นได้มาจากการหาระยะห่างของจำนวนที่พิจารณากับจุดกำเนิด โดยค่าของระยะทางจะมีค่าที่เป็นบวกหรือศูนย์ ยกตัวอย่างเช่น $|2|$ จะหมายถึง ระยะทางจากจุดกำเนิดไปถึง 2 ซึ่งมีระยะทาง 2 หน่วย จึงทำให้ได้ว่า $|2| = 2$ และเช่นเดียวกันหากเป็น $|-2|$ จะหมายถึงการหาระยะห่างจากจุดกำเนิดถึง -2 ซึ่งมีระยะทาง 2 หน่วย จึงทำให้ได้ว่า $|-2| = 2$ เป็นต้น โดยในหัวข้อของค่าสัมบูรณ์ในบทนี้ ได้แสดงทฤษฎีบทที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ ซึ่งจะถูกนำไปใช้ต่อไปในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และหัวข้อสุดท้ายในบทนี้ ได้กล่าวถึงสมบัติความสมบูรณ์ของจำนวนจริง โดยเริ่มจากการกล่าวถึงเซตที่มีขอบเขตของเซตจำนวนจริง ไปจนถึงการให้สัจพจน์ความสมบูรณ์ นั่นคือ "สำหรับเซตย่อย A ที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ ถ้า A มีขอบเขตบนแล้ว A จะมีขอบเขตบนที่น้อยที่สุด" ซึ่งสัจพจน์นี้เป็นสิ่งที่ถูกนำไปใช้อยู่เสมอในการพิสูจน์เกี่ยวกับเซตที่มีขอบเขต และยิ่งไปกว่านั้นในส่วนท้ายของบทนี้ ยังได้กล่าวถึงสมบัติของอาร์คิมิดีส ซึ่งเป็นสมบัติที่สำคัญที่เป็นพื้นฐานความรู้ถูกนำไปใช้ในทางคณิตศาสตร์ จากที่กล่าวมาทั้งหมดข้างต้น จะขอเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงสัจพจน์สนาม

1.1 พีชคณิตและสมบัติอันดับของจำนวนจริง

ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องอื่นๆ บนเซตของจำนวนจริง จะขอเริ่มต้นจากการให้สัจพจน์ที่สำคัญบนจำนวนจริงก่อน นั่นคือ **สัจพจน์สนาม** ซึ่งสัจพจน์นี้เป็นการกล่าวถึงการดำเนินการบวกและคูณบนเซตของจำนวนจริง โดยนำมาดำเนินการกับสมาชิกในเซตของจำนวนจริงอย่างน้อย 2 ตัว ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

สัจพจน์ 1 [สัจพจน์สนาม (field axioms)] สำหรับเซตของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$) จะกล่าวว่าเป็น *สนาม (field)* เมื่อ $\mathbb{R}$ มีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว และมีตัวดำเนินการทวิภาค คือ

$$\text{การบวก } + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{การคูณ } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

ซึ่งสอดคล้องกับ

- (1) สมบัติปิดการบวก (additive closed property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $x + y \in \mathbb{R}$ และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น
- (2) สมบัติเปลี่ยนหมู่การบวก (additive associative property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (3) สมบัติสลับที่การบวก (additive commutative property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $x + y = y + x$
- (4) สมบัติเอกลักษณ์การบวก (additive identity property) นั่นคือ จะมี $0 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $x + 0 = x$
- (5) สมบัติผกผันการบวก (additive inverse property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $-x$ ซึ่งทำให้ $x + (-x) = 0$
- (6) สมบัติปิดการคูณ (multiplicative closed property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $x \cdot y \in \mathbb{R}$ และมีเพียงค่าเดียว
- (7) สมบัติเปลี่ยนหมู่การคูณ (multiplicative associative property) นั่นคือ ทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- (8) สมบัติการสลับที่การคูณ (multiplicative commutative property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $x \cdot y = y \cdot x$
- (9) สมบัติเอกลักษณ์การคูณ (multiplicative identity property) นั่นคือ จะมี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $1 \cdot x = x$
- (10) สมบัติผกผันการคูณ (multiplicative inverse property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ จะมี x^{-1} ซึ่งทำให้ $x \cdot x^{-1} = 1$ อาจจะกล่าวว่า x^{-1} คือ $\frac{1}{x}$ นั่นเอง
- (11) สมบัติการกระจายทางซ้าย (distributive property) นั่นคือ สำหรับทุกๆ $\alpha, x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$

หมายเหตุ สำหรับเซตของจำนวนตรรกยะ ($\mathbb{Q}$) เมื่อ

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in \mathbb{I} \text{ และ } b \neq 0 \right\}$$

จะเห็นว่า $\mathbb{Q}$ สอดคล้องสมบัติทั้ง 11 ข้อข้างต้น จึงทำให้สรุปได้ว่า $\mathbb{Q}$ เป็นสัจพจน์สนาม

ข้อสังเกต กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ ขอกำหนดสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$x - y$	ใช้แทน	$x + (-y)$
$\frac{x}{y}$	ใช้แทน	$x \cdot y^{-1}$
$x + y + z$	ใช้แทน	$(x + y) + z$
xyz	ใช้แทน	$(xy)z$
x^2	ใช้แทน	xx
x^3	ใช้แทน	xxx
$2x$	ใช้แทน	$x + x$
$3x$	ใช้แทน	$x + x + x$

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่ได้รับจากสัจพจน์สนามด้วยการดำเนินการบวกและการคูณ

ทฤษฎีบท 1.1.1 จากสัจพจน์สนามสำหรับการบวก ทำให้ได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (1) ถ้า $x + y = x + z$ แล้ว $y = z$
- (2) ถ้า $x + y = x$ แล้ว $y = 0$
- (3) ถ้า $x + y = 0$ แล้ว $y = -x$
- (4) $-(-x) = x$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (1) สมมติให้ $x + y = x + z$ จะแสดงว่า $y = z$
จาก $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\mathbb{R}$ เป็นสัจพจน์สนาม จะมีตัวผกผันการบวก นั่นคือ $-x$ ทำให้ได้ว่า

$$(-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$$

โดยสมบัติการเปลี่ยนหมู่การบวก จะได้ว่า

$$(-x + x) + y = (-x + x) + z$$

โดยสมบัติผกผันการบวก ทำให้ได้ว่า

$$0 + y = 0 + z$$

โดยสมบัติเอกลักษณ์การบวก จะได้ว่า

$$y = z$$

- (2) จากข้อ (1) กำหนดให้ $z = 0$ ทำให้ได้รับข้อ (2)
- (3) จากข้อ (1) กำหนดให้ $z = -x$ ทำให้ได้รับข้อ (3)

(4) เนื่องจาก $(-x) + x = 0$ โดยข้อ (3) จะได้ว่า $x = -(-x)$

□

ทฤษฎีบท 1.1.2 จากสัจพจน์สนามสำหรับการคูณ ทำให้ได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ $x, y, z \in \mathbb{R}$

(1) ถ้า $x \neq 0$ และ $x \cdot y = x \cdot z$ แล้ว $y = z$

(2) ถ้า $x \neq 0$ และ $x \cdot y = x$ แล้ว $y = 1$

(3) ถ้า $x \neq 0$ และ $x \cdot y = 1$ แล้ว $y = x^{-1}$

(4) ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $(x^{-1})^{-1} = x$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$

(1) สมมติให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \neq 0$ และ $x \cdot y = x \cdot z$ จะแสดงว่า $y = z$
จาก $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า จะมีตัวผกผันการคูณ $x^{-1} \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot (x \cdot z)$$

จากสมบัติเปลี่ยนหมู่การคูณ จะได้ว่า

$$(x^{-1} \cdot x) \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot z$$

โดยสมบัติผกผันการคูณ จะได้ว่า

$$1 \cdot y = 1 \cdot z$$

โดยสมบัติเอกลักษณ์การคูณ จะได้ว่า

$$y = z$$

(2) จากข้อ (1) กำหนดให้ $z = 1$ ทำให้ได้ข้อ (2)

(3) จากข้อ (1) กำหนดให้ $z = x^{-1}$ ทำให้ได้ข้อ (3)

(4) จากสมบัติผกผันการคูณ จะได้ว่า $x \cdot x^{-1} = 1$ และจาก $x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1} = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x &= x \cdot 1 \\ &= x \cdot (x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}) \\ &= (x \cdot x^{-1}) \cdot (x^{-1})^{-1} \\ &= 1 \cdot (x^{-1})^{-1} \\ &= (x^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 1.1.3 จากสัจพจน์สนาม ทำให้ได้ว่าข้อความต่อไปนี้จริง สำหรับ $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (1) $0 \cdot x = 0$
- (2) $0 \neq 1$
- (3) ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $x \cdot y \neq 0$
- (4) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$
- (5) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- (6) $(-1) \cdot x = -x$
- (7) ตัวผกผันการบวกมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น หมายความว่า ถ้า $x \in \mathbb{R}$ และ x' กับ $\bar{x}$ เป็นผกผันการบวกของ x แล้ว $x' = \bar{x}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$

- (1) จะแสดงว่า $0 \cdot x = 0$
เนื่องจาก $0 + 0 = 0$ จะได้ว่า

$$0 \cdot x + 0 \cdot x = x \cdot 0 + x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x$$

โดยพหุโพสิชัน 1.1.1 ข้อ (2) จะได้ว่า $0 \cdot x = 0$

- (2) จะแสดงว่า $0 \neq 1$
เนื่องจาก $\mathbb{R}$ เป็นสัจพจน์สนาม ดังนั้น $\mathbb{R}$ จะมีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว จึงกำหนดให้มี $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ เราจะพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง จึงสมมติให้ $0 = 1$ ซึ่งจะเห็นว่า $0 \cdot x = 1 \cdot x$ ดังนั้น $0 = x$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ จึงทำให้ได้ว่า $0 \neq 1$

- (3) กำหนดให้ $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ จะแสดงว่า $x \cdot y \neq 0$ จะพิสูจน์โดยการใช้ข้อขัดแย้ง สมมติให้ $x \cdot y = 0$ จากข้อ (1) จะเห็นว่า

$$(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot 0 = 0$$

เนื่องจาก $x \cdot y = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 0 &= (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot 0 \\ &= (y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot x \cdot y \\ &= (y^{-1} \cdot y) \cdot (x^{-1} \cdot x) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

จึงเกิดข้อขัดแย้งกับข้อ (2) ที่ว่า $0 \neq 1$ ดังนั้น $xy \neq 0$

- (4) จะแสดงว่า $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$
 เนื่องจาก $(-x) + x = 0$ จะเห็นว่า

$$((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0$$

ดังนั้น

$$x \cdot y + (-x) \cdot y = (-x) \cdot y + x \cdot y = 0$$

โดยพรอพโพสิชัน 1.1.1 ข้อ (3) จะได้ว่า

$$(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$

- (5) จะแสดงว่า $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
 โดยข้อ (4) และพรอพโพสิชัน 1.1.1 ข้อ (4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} (-x) \cdot (-y) &= -(x \cdot (-y)) \\ &= -(-(x \cdot y)) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

- (6) จะแสดงว่า $(-1) \cdot x = -x$ จากข้อ (4) แทนค่า $x = 1$ และ $y = x$ จะได้ว่า ข้อ (6) เป็นจริง
 (7) จะแสดงว่าตัวผกผันการบวกจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น สมมติให้ x' และ $\bar{x}$ เป็นตัวผกผันการบวกของ x จะแสดงว่า $x' = \bar{x}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} x' &= x' + 0 \\ &= x' + (x + \bar{x}) \\ &= (x' + x) + \bar{x} \\ &= (x + x') + \bar{x} \\ &= 0 + \bar{x} \\ &= \bar{x} + 0 \\ &= \bar{x} \end{aligned}$$

□

จากที่ได้กล่าวถึงสัจพจน์สนามและคุณสมบัติพื้นฐานที่ได้รับจากสัจพจน์สนามมาแล้ว ยิ่งไปกว่านั้น บนเซตของจำนวนจริงยังสามารถที่จะบอกได้ว่าจำนวนใดมากกว่าและจำนวนใดที่น้อยกว่า นั่นหมายความว่า จำนวนจริงสองจำนวนใดๆ สามารถเปรียบเทียบกันได้ ดังนั้นในการที่จะกล่าวถึงการเปรียบเทียบบนเซตของจำนวนจริง จึงจะกล่าวถึงสัจพจน์พื้นฐานเกี่ยวกับการเปรียบเทียบจำนวนจริงก่อน นั่นคือ **สัจพจน์อันดับ** ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

สัจพจน์ 2 [สัจพจน์อันดับ (order axioms)] บนเซตของจำนวนจริงจะมีเซตย่อย P ซึ่งสอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

- (1) สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริงเพียงอย่างเดียว นั่นคือ

$$x = 0 \text{ หรือ } x \in P \text{ หรือ } -x \in P$$

- (2) ถ้า $x \in P$ และ $y \in P$ แล้ว $x + y \in P$

- (3) ถ้า $x \in P$ และ $y \in P$ แล้ว $xy \in P$

จะเรียกเซต P ดังกล่าวนี้นี้ว่า *เซตของจำนวนจริงบวก (positive real number)* หรืออาจจะเขียนได้ว่า $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ และสำหรับจำนวนจริง x จะกล่าวว่าเป็น *จำนวนจริงลบ (negative real number)* เมื่อ $-x$ เป็นจำนวนจริงบวก

ต่อไปจะเป็นการให้บทนิยามของการมากกว่าและน้อยกว่าของจำนวนบนเซตจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ จะนิยามให้

- (1) a น้อยกว่า b (เขียนแทนด้วย $a < b$) ก็ต่อเมื่อ $b - a \in P$
- (2) a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b (เขียนแทนด้วย $a \leq b$) ก็ต่อเมื่อ $b - a \in P$ หรือ $a = b$
- (3) a มากกว่า b (เขียนแทนด้วย $a > b$) ก็ต่อเมื่อ $a - b \in P$
- (4) a มากกว่าหรือเท่ากับ b (เขียนแทนด้วย $a \geq b$) ก็ต่อเมื่อ $a - b \in P$ หรือ $a = b$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 1.1.1 จะเห็นได้ว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b > a$ และในทำนองเดียวกัน $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $b \geq a$

จากบทนิยาม 1.1.1 จึงทำให้ได้รับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.4 กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

- (1) ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b > 0$
- (2) ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab > 0$
- (3) ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
- (4) ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
- (5) ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
- (6) $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $-b < -a$
- (7) ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$

(8) ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

(9) ข้อความต่อไปนี้ จะเป็นจริงเพียงข้อใดข้อหนึ่งเท่านั้น

$$a < b \quad \text{หรือ} \quad a = b \quad \text{หรือ} \quad a > b$$

(10) $x > 0$ ก็ต่อเมื่อ $-x < 0$

(11) ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^2 > 0$ และยิ่งไปกว่านั้น $1 > 0$

(12) ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $0 < y^{-1} < x^{-1}$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

และยิ่งไปกว่านั้น ทฤษฎีบทต่อไปนี้ยังเป็นจริงสำหรับการพิจารณาจำนวนที่มากกว่าหรือเท่ากับกันด้วย

ทฤษฎีบท 1.1.5 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a \leq b + \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ แล้ว $a \leq b$

การพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $a > b$ และให้ $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ เนื่องจาก $a > b$ จะได้ว่า $a - b > 0$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} a &\leq b + \varepsilon \\ &= b + \left(\frac{a-b}{2}\right) \\ &= \frac{a+b}{2} \\ &< \frac{a+a}{2} \\ &= a \end{aligned}$$

นั่นคือ $a < a$ ซึ่งทำให้เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $a \leq b$

□

1.2 ค่าสัมบูรณ์และเส้นจำนวนจริง

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริงและทฤษฎีบทที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ โดยค่าสัมบูรณ์เป็นสิ่งที่รู้จักกันดีโดยเริ่มศึกษามาตั้งแต่ในระดับมัธยมศึกษาตลอดมาจนถึงในระดับอุดมศึกษา ซึ่งค่าสัมบูรณ์ได้ถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการคำนวณมากมาย ดังนั้นในบทนี้จะเริ่มจากการให้บทนิยามของค่าสัมบูรณ์ตลอดไปจนถึงการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์และจะนำสิ่งที่ได้รับในหัวข้อนี้ไปใช้เป็นเครื่องมือสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ บนเซตของจำนวนจริงในส่วนถัดไปของตำราเล่มนี้ด้วย

บทนิยาม 1.2.1 กำหนดให้ $a \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง *ค่าสัมบูรณ์ของ a (absolute value of a)* ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ จะถูกนิยามดังต่อไปนี้

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

จากบทนิยาม 1.2.1 จะกล่าวได้ว่า ค่าสัมบูรณ์เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ คือ $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ นั่นคือ $|\bullet| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ นั่นเอง

ต่อไปจะกำหนดและให้ความหมายของสัญลักษณ์ $\max S$ และ $\min S$ ซึ่งจะถูกกล่าวถึงในทฤษฎีบทถัดไป โดยกำหนดให้ S เป็นเซตที่มีสมาชิกจำกัด แล้วจะใช้สัญลักษณ์ $\max S$ แทน สมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของเซต S และจะใช้สัญลักษณ์ $\min S$ แทน สมาชิกที่มีค่าน้อยสุดของเซต S ดังนั้นจากบทนิยามของค่าสัมบูรณ์จึงทำให้ได้รับทฤษฎีบทพื้นฐานของค่าสัมบูรณ์ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.1 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $|a| \geq 0$
- (2) $|a| = \max\{a, -a\}$
- (3) $-|a| = \min\{a, -a\}$
- (4) $-|a| \leq a \leq |a|$
- (5) $|-a| = |a|$
- (6) $|a|^2 = |a^2| = a^2$

การพิสูจน์ กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

- (1) จะแสดงว่า $|a| \geq 0$ จากบทนิยาม 1.2.1 จะเห็นว่า $|a| \geq 0$ สำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$
- (2) จะแสดงว่า $|a| = \max\{a, -a\}$
จากบทนิยาม 1.2.1 สำหรับ $a \geq 0$ จะได้ว่า $|a| = a$ ทำให้ได้ว่า

$$-a \leq a = |a|$$

และถ้า $a < 0$ แล้ว $|a| = -a$ ทำให้ได้ว่า

$$a \leq -a = |a|$$

ดังนั้น $|a| = \max\{a, -a\}$

- (3) จะแสดงว่า $-|a| = \min\{a, -a\}$
จากการพิสูจน์ในข้อที่ (2) จะเห็นว่า ถ้า $a \geq 0$ แล้ว

$$-|a| \leq a$$

และถ้า $a < 0$ แล้ว

$$-|a| \leq -a$$

ดังนั้น $-|a| = \min\{a, -a\}$

- (4) จะแสดงว่า $-|a| \leq a \leq |a|$ จากข้อ (2) และ (3) ทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ

- (5) จะแสดงว่า $|-a| = |a|$ ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $-a \leq 0$ ดังนั้น

$$|-a| = -(-a) = a = |a|$$

และถ้า $a < 0$ แล้ว $-a > 0$ ดังนั้น

$$|a| = -a = |-a|$$

- (6) จะแสดงว่า $|a|^2 = |a^2| = a^2$

ถ้า $a \geq 0$ โดยทฤษฎีบท 1.1.4 ข้อ (2) จะได้ว่า $a^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$|a^2| = a^2$$

และเนื่องจาก $a \geq 0$ จะได้ว่า $|a| = a$ ทำให้ได้ว่า

$$|a|^2 = a^2$$

ดังนั้น

$$|a^2| = a^2 = |a|^2$$

และถ้า $a < 0$ โดยทฤษฎีบท 1.1.4 ข้อ (11) จะได้ว่า $a^2 > 0$ ดังนั้น

$$|a^2| = a^2$$

และจะเห็นว่า $|a| = -a$ ดังนั้น

$$|a|^2 = (-a)^2 = a^2$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$|a^2| = a^2 = |a|^2$$

□

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับค่าสัมบูรณ์อื่นๆ จะขอแสดงบทพิสูจน์ความจริงพื้นฐานของกำลังสองบนจำนวนจริง ดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 1.2.1 สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ ที่ไม่เป็นลบ ถ้า $a^2 = b^2$ แล้ว $a = b$

การพิสูจน์ กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็นลบ แยกพิจารณาเป็น 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $a^2 = b^2 = 0$ แล้วจะได้ว่า a และ b ต้องเป็นศูนย์ ดังนั้น $a = b$

กรณีที่ 2 ถ้า $a^2 = b^2 \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2} &= 1 \\ \left(\frac{a}{b}\right)^2 &= 1 \\ \left|\frac{a}{b}\right|^2 &= 1\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{a}{b} = 1 \text{ หรือ } \frac{a}{b} = -1$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้า $\frac{a}{b} = 1$ แล้ว

$$a = b$$

แต่ถ้า $\frac{a}{b} = -1$ แล้ว

$$a = -b$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะจากสมมติฐาน a, b ไม่เป็นจำนวนจริงลบ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $a = b$

□

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติต่างๆ ของค่าสัมบูรณ์บนเซตของจำนวนจริง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.2 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ และจำนวนจริง $a \geq 0$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1) |x| \leq a \text{ ก็ต่อเมื่อ } -a \leq x \leq a$$

$$(2) |xy| = |x||y|$$

$$(3) \text{ ถ้า } y \neq 0 \text{ แล้ว } \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$(4) |x + y| \leq |x| + |y|$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$ และ $a \geq 0$

(1) จะแสดงว่า $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

($\Rightarrow$) สมมติให้ $|x| \leq a$ จะแสดงว่า $-a \leq x \leq a$ โดยทฤษฎีบท 1.1.4 ข้อ 7) จะได้ว่า $-|x| \geq -a$ และจากทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (4) จะได้ว่า

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

ดังนั้น

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $-a \leq x \leq a$ จะแสดงว่า $|x| \leq a$

ถ้า $x \geq 0$ แล้ว

$$|x| = x \leq a$$

และถ้า $x < 0$ แล้ว

$$|x| = -x \leq -(-a) = a$$

ดังนั้น

$$|x| \leq a$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

(2) จะแสดงว่า $|xy| = |x||y|$ โดยทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (6) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |xy|^2 &= (xy)^2 \\ &= x^2 y^2 \\ &= |x|^2 |y|^2 \\ &= (|x||y|)^2 \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 1.2.1 จะได้ว่า $|xy| = |x||y|$

(3) กำหนดให้ $y \neq 0$ จะแสดงว่า $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ จากข้อ (2) จะเห็นว่า

$$|x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|$$

และจาก $y \neq 0$ จะได้ว่า จะมี $|y|^{-1} \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$$

(4) จะแสดงว่า $|x + y| \leq |x| + |y|$

จากทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (4) และ (6) และจากข้อ (2) ของทฤษฎีบทนี้ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x| + |y|)^2 \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 1.2.1 จะได้ว่า $|x + y| \leq |x| + |y|$

□

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (4) เป็นทฤษฎีบทที่รู้จักกันดีในชื่อว่า *อสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality)*

จากทฤษฎีบทของค่าสัมบูรณ์ข้างต้นทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามมา ดังต่อไปนี้

บทแทรก 1.2.1 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1) ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

$$(2) |x - y| \leq |x| + |y|$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$

(1) จะแสดงว่า $||x| - |y|| \leq |x - y|$ จากทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (4) จะได้ว่า

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad (1.1)$$

และ

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \quad (1.2)$$

จากอสมการ (1.1) จะได้ว่า

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad (1.3)$$

และจากอสมการ (1.2) และโดยทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (5) จะได้ว่า

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$$

ดังนั้น

$$-(|x| - |y|) \leq |x - y|$$

นั่นคือ

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \quad (1.4)$$

จาก (1.3) และ (1.4) จึงทำให้ได้ว่า

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จึงได้ว่า

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

- (2) จะแสดงว่า $|x - y| \leq |x| + |y|$ เนื่องจาก $x - y = x + (-y)$ โดยทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (5) และทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (4) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |x - y| &= |x + (-y)| \\ &\leq |x| + |-y| \\ &= |x| + |y| \end{aligned}$$

นั่นคือ $|x - y| \leq |x| + |y|$

□

บทแทรก 1.2.2 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้า $|x - y| < 1$ แล้ว $|x| < |y| + 1$

- (2) ถ้า $|x - y| < \frac{|y|}{2}$ แล้ว $\frac{|y|}{2} < |x|$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$

- (1) สมมติให้ $|x - y| < 1$ จะแสดงว่า $|x| < |y| + 1$ โดยบทตั้ง 1.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y| < 1$$

ดังนั้น $|x| < 1 + |y|$

- (2) สมมติให้ $|x - y| < \frac{|y|}{2}$ จะแสดงว่า $\frac{|y|}{2} < |x|$ โดยทฤษฎีบท 1.2.1 ข้อ (5) และบทตั้ง 1.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |y| - |x| &\leq ||y| - |x|| \\ &= |-(|y| - |x|)| \\ &= ||x| - |y|| \\ &\leq |x - y| \\ &< \frac{|y|}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{|y|}{2} < |x|$

□

1.3 สมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง

ในหัวข้อต่อไปนี้จะเริ่มต้นด้วยการแนะนำลักษณะของเซตที่มีขอบเขต โดยให้บทนิยามของเซตที่มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างก่อน จากนั้นจึงได้กล่าวถึงสัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง ซึ่งมีข้อความว่า สำหรับเซตที่มีขอบเขตบนจะสามารถบอกขอบเขตบนที่น้อยที่สุดของเซตดังกล่าวได้ โดย

ค่าของขอบเขตบนที่มีค่าน้อยที่สุดนั้น มีชื่อเรียกว่า ซูพรีมัมของเซต และในทำนองเดียวกัน สำหรับเซตที่มีขอบเขตล่าง จะสามารถบอกขอบเขตล่างที่มากที่สุดของเซตได้ด้วยเช่นกัน โดยค่าของขอบเขตล่างที่มากที่สุดนั้น มีชื่อเรียกว่า อินฟิมัมของเซตนั้นเอง แล้วยังได้แนะนำสัจพจน์ความบริบูรณ์ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่ถูกนำไปใช้อ้างอิงและพิสูจน์ทฤษฎีบทอื่นๆ อีกมากมาย ดังนั้นจึงจะเริ่มจากการแนะนำสัจพจน์ความบริบูรณ์ โดยให้บทนิยามเซตที่มีขอบเขตก่อนดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3.1 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างบนเซตของจำนวนจริง

- (1) ถ้ามีจำนวนจริง x ที่ทำให้ $a \leq x$ สำหรับทุกๆ $a \in A$ แล้วจะเรียก x ว่า *ขอบเขตบน* (upper bound) ของเซต A และจะกล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขตบน (bounded above)
- (2) ถ้ามีจำนวนจริง y ที่ทำให้ $y \leq a$ สำหรับทุกๆ $a \in A$ แล้วจะเรียก y ว่า *ขอบเขตล่าง* (lower bound) ของเซต A และจะกล่าวว่า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (bounded below)
- (3) เซต A จะกล่าวว่า *เป็นเซตที่มีขอบเขต* (bounded set) ถ้า A มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง หรืออาจกล่าวได้ว่า จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้ $|a| \leq M$ สำหรับทุกๆ $a \in A$

บทนิยาม 1.3.2 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างบนเซตของจำนวนจริง

- (1) ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตบน แล้วจะเรียกขอบเขตบนที่มีค่าน้อยที่สุดของ A ว่า *ซูพรีมัม* (supremum) ของ A เขียนแทนด้วย $\sup A$ หรืออาจกล่าวได้ว่า $\sup A = M$ ก็ต่อเมื่อ M เป็นขอบเขตบนของ A และถ้า x เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $M \leq x$
- (2) ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง แล้วจะเรียกขอบเขตล่างที่มีค่ามากที่สุดของ A ว่า *อินฟิมัม* (infimum) ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\inf A$ หรืออาจกล่าวได้ว่า $\inf A = m$ ก็ต่อเมื่อ m เป็นขอบเขตล่างของ A และถ้า y เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $y \leq m$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 1.3.2 จะเห็นว่า สำหรับเซต A ที่เป็นเซตย่อยและไม่เป็นเซตว่างบนเซตของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\inf A \leq \sup A$$

ต่อไปจะกล่าวถึงสัจพจน์หนึ่งที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ นั่นคือ สัจพจน์ความบริบูรณ์

สัจพจน์ความบริบูรณ์ (completeness axiom) สำหรับ A ซึ่งเป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง ถ้า A มีขอบเขตบนแล้ว A จะมีขอบเขตบนที่น้อยที่สุด หรือกล่าวได้ว่า ถ้า A มีขอบเขตบนแล้วจะมี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $M = \sup A$

จากสัจพจน์ความบริบูรณ์ข้างต้น ทำให้ได้รับทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.1 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง แล้วจะมี $m \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $m = \inf A$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $-A = \{-a | a \in A\}$ เนื่องจาก A เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง จะได้ว่า $(-A)$ เป็นเซตที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า จะมี $M \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$M = \sup(-A)$$

นั่นคือ

$$M \geq -a$$

สำหรับทุกๆ $a \in A$ กำหนดให้ $m = -M$ จะได้ว่า

$$m \leq a$$

สำหรับทุกๆ $a \in A$ ดังนั้น m จึงเป็นขอบเขตล่างของเซต A

ต่อไปจะแสดงว่า $m = \inf A$

สมมติให้ l เป็นขอบเขตล่างของเซต A จะได้ว่า $-l$ เป็นขอบเขตบนของเซต $(-A)$ จาก $M = \sup(-A)$ ดังนั้น

$$M \leq -l$$

ทำให้ได้ว่า

$$l \leq -M = m$$

ดังนั้น $m = \inf A$

□

ยิ่งไปกว่านั้น ต่อไปจะแสดงว่า $\sup$ และ $\inf$ ของเซตที่เป็นเซตย่อยและไม่เป็นเซตว่างบนเซตจำนวนจริงจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1.3.1 ถ้า A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง แล้ว $\sup A$ มีเพียงค่าเดียว และ $\inf A$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

การพิสูจน์ จะแสดงว่า $\sup A$ มีเพียงค่าเดียว สมมติให้ M และ u เป็น $\sup A$ เราจะแสดงว่า $M = u$ ถ้า $M = \sup A$ และ u เป็นขอบเขตบนของเซต A จะได้ว่า

$$M \leq u$$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า $u = \sup A$ และ M เป็นขอบเขตบนของเซต A ทำให้ได้ว่า

$$u \leq M$$

ดังนั้น

$$M = u$$

จึงสรุปได้ว่า $\sup A$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า $\inf A$ มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

□

จากการกล่าวถึง $\sup$ และ $\inf$ ข้างต้น ทำให้ได้รับความจริงต่อไปนี้ นั่นคือ หากนำค่าอินฟิมัมบวกด้วยจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่า 0 ($\inf A + \epsilon$) แล้วจะสามารถหาสมาชิกในเซตนั้นที่มีค่าน้อยกว่าผลบวกดังกล่าวได้ และในทำนองเดียวกันหากนำค่าซูพรีมลบด้วยจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่า 0 ($\sup A - \epsilon$) แล้วจะสามารถหาสมาชิกในเซตนั้นที่มีค่ามากกว่าผลบวกดังกล่าวได้ด้วยเช่นกัน ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.2 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง และถ้า $M = \sup A$ แล้วสำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $a \in A$ ซึ่งทำให้ $a > M - \epsilon$ และถ้า $m = \inf A$ แล้วสำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $x < m + \epsilon$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ และ $M = \sup A$ จะแสดงว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $a \in A$ ซึ่งทำให้ $a > M - \epsilon$ จะพิสูจน์โดยใช้วิธีการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ มี $\epsilon > 0$ ซึ่ง

$$a \leq M - \epsilon$$

สำหรับทุก $a \in A$ จากบทนิยาม 1.3.1 ข้อ (1) จะได้ว่า $M - \epsilon$ เป็นขอบเขตบนของเซต A แต่จาก M เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต A จะได้ว่า

$$M \leq M - \epsilon$$

จึงเกิดข้อขัดแย้ง จึงทำให้ได้ว่า ทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $a \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $a > M - \epsilon$

ในทำนองเดียวกันถ้าให้ $m = \inf A$ จะแสดงว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $x < m + \epsilon$ เช่นเดียวกันจะพิสูจน์โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ มี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้

$$x \geq m + \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ จากบทนิยาม 1.3.1 ข้อ (2) จะได้ว่า $m + \epsilon$ เป็นขอบเขตล่างของเซต A เนื่องจาก $m = \inf A$ ดังนั้น

$$m + \epsilon \leq m$$

จึงเกิดข้อขัดแย้ง จึงทำให้ได้ว่า ทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $x \in A$ ที่ทำให้ $x < m + \epsilon$ □

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของซูพรีมัมและอินฟิมัมของเซต

ทฤษฎีบท 1.3.3 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง และให้ $C = \{x + y | x \in A \text{ และ } y \in B\}$ และถ้า A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตบน แล้ว C เป็นเซตที่มีขอบเขตบนและ

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $C = \{x + y | x \in A \text{ และ } y \in B\}$ และ A, B เป็นเซตที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์จะได้ว่า จะมี $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $\sup A = a$ และ $\sup B = b$ จะเห็นว่า $x \leq a$ สำหรับทุกๆ $x \in A$ และ $y \leq b$ สำหรับทุกๆ $y \in B$ ดังนั้น

$$x + y \leq a + b$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ และ $y \in B$ และเนื่องจาก $C = \{x + y | x \in A \text{ และ } y \in B\}$ จะได้ว่า

$$c \leq a + b$$

สำหรับทุกๆ $c \in C$ ดังนั้น C เป็นเซตที่มีขอบเขตบน

ต่อไปจะแสดงว่า $\sup C = \sup A + \sup B$ โดยจะแยกพิจารณา 2 กรณี นั่นคือ
กรณีที่ 1 $\sup C \geq \sup A + \sup B$ และ กรณีที่ 2 $\sup C \leq \sup A + \sup B$ ดังต่อไปนี้
กรณีที่ 1 ให้ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $\frac{\epsilon}{2} > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมี $x \in A$ และ $y \in B$ ที่ทำให้

$$a - \frac{\epsilon}{2} < x \text{ และ } b - \frac{\epsilon}{2} < y$$

ดังนั้น

$$(a + b) - \epsilon = (a - \frac{\epsilon}{2}) + (b - \frac{\epsilon}{2}) < x + y \leq \sup C$$

นั่นคือ

$$a + b < \sup C + \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.1.5 จะได้ว่า $a + b \leq \sup C$ นั่นคือ

$$\sup A + \sup B \leq \sup C$$

กรณี 2 ให้ $\epsilon > 0$ และ $\sup C = c$ โดยทฤษฎีบทที่ 1.3.2 จะได้ว่าจะมี $z \in C$ ซึ่งทำให้

$$c - \epsilon < z$$

จาก $z \in C$ จะได้ว่า จะมี $x \in A$ และ $y \in B$ ที่ทำให้ $z = x + y$ ดังนั้น

$$c - \epsilon < z = x + y \leq a + b$$

ทำให้ได้ว่า

$$\sup C = c < (a + b) + \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.1.5 จะได้ว่า

$$\sup C \leq a + b = \sup A + \sup B$$

จากทั้ง 2 กรณี จึงสรุปได้ว่า

$$\sup C = \sup A + \sup B$$

□

ทฤษฎีบท 1.3.4 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง โดยที่ $M = \sup A$ และ $m = \inf A$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$ กำหนดให้

$$cA = \{cx | x \in A\}$$

จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1) \text{ ถ้า } c > 0 \text{ แล้ว } \sup(cA) = c \sup A$$

$$(2) \text{ ถ้า } c < 0 \text{ แล้ว } \inf(cA) = c \sup A$$

$$(3) \text{ ถ้า } c > 0 \text{ แล้ว } \inf(cA) = c \inf A$$

$$(4) \text{ ถ้า } c < 0 \text{ แล้ว } \sup(cA) = c \inf A$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริง

(1) สมมติให้ $c > 0$ และ $M = \sup A$ โดยบทนิยาม 1.3.2 จะได้ว่า

$$M \geq x$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ จาก $c > 0$ จะได้ว่า

$$cM \geq cx$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ ดังนั้น cM เป็นขอบเขตบนของเซต cA

ต่อไปจะแสดงว่า $cM = \sup(cA)$

สมมติให้ u เป็นขอบเขตบนของเซต cA จะได้ว่า

$$cx \leq u$$

สำหรับทุก $x \in A$ ดังนั้น

$$x \leq \frac{u}{c}$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ นั่นคือ $\frac{u}{c}$ เป็นขอบเขตบนของเซต A แต่ $M = \sup A$ จะได้ว่า

$$M \leq \frac{u}{c}$$

ดังนั้น

$$cM \leq u$$

ทำให้ได้ว่า

$$\sup(cA) = cM$$

นั่นคือ $\sup(cA) = c \sup A$

(2) สมมติให้ $c < 0$ และจาก $M = \sup A$ จะได้ว่า

$$x \leq M$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ ถ้า $c < 0$ จะได้ว่า

$$cM \leq cx$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ ดังนั้น cM เป็นขอบเขตล่างของเซต cA

ต่อไปจะแสดงว่า $cM = \inf(cA)$

ให้ l เป็นขอบเขตล่างของเซต cA จะได้ว่า

$$l \leq cx$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ ดังนั้น

$$x \leq \frac{l}{c}$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ นั่นคือ $\frac{l}{c}$ เป็นขอบเขตบนของเซต A แต่จาก $M = \sup A$ จะได้ว่า

$$M \leq \frac{l}{c}$$

ดังนั้น

$$l \leq cM$$

ทำให้ได้ว่า

$$cM = \inf cA$$

ดังนั้น

$$c \sup A = \inf(cA)$$

(3) แบบฝึกหัด

(4) แบบฝึกหัด

□

ต่อไปจะใช้ความรู้จากเรื่องเซตที่มีขอบเขตที่กล่าวมาข้างต้นมาพิสูจน์ว่า เซตของจำนวนนับไม่มีขอบเขตบน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.5 เซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

การพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยวิธีหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $\mathbb{N}$ เป็นเซตที่มีขอบเขตบน จะได้ว่า เนื่องจาก $\emptyset \neq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า จะมี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $M = \sup \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$n \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า $M - 1$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\mathbb{N}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$M - 1 < k \leq M$$

ดังนั้น $M < k + 1$ ซึ่ง $k + 1 \in \mathbb{N}$ จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับที่ $M = \sup \mathbb{N}$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน □

บนเซตของจำนวนจริง สมบัติของอาร์คิมิดีสเป็นสมบัติหนึ่งที่มีชื่อเสียงและถูกนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างกว้างขวาง ดังนั้นเราจึงขอกล่าวถึงสมบัติอาร์คิมิดีสพร้อมกับการพิสูจน์เพื่อให้เป็นสมบัติพื้นฐานสำหรับการใช้ในการพิสูจน์ในส่วนต่อไปในเล่มนี้

ทฤษฎีบท 1.3.6 [สมบัติอาร์คิมิดีส (Archimedean property)] ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(1) $\mathbb{N}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

(2) สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x < n$

(3) สำหรับทุกๆ $x > 0$ และทุกๆ $y \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $nx > y$

(4) สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$

การพิสูจน์ จะพิสูจน์การสมมูลกันของข้อความต่อไปนี้

1. จะแสดงว่า (1) $\Rightarrow$ (2) กำหนดให้ N เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน จะแสดงว่า สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x < n$ และเราจะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้มี $x \in \mathbb{R}$ สมมติให้ $x \geq n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า x เป็นขอบเขตบนของ N ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานข้อ (1)

2. จะแสดงว่า (2) $\Rightarrow$ (3) กำหนดให้สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x < n$ และสมมติให้ $x > 0$ และ $y \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$\frac{y}{x} \in \mathbb{R}$$

จาก (2) จะได้ว่า จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\frac{y}{x} < n$$

ดังนั้น

$$y < nx$$

โดยที่ $x > 0$

3. จะแสดงว่า (3) $\Rightarrow$ (4) สมมติให้ทุกๆ $x > 0$ และทุกๆ $y \in \mathbb{R}$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $nx > y$ สมมติให้ $\epsilon > 0$ จะแสดงว่า จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ จาก $1 \in \mathbb{R}$ โดย (3) จะได้ว่า จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$n\epsilon > 1$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{n} < \epsilon$$

และจาก

$$\frac{1}{n} > 0$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$$

4. จะแสดงว่า (4) $\Rightarrow$ (1) กำหนดให้ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{n} < \epsilon$$

จะแสดงว่า N เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ N เป็นเซตที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า $M = \sup N$ นั่นคือ จะมี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$n \leq M \tag{1.5}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จาก $\frac{1}{M} > 0$ โดยสมมติฐานข้อ (4) จะได้ว่า จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{M}$$

ดังนั้น $M < n_0$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับ (1.5) จึงทำให้ได้ว่า $\mathbb{N}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน

□

สุดท้ายนี้ จะแสดงว่าระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวน จะมีจำนวนตรรกยะอยู่ระหว่าง 2 จำนวนนั้นเสมอ แต่ในการพิสูจน์ต้องใช้เครื่องมือในการพิสูจน์คือ หลักการจัดอันดับอย่างดี¹ จึงได้รับการพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3.7 [ความหนาแน่นของจำนวนจริง (density of real numbers)] ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x < y$ แล้วจะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่งทำให้ $x < r < y$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x < y$

กรณีที่ 1 ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า $0 < x < y$ ดังนั้น $y - x > 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{y-x} > 0$$

โดยสมบัติอาร์คิมิดีส ข้อ (2) จะได้ว่า จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\frac{1}{y-x} < n$$

ดังนั้น

$$1 < n(y-x) = ny - nx$$

จะได้ว่า

$$1 + nx < ny \tag{1.6}$$

จาก $nx \in \mathbb{R}$ โดยสมบัติอาร์คิมิดีส ข้อ (2) อีกครั้ง จะได้ว่า จะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$nx < k$$

ให้ $S = \{k \in \mathbb{N} | nx < k\}$ จะได้ว่า $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{N}$ โดยหลักการจัดอันดับอย่างดี จะได้ว่าจะมี $m \in S$ ซึ่งทำให้

$$m \leq s$$

สำหรับทุกๆ $s \in S$ ดังนั้น $m-1 \notin S$ ทำให้ได้ว่า

$$m-1 \leq nx < m \tag{1.7}$$

¹หลักการจัดอันดับอย่างดี (well ordering principle) กล่าวคือ เซตย่อยใดๆ ของเซตของจำนวนนับที่ไม่เป็นเซตว่าง จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดในเซตย่อยนั้นเสมอ

จะได้ว่า

$$m \leq nx + 1 \quad (1.8)$$

จาก (1.6) (1.7) และ (1.8) ทำให้ได้ว่า

$$nx < m < ny$$

ให้ $r = \frac{m}{n}$ จะได้ว่า จะมี $r \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้ $x < r < y$

กรณีที่ 2 ถ้า $x \leq 0$ จะเห็นว่า $|x| \geq 0$ โดยสมบัติอาร์คิมิดีส ข้อ (2) จะได้ว่า จะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x| < k$$

จากทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$-k < x < k$$

ดังนั้น $x + k > 0$ จากที่กำหนดให้ $x < y$ ทำให้ได้ว่า

$$0 < x + k < y + k$$

จากกรณีที่ 1 จะได้ว่า จะมี $q \in \mathbb{Q}$ ที่ทำให้

$$x + k < q < y + k$$

เลือก $r = q - k \in \mathbb{Q}$ จะได้ว่า จะมี $r \in \mathbb{Q}$ ซึ่งทำให้

$$x < r < y$$

ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี ทำให้สรุปได้ว่า ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง □

1.4 บทสรุป

ในบทนี้ ต้องการให้ผู้อ่านได้เห็นแนวทางการพิสูจน์ของทฤษฎีบทต่างๆ บนเซตจำนวนจริง ซึ่งสิ่งที่ถูกพิสูจน์ในบทนี้เป็นคุณสมบัติที่ผู้อ่านได้รู้จักมาบ้างแล้ว ยกตัวอย่างเช่น สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการกระจาย เป็นต้น แต่ผู้อ่านมักจะแค่นำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณ ในที่นี้จึงบรรยายการพิสูจน์อย่างละเอียดเพื่อช่วยต่อความเข้าใจในวิธีการพิสูจน์ของผู้อ่าน และยังมีทฤษฎีบทพื้นฐานที่ได้กล่าวถึงอีก เช่น สัจพจน์อันดับ ซึ่งเป็นการกล่าวถึงจำนวนที่มากกว่าหรือน้อยกว่าบนเซตของจำนวนจริง คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ เป็นต้น แต่อีกสิ่งที่สำคัญที่ได้กล่าวถึงไว้ในบทนี้ก็คือ ความบริบูรณ์ ตลอดจนถึงการแนะนำอินฟินิตี้ ซูพรีมัม และสมบัติที่เกี่ยวข้อง รวมถึงการพิสูจน์ความจริงที่ถูกใช้กันมาอย่างยาวนาน เช่น การพิสูจน์ว่าเซตของจำนวนนับไม่มีขอบเขตบน และการพิสูจน์ว่าระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนสามารถหาจำนวนตรรกยะระหว่างสองจำนวนนั้นได้เสมอในทฤษฎีบท 1.3.7 เป็นต้น ดังนั้นเมื่อได้ศึกษาจบบทนี้แล้วผู้อ่านจะได้รับความรู้และคุณสมบัติพื้นฐานบนจำนวนจริง และนำไปใช้เป็นเครื่องมือสำหรับการพิสูจน์ในบทต่อไปของเล่มนี้

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 1.1.4
2. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 1.3.4 ข้อ (3) และ (4)
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x, y \neq 0$ แล้ว $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$
4. จงพิสูจน์ว่า $(-1)(-1) = 1$
5. จงพิสูจน์ว่า $xy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ หรือ $y = 0$
6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x \geq 0$ และ $x \leq \epsilon$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ แล้ว $x = 0$
7. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และให้ $C = \{x + y | x \in A \text{ และ } y \in B\}$ และถ้า A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง แล้ว C จะเป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง และจะได้ว่า

$$\inf C = \inf A + \inf B$$

บทที่ 2

ทอพอโลยีบนเส้นจำนวน

ในบทนี้จะศึกษาทอพอโลยีบนจำนวนจริง โดยเริ่มจากการแนะนำนิยามของเซตย่านใกล้เคียง (neighborhood) เซตเปิด (open set) เซตปิด (closed set) จุดภายนอก (exterior) จุดภายใน (interior) จุดลิมิต (limit point) และส่วนปิดคลุม (closure) บนจำนวนจริง จากนั้นจึงได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับเซตย่านใกล้เคียง เซตเปิด เซตปิด จุดภายนอก จุดภายใน จุดลิมิตและส่วนปิดคลุม โดยได้ให้นิยามของจุดลิมิต (จุดสะสมหรือจุดเกาะกลุ่ม) ของเซตที่เป็นเซตย่อยของจำนวนจริง และในส่วนนี้ทำให้ได้รับทฤษฎีบทที่สำคัญอีกหนึ่งทฤษฎีบท นั่นคือ ทฤษฎีบท 2.2.2 ที่ได้กล่าวว่า "เซตปิดจะต้องมีจุดลิมิตทั้งหมดอยู่ในเซตนั้นนั่นเอง" ซึ่งทฤษฎีบทนี้จะนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิจารณาความเป็นเซตปิดได้โดยที่พิจารณาว่าจุดลิมิตของเซตนั้นอยู่ในเซตที่พิจารณาทั้งหมดหรือไม่นั่นเอง ต่อจากนั้นจึงได้แนะนำนิยามของเซตกระชับ (compact set) โดยเซตกระชับเป็นเครื่องมือหนึ่งที่สำคัญ โดยเฉพาะทางการการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ เพราะในทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงหลายทฤษฎีได้มีการให้สมมติฐานของความเป็นเซตกระชับเพื่อนำคุณสมบัติและเครื่องมือจากความเป็นเซตกระชับไปใช้ในการพิสูจน์ ยกตัวอย่างเช่น นำเซตกระชับไปใช้เป็นสมมติฐานเพื่อพิจารณาค่าสุดขีดในบทที่ 5 ในทฤษฎีบท 5.1.5 และอีกทั้งยังนำไปใช้ในทางด้านจุดตรึง (fixed point) (ซึ่งเรื่องของจุดตรึงจะกล่าวรายละเอียดในบทที่ 5 อีกครั้ง) โดย Schauder's fixed point theorem [22] ได้กล่าวว่า "สำหรับ X ที่เป็นเซตย่อยบนปริภูมิบานาค เป็นเซตกระชับ คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่าง โดยที่ การส่ง $T : X \rightarrow X$ เป็นการส่งต่อเนื่อง แล้ว T จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียว" เป็นต้น โดยในหัวข้อเซตกระชับนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญอีกทฤษฎีบทหนึ่งของเซตกระชับด้วย นั่นคือ ทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล โดยเป็นการแสดงการพิสูจน์ว่า "เซตกระชับบนจำนวนจริงเป็นเซตปิดที่มีขอบเขต" โดยแนวคิดและความสำคัญของทฤษฎีบทนี้ คือ หากต้องการจะพิจารณาความเป็นเซตกระชับ สามารถที่จะพิจารณาเซตดังกล่าวว่าเป็นเซตปิดและเป็นเซตที่มีขอบเขต ก็ทำให้เพียงพอที่จะบอกได้ว่าเซตนั้นเป็นเซตกระชับแล้ว สุดท้ายของบทนี้ ยังได้แนะนำปริภูมิอิงระยะทาง ซึ่งเป็นปริภูมิที่ใหญ่กว่าปริภูมิยุคลิด ($\mathbb{R}^n$) โดยมีปริภูมิยุคลิดเป็นเซตย่อยนั่นเอง ในที่นี้ได้ยกตัวอย่างเพื่อประกอบความเข้าใจการพิจารณาปริภูมิอิงระยะทาง อีกทั้งยังได้กล่าวถึงเซตเปิดและเซตปิดบนปริภูมิอิงระยะทางด้วย เพื่อให้ผู้เรียนได้เห็นถึงความแตกต่างของการนิยามเซตเปิดและเซตปิดบนเซตจำนวนจริงและบนปริภูมิอิงระยะทาง และให้ผู้เรียนได้เห็นถึงแนวทางในการศึกษาบนปริภูมิอื่นๆ ต่อไป

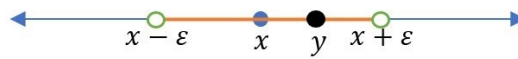
2.1 เซตเปิดและเซตปิด

ก่อนที่จะให้นิยามของเซตเปิดและเซตปิด ผู้อ่านจะต้องรู้จักเซตย่านใกล้เคียง (neighborhood set) ก่อน ดังนั้นต่อไปนี้จะกล่าวถึงนิยามของย่านใกล้เคียง

บทนิยาม 2.1.1 กำหนดให้ $x \in \mathbb{R}$ และจำนวนจริง $\epsilon > 0$ แล้ว ย่านใกล้เคียง (neighborhood) ของ x คือ เซตที่อยู่ในรูป

$$N(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \epsilon\}$$

จะเรียก x ว่า จุดศูนย์กลางของย่านใกล้เคียง (center of neighborhood) และ ϵ จะถูกเรียกว่า รัศมีของย่านใกล้เคียง (radius of neighborhood) ของ x นั้นเอง ดังรูป 2.1

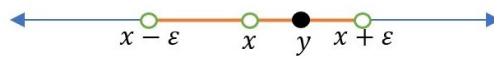


รูปที่ 2.1: ย่านใกล้เคียงของ x

และจะเรียกเซต

$$N^*(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R} : 0 < |x - y| < \epsilon\} = N(x, \epsilon) \setminus \{x\}$$

ว่า ย่านใกล้เคียงลบออก (deleted neighborhood) ของ x ดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2: ย่านใกล้เคียงลบออกของ x

เมื่อได้ทราบถึงบทนิยามของย่านใกล้เคียงแล้ว ต่อไปจะให้บทนิยามของเซตเปิดและเซตปิดดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.2 กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ จะเรียก S ว่า เซตเปิด (open set) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $x \in S$ จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(x, \epsilon) \subseteq S$$

ดังรูป 2.3 และ S จะถูกเรียกว่า เซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด



รูปที่ 2.3: เซตเปิด

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเซตเปิดและเซตปิดบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 2.1.1 จงพิจารณาเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตเปิดหรือเซตปิด สำหรับทุกๆ $a, b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $a < b$ จะได้ว่า

- (1) ช่วงบนจำนวนจริงต่อไปนี้ (a, b) , $(-\infty, a)$ และ (b, ∞) เป็นเซตเปิด ยกตัวอย่างเช่น (a, b) เป็นเซตเปิด เพราะ ถ้าให้ $x \in (a, b)$ แล้วจะสามารถหา $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $N(x, \epsilon) \subseteq (a, b)$ โดยเลือก $\epsilon < \min\{|x - a|, |x - b|\}$ นั้นเอง
- (2) ช่วงบนจำนวนจริงต่อไปนี้ $[a, b]$, $(-\infty, a]$ และ $[b, \infty)$ เป็นเซตปิด
- (3) ช่วงบนจำนวนจริงต่อไปนี้ $(a, b]$ และ $[a, b)$ ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

ทฤษฎีบทถัดไปจะเป็นทฤษฎีบทที่พิสูจน์ให้เห็นว่าย่านใกล้เคียงเป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.1.1 กำหนดให้ $x \in \mathbb{R}$ และสำหรับจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $N(x, \epsilon)$ เป็นเซตเปิด

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x \in \mathbb{R}$ และ $\epsilon > 0$ ต้องการแสดงว่า $N(x, \epsilon)$ เป็นเซตเปิด จะแสดงการพิสูจน์ตามบทนิยาม 2.1.2 สมมติให้ $y \in N(x, \epsilon)$ โดยบทนิยาม 2.1.1 จะได้ว่า

$$|x - y| < \epsilon$$

กำหนดให้ $\epsilon' = \epsilon - |x - y|$ จะได้ว่า $\epsilon' > 0$ ดังนั้น จึงเหลือเพียงแสดงให้ได้ว่า $N(y, \epsilon') \subseteq N(x, \epsilon)$ สมมติให้ $z \in N(y, \epsilon')$ จะแสดงว่า $z \in N(x, \epsilon)$ เนื่องจาก $z \in N(y, \epsilon')$ โดยบทนิยาม 2.1.1 จะได้ว่า

$$|y - z| < \epsilon'$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ 4 และจาก $\epsilon' = \epsilon - |x - y|$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |x - z| &\leq |x - y| + |y - z| \\ &< |x - y| + \epsilon' \\ &= |x - y| + (\epsilon - |x - y|) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $z \in N(x, \epsilon)$ จึงได้ว่า $N(y, \epsilon') \subseteq N(x, \epsilon)$ โดยบทนิยาม 2.1.2 จึงสรุปได้ว่า $N(x, \epsilon)$ เป็นเซตเปิด □

ในทฤษฎีบทถัดไปนี้จะแสดงการพิสูจน์ของคุณสมบัติพื้นฐานของเซตเปิดบนเซตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับ $\mathbb{R}$ ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริง แล้วข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

- (1) $\mathbb{R}$ และ $\emptyset$ เป็นเซตเปิด
- (2) ยูเนียนของเซตเปิดใดๆ เป็นเซตเปิด
- (3) อินเตอร์เซกชันของเซตเปิดจำกัดเซตเป็นเซตเปิด

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง

- (1) จะแสดงว่า $\emptyset$ เป็นเซตเปิด โดยนิยามของเซตเปิด จะต้องแสดงว่า "สำหรับทุกๆ $x \in \emptyset$ จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $N(x, \epsilon) \subseteq \emptyset$ " ซึ่งประโยคข้างต้นเป็นการเชื่อมด้วยตัวเชื่อม ถ้า...แล้ว... โดยหลักการหาค่าความจริงของตรรกศาสตร์ จะเห็นว่า ถ้าข้อความหลังถ้า... เป็นเท็จแล้ว ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ ดังนั้น จากประพจน์ข้างต้น สำหรับทุกๆ $x \in \emptyset$ เป็นเท็จ จึงทำให้ประพจน์นี้เป็นจริงเสมอ จึงทำให้ได้ว่า $\emptyset$ เป็นเซตเปิด

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตเปิด โดยนิยามของเซตเปิดเช่นเดียวกัน จะต้องแสดงว่า "สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ " จะเห็นว่าข้อความนี้เป็นจริง เนื่องจากเอกภพสัมพัทธ์ที่กล่าวถึงในที่นี้คือ $\mathbb{R}$ ดังนั้น ทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ และ $N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ เสมอ โดยนิยามของเซตเปิด ทำให้ได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นเซตเปิด

- (2) กำหนดให้ A_i เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ สำหรับทุกๆ $i \in I$ เมื่อ I เป็นเซตดัชนี จะแสดงว่า $\bigcup_{i \in I} A_i$ เป็นเซตเปิด
กำหนดให้ $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ จะได้ว่า จะมี $k \in I$ ซึ่ง $x \in A_k$ และเนื่องจาก A_k เป็นเซตเปิด โดยนิยามของเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $\epsilon > 0$ ที่ทำให้ $N(x, \epsilon) \subseteq A_k$ ดังนั้น

$$N(x, \epsilon) \subseteq A_k \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

โดยนิยามของเซตเปิด ทำให้สรุปได้ว่า $\bigcup_{i \in I} A_i$ เป็นเซตเปิด

- (3) กำหนดให้ $B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ จะแสดงว่า $\bigcap_{i=1}^n B_i$ เป็นเซตเปิด
ให้ $x \in \bigcap_{i=1}^n B_i$ จะได้ว่า $x \in B_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ เนื่องจาก $B_1, B_2, \dots, B_n$ เป็นเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $\epsilon_i > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(x, \epsilon_i) \subseteq B_i$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ เลือก $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ ทำให้ได้ว่า $\epsilon \leq \epsilon_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ดังนั้น

$$N(x, \epsilon) \subseteq N(x, \epsilon_i) \subseteq B_i$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$N(x, \epsilon) \subseteq \bigcap_{i=1}^n B_i$$

โดยนิยามของเซตเปิด จะได้ว่า $\bigcap_{i=1}^n B_i$ เป็นเซตเปิด

□

2.2 จุดภายใน จุดภายนอกและจุดลิมิต

ในหัวข้อนี้ จะแนะนำจุดภายในและจุดภายนอกรวมทั้งจุดลิมิตของเซตของจำนวนจริง รวมถึงทฤษฎีบทที่น่าสนใจเกี่ยวกับจุดภายนอก จุดภายในและจุดลิมิต โดยเริ่มจากนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ถ้ามีย่านใกล้เคียงที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ x ซึ่งเป็นเซตย่อยของ A แล้วจุด $x \in \mathbb{R}$ จะถูกเรียกว่า *จุดภายใน* (interior point) ของ A ถ้ามีย่านใกล้เคียงที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ y ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R} \setminus A$ แล้ว y จะถูกเรียกว่า *จุดภายนอก* (exterior point) ของ A และถ้าทุกๆ ย่านใกล้เคียงที่จุดศูนย์กลางที่ z บรรจุน้อยจุดหนึ่งของ A และอย่างน้อยจุดหนึ่งของ $\mathbb{R} \setminus A$ แล้ว z คือ *จุดขอบ* (boundary point) ของ A

เซตของจุดภายในของ A จะถูกเรียกว่า *ภายใน* (interior) ของเซต A เขียนแทนด้วย $\text{int}A$ หรือ A^0 เซตของจุดภายนอกของ A จะถูกเรียกว่า *ภายนอก* (exterior) ของเซต A เขียนแทนด้วย $\text{ext}A$ และเซตของจุดขอบของ A จะถูกเรียกว่า *ขอบ* (boundary) ของเซต A เขียนแทนด้วย ∂A

จากการนิยามจุดภายนอก จุดภายในและจุดขอบข้างต้น ทำให้ได้รับทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.1 กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $\mathbb{R} = \text{int}A \cup \partial A \cup \text{ext}A$
- (2) $\text{ext}A = \text{int}(\mathbb{R} \setminus A), \text{int}A = \text{ext}(\mathbb{R} \setminus A)$
- (3) $\text{int}A \subseteq A, \text{ext}A \subseteq \mathbb{R} \setminus A$

โดยที่ $\text{int}A, \partial A, \text{ext}A$ เป็นเซตที่ไม่มีส่วนร่วมกัน (disjoint set)

การพิสูจน์ การพิสูจน์ได้รับโดยตรงจากบทนิยาม 2.2.1 □

ต่อไปจะกล่าวถึงจุดลิมิตบนเซตจำนวนจริง ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.2 กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และเรียกจุด x_0 ในเซตของจำนวนจริง ว่า *จุดสะสม* (accumulation point) หรือ *จุดลิมิต* (limit point) หรือ *จุดเกาะกลุ่ม* (cluster point) ของ S ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $s \in S$ ที่ทำให้

$$0 < |s - x_0| < \epsilon$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $s \in S$ ที่ทำให้ $s \in N^*(x_0, \epsilon)$ หรือจะกล่าวได้อีกว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $N^*(x_0, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$

ต่อไปเป็นการพิจารณาจุดลิมิต (จุดสะสม) ของเซตที่กำหนดให้ โดยใช้บทนิยาม 2.2.2 แสดงดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.1 กำหนดให้ $S = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ จงแสดงว่า 0 เป็นจุดสะสมของ S

วิธีทำ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยสมบัติของอาร์คมีเดีย น ข้อ (4) จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ เนื่องจาก $\frac{1}{n} \in S$ และ

$$0 < \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \epsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 2.2.2 จะได้ว่า 0 เป็นจุดสะสมของ S □

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญอีกอันหนึ่งของจุดลิมิต โดยใช้การพิจารณาจุดลิมิตมาช่วยในการพิจารณาความเป็นเซตปิด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.2 กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ จะได้ว่า S เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ S บรรจุจุดที่เป็นจุดลิมิตของ S ทั้งหมด

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ S เป็นเซตปิด และ x เป็นจุดลิมิตของ S จะแสดงว่า $x \in S$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $x \notin S$ จะได้ว่า $x \in \mathbb{R} \setminus S$ เนื่องจาก S เป็นเซตปิด จะได้ว่า $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่ง

$$N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$$

ทำให้ได้ว่า

$$N(x, \epsilon) \cap S = \emptyset$$

แต่เนื่องจาก $x \notin S$ จะได้ว่า

$$N^*(x, \epsilon) \cap S = \emptyset$$

จึงเกิดข้อขัดแย้งกับนิยามของ x เป็นจุดลิมิตของ S ดังนั้น $x \in S$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ S บรรจุจุดลิมิตของ S ทั้งหมด จะแสดงว่า S เป็นเซตปิด นั่นคือ จะแสดงว่า $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด สมมติให้ $x \in \mathbb{R} \setminus S$ หมายความว่า $x \notin S$ ทำให้ได้ว่า x ไม่เป็นจุดลิมิตของ S ทำให้ได้ว่า จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(x, \epsilon) \cap S = \emptyset$$

ดังนั้น

$$N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$$

จากนิยามของเซตเปิด ทำให้ได้ว่า $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด นั่นคือ S เป็นเซตปิด □

สุดท้ายของหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงส่วนปิดคลุมของเซตบนจำนวนจริงซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2.3 กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ แล้ว *ส่วนปิดคลุม (closure) ของเซต A* คือ การยูเนียนของเซต A และเซตของจุดลิมิตของ A ซึ่งจะถูกเขียนแทนด้วย $\bar{A}$

โดยมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับส่วนปิดคลุมดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2.3 กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) จุดลิมิตของ A ไม่จำเป็นต้องเป็นสมาชิกในเซต A
- (2) $A \subseteq \bar{A}$
- (3) $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus \text{ext} A$
- (4) $\bar{A} = \text{int} A \cup \partial A$
- (5) $\bar{A} = A \cup \partial A$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $A \subseteq \mathbb{R}$

- (1) จะแสดงว่า จุดลิมิตของ A ไม่จำเป็นต้องเป็นสมาชิกในเซต A
จากบทนิยามของจุดลิมิต เนื่องจากถ้า x_0 เป็นจุดลิมิตของ A แล้วจะได้ว่าสำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ แล้ว $N^*(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ นั่นคือ x_0 ไม่จำเป็นต้องเป็นสมาชิกในเซต A
- (2) จะแสดงว่า $A \subseteq \bar{A}$
กำหนดให้ $y \in A$ จะแสดงว่า $y \in \bar{A}$ เนื่องจาก $y \in A$ โดยบทนิยามของ $\bar{A}$ จะได้ว่า $y \in \bar{A}$
- (3) จะแสดงว่า $\bar{A} \subseteq \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$ จากทฤษฎีบท 2.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\mathbb{R} \setminus \text{ext}A = \text{int}A \cup \partial A$$

สมมติให้ $x \in \bar{A}$ จะต้องแสดงให้เห็นได้ว่า $x \in \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $x \in \text{ext}A$ โดยบทนิยามของเซตภายนอกจะได้ว่า จะมีบางบอลเปิดที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ x อยู่ใน $\mathbb{R} \setminus A$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับบทนิยามของ $\bar{A}$ ที่กล่าวว่าสำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ แล้ว $N^*(x, \epsilon)$ ต้องบรรจุสมาชิกของ A อย่างน้อยหนึ่งตัว ดังนั้น จึงทำให้ได้ว่า

$$x \in \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$$

แล้วทำให้ได้ว่า

$$\bar{A} \subseteq \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\mathbb{R} \setminus \text{ext}A \subseteq \bar{A}$ สมมติให้ $y \in \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$ จะแสดงว่า $y \in \bar{A}$ นั่นคือ $y \in A$ หรือ y เป็นจุดลิมิตของ A จาก $y \in \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$ จะได้ว่า

$$y \in \text{int}A \cup \partial A$$

ถ้า $y \in \text{int}A$ แล้ว

$$y \in A \subseteq \bar{A}$$

และถ้า $y \in \partial A$ แล้วทุกบอลเปิดที่จุดศูนย์กลางที่ y จะบรรจุสมาชิกใน A อย่างน้อยหนึ่งตัว และสมาชิกใน $\mathbb{R} \setminus A$ อย่างน้อยหนึ่งตัว จึงทำให้ได้ว่า $N^*(y, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ ดังนั้น

$$y \in \partial A \subseteq \bar{A}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\mathbb{R} \setminus \text{ext}A \subseteq \bar{A}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\bar{A} = \mathbb{R} \setminus \text{ext}A$$

- (4) จะแสดงว่า $\bar{A} = \text{int}A \cup \partial A$ ซึ่งได้รับโดยตรงจากทฤษฎีบท 2.2.1 ข้อ (1) และข้อ (3) ของทฤษฎีบทนี้

(5) จะแสดงว่า $\bar{A} = A \cup \partial A$ จากข้อ (4) ทราบว่า

$$\bar{A} = \text{int}A \cup \partial A$$

ดังนั้นในข้อนี้จึงจะแสดงว่า $\text{int}A \cup \partial A = A \cup \partial A$ จะเห็นได้ชัดเจนว่า

$$\text{int}A \cup \partial A \subseteq A \cup \partial A$$

ดังนั้นจึงเหลือเพียงแสดงว่า $A \cup \partial A \subseteq \text{int}A \cup \partial A$ กำหนดให้ $z \in A \cup \partial A$ จะเห็นว่า ถ้า $z \in \partial A$ แล้ว

$$z \in \text{int}A \cup \partial A$$

และถ้า $z \in A$ แล้วโดยบทนิยามของจุดภายในจะได้ว่า

$$z \notin \text{ext}A$$

และจากทฤษฎีบท 2.2.1 ข้อ (1) ทำให้ได้ว่า

$$z \in \text{int}A \cup \partial A$$

จึงสรุปได้ว่า

$$A \cup \partial A \subseteq \text{int}A \cup \partial A$$

ดังนั้น

$$\bar{A} = A \cup \partial A$$

□

2.3 เซตกระชับ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความกระชับของเซตบนจำนวนจริง โดยจะเริ่มต้นจากการให้บทนิยามของเซตกระชับดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3.1 กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และ $\{G_i | i \in I\}$ เป็นกลุ่ม (collection) ของเซตเปิด จะกล่าวว่า $\{G_i | i \in I\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิด (open cover) ของ S ก็ต่อเมื่อ

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$$

และจะเรียกกลุ่มย่อย (sub collection) $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_n}\}$ ของกลุ่ม $\{G_i | i \in I\}$ ว่าเป็นชุดปกคลุมย่อยจำกัด (finite subcover) ของ $\{G_i | i \in I\}$ ก็ต่อเมื่อ

$$S \subseteq \bigcup_{j=1}^n G_{i_j}$$

แล้วจะเรียก S ว่าเป็นเซตกระชับ (compact set) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ชุดปกคลุมเปิดของ S มีชุดปกคลุมย่อยจำกัด

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของเซตกระชับ โดยจะพิจารณาตามบทนิยาม 2.3.1

ตัวอย่าง 2.3.1 ต่อไปเป็นตัวอย่างของเซตที่เป็นเซตกระชับและไม่เป็นเซตกระชับบนจำนวนจริง

- (1) เซตของจำนวนจริงไม่เป็นเซตกระชับ เนื่องจาก $\{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ $\mathbb{R}$ ซึ่งไม่มีชุดปกคลุมย่อยจำกัด
- (2) ช่วงกึ่งปิดกึ่งเปิด $[0, 1)$ ไม่เป็นเซตกระชับ เพราะว่ามี $\{(-1, 1 - \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ $[0, 1)$ ที่ไม่มีชุดปกคลุมย่อยจำกัด
- (3) ช่วงปิด $[a, b]$ เป็นเซตกระชับ เนื่องจากเมื่อพิจารณาชุดปกคลุมเปิดใดๆ แล้วจะสามารถหาชุดปกคลุมย่อยจำกัดได้เสมอ ยกตัวอย่างเช่น $\{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ $[a, b]$ แล้ว $[a, b] \subseteq \bigcup_{x=1}^m (-x, x)$ เมื่อ $m = \max\{|a|, |b|\}$

บทตั้งต่อไปนี้เป็นแสดงว่าสำหรับเซตปิดที่มีขอบเขตจะมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของเซตแน่นอน มีบทพิสูจน์ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.3.1 ถ้า S เป็นเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของเซตจำนวนจริงแล้ว S จะมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ และ S เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต จะแสดงว่า S มีค่าสูงสุดและต่ำสุด เนื่องจาก S มีขอบเขตโดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ และทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง m และ m' ซึ่งทำให้

$$m = \sup S \text{ และ } m' = \inf S$$

จึงจะแสดงว่า m คือ $\max S$ และ m' คือ $\min S$ นั่นคือ จะต้องแสดงว่า $m \in S$ และ $m' \in S$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $m \notin S$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $x \in S$ ซึ่งทำให้

$$m - \epsilon < x < m$$

และจาก $m < m + \epsilon$ ทำให้ได้ว่า $x \in N(m, \epsilon)$ เนื่องจาก $x \in S$ ดังนั้น

$$N(m, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$$

แต่เนื่องจาก S เป็นเซตปิด จะได้ว่า $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด ทำให้ได้ว่า จะมี $\epsilon_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(m, \epsilon_1) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$$

ดังนั้น $N(m, \epsilon_1) \cap S = \emptyset$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า $N(m, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จึงจะได้ว่า $m \in S$ จึงทำให้ได้ว่า m เป็นค่าสูงสุดใน S

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $m' \in S$ และ m' คือ ค่าต่ำสุดใน S (แบบฝึกหัด) □

จากบทตั้งข้างต้น ได้มีการกล่าวถึงเซตปิดที่มีขอบเขต ดังนั้นในทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงให้เห็นว่าเซตปิดที่มีขอบเขตก็คือเซตกระชับนั่นเอง ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญบนเซตกระชับ เพราะต่อไปในการพิจารณาเซตกระชับนั้น สามารถที่พิจารณาเพียงแค่ว่าเซตนั้นเป็นเซตปิดและมีขอบเขตก็เพียงพอ โดยมีการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 [ทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล (Heine - Borel theorem)] กำหนดให้ S เป็นเซตย่อยของ เซตของจำนวนจริง จะได้ว่า S เป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ S เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ S เป็นเซตกระชับ และ $I_n = (n, -n)$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า I_n เป็นเซตเปิด ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $S \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ จึงทำให้ได้ว่า $\{I_n | n \in \mathbb{N}\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ S แต่เนื่องจาก S เป็นเซตกระชับ จะได้ว่า จะมีจำนวนนับ $n_1, n_2, \dots, n_k$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} S &\subseteq I_{n_1} \cup I_{n_2} \cup \dots \cup I_{n_k} \\ &= \bigcup_{j=1}^k I_{n_j} \end{aligned}$$

กำหนดให้ $m = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ จะได้ว่า

$$|x| \leq m$$

สำหรับทุกๆ $x \in S$ ดังนั้น S เป็นเซตที่มีขอบเขต

ต่อไปจะแสดงว่า S เป็นเซตปิด นั่นคือ จะแสดงว่า $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด

ให้ $y \in \mathbb{R} \setminus S$ และสำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $U_n = (-\infty, y - \frac{1}{n}) \cup (y + \frac{1}{n}, \infty)$ จะเห็นว่า $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ S ดังนั้น จะมีจำนวนนับ $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ซึ่ง

$$S \subseteq U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \dots \cup U_{n_k}$$

เนื่องจาก สำหรับทุกๆ $n_i \leq n_j$ จะได้ว่า $U_{n_i} \subseteq U_{n_j}$ ดังนั้น

$$S \subseteq U_{n_k} = \left(-\infty, y - \frac{1}{n_k}\right) \cup \left(y + \frac{1}{n_k}, \infty\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$N\left(y, \frac{1}{n_k}\right) = \left(y - \frac{1}{n_k}, y + \frac{1}{n_k}\right) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$$

ดังนั้น $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด จึงทำให้ได้ว่า S เป็นเซตปิด

($\Leftarrow$) กำหนดให้ S เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต จะแสดงว่า S เป็นเซตกระชับ

ให้ $G = \{G_i | i \in J\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ S และนิยามให้ สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{R}$

$$S_x = S \cap (-\infty, x]$$

และ $B = \{x \in \mathbb{R} | S_x \text{ ถูกปกคลุมด้วยชุดปกคลุมย่อยจำกัดของ } G\}$ เนื่องจาก S เป็นเซตปิดที่มีขอบเขต โดยบทตั้ง 2.3.1 จะได้ว่า จะมี $d \in S$ ซึ่ง

$$d = \min S$$

จะเห็นว่า $S_d = S \cap (-\infty, d] = \{d\}$ ดังนั้น $d \in B$ ทำให้ได้ว่า $B \neq \emptyset$

กรณีที่ 1 ถ้า B เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน แล้ว จะมี $p \in B$ ซึ่ง

$$\sup S < p$$

ทำให้ได้ว่า $S_p = S \cap (-\infty, p] = S$ แต่เนื่องจาก $p \in B$ ทำให้ได้ว่า $S_p = S$ ถูกปกคลุมโดยชุดปกคลุมย่อยจำกัดของ G ดังนั้น S เป็นเซตกระชับ

กรณีที่ 2 ถ้า B เป็นเซตที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า จะมี $m \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $m = \sup B$ จะเห็นว่า $m \in S$ หรือ $m \notin S$

กรณีที่ 2.1 ถ้า $m \in S$ จะได้ว่า จะมี $G_k \in G$ ซึ่ง $m \in G_k$ เนื่องจาก G_k เป็นเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $N(m, \epsilon) \subseteq G_k$ โดยจะเห็นว่าโดยทฤษฎีบทความหนาแน่นของจำนวนจริง (ทฤษฎีบท 1.3.7) จะมี $m - \epsilon < x_1 < m$ และ $m < x_2 < m + \epsilon$ ทำให้ได้ว่า จะมีช่วงปิด $[x_1, x_2] \subseteq G_k$ ซึ่ง

$$x_1 < m < x_2$$

จาก $x_1 < m$ และ $m = \sup B$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะมี $q \in B$ ซึ่งทำให้

$$x_1 < q \leq m$$

ดังนั้นจะมี $G_{i_1}, G_{i_2}, \dots, G_{i_m} \subseteq G$ ซึ่ง

$$S_q \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

และจาก $x_1 < q$ จะได้ว่า

$$S \cap (-\infty, x_1] \subseteq S \cap (-\infty, q]$$

ทำให้ได้ว่า

$$S_{x_1} \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m}$$

ดังนั้น

$$S_{x_2} \subseteq G_{i_1} \cup G_{i_2} \cup \dots \cup G_{i_m} \cup G_k$$

ทำให้ได้ว่า $x_2 \in B$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $m = \sup B$

กรณีที่ 2.2. ถ้า $m \notin S$ แล้ว $m \in \mathbb{R} \setminus S$ จาก $\mathbb{R} \setminus S$ เป็นเซตเปิด จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(m, \epsilon) \cap S = \emptyset$$

ถ้า $\epsilon' > 0$ และ $0 < \epsilon' < \epsilon$ แล้ว

$$S_{m-\epsilon} = S \cap (-\infty, m - \epsilon] = S \cap (-\infty, m + \epsilon'] = S_{m+\epsilon'}$$

จะได้ว่า $m + \epsilon' \in B$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง เพราะ $\sup B = m < m + \epsilon'$ ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่ B จะมีขอบเขตบน โดยเหตุผลข้างต้น นั่นคือ B เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน โดยกรณีที่ 1 จะได้ว่า S เป็นเซตกระชับ $\square$

ต่อไปเป็นอีกหนึ่งทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียง คือ ทฤษฎีบทโบชานโน-ไวแยร์สตราสส์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่แสดงว่าเซตอนันต์ที่มีขอบเขตจะมีจุดลิมิต โดยทฤษฎีบทนี้จะนำทฤษฎีบทไฮเน-โบเรลไปใช้ในการพิสูจน์ แสดงบทพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.2 [ทฤษฎีบทโบชานโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano-Weierstrass Theorem)]

กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ ถ้า S เป็นเซตอนันต์ที่มีขอบเขตแล้ว S จะมีจุดลิมิต

การพิสูจน์ กำหนดให้ S เป็นเซตย่อยที่มีขอบเขตบนเซตจำนวนจริงและ S เป็นเซตอนันต์ จะแสดงว่า S มีจุดลิมิต จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ S ไม่มีจุดลิมิต จึงทำให้ได้ว่า S บรรจุจุดลิมิตทั้งหมดของมัน โดยทฤษฎีบท 2.2.2 จะได้ว่า S เป็นเซตปิด และโดยทฤษฎีบท 2.3.1 จะได้ว่า S เป็นเซตกระชับ เนื่องจาก S ไม่มีจุดลิมิต ดังนั้นแต่ละ $x \in S$ โดยที่ x ไม่เป็นจุดลิมิตใน S จะได้ว่าจะมี $\epsilon_x > 0$ ซึ่งทำให้ $N^*(x, \epsilon_x) \cap S = \emptyset$ ดังนั้น

$$N(x, \epsilon_x) \cap S = \{x\}$$

จะเห็นว่า $\{N(x, \epsilon_x) | x \in S\}$ เป็นชุดคลุมเปิดของ S และจาก S เป็นเซตกระชับ จะได้ว่า จะมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ ทำให้ได้ว่า

$$S \subseteq N(x_1, \epsilon_{x_1}) \cup N(x_2, \epsilon_{x_2}) \cup \dots \cup N(x_n, \epsilon_{x_n})$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} S &= S \cap \left(\bigcup_{i=1}^n N(x_i, \epsilon_{x_i}) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (S \cap N(x_i, \epsilon_{x_i})) \\ &= \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ S เป็นเซตอนันต์ ดังนั้น S จึงมีจุดลิมิต □

2.4 ปริภูมิอิงระยะทาง

เนื่องจากความรู้พื้นฐานในทางคณิตศาสตร์ ได้เริ่มศึกษาตั้งแต่เส้นจำนวนหรือเซตของจำนวนจริงก่อน ต่อจากนั้นก็ขยายมาศึกษากระนาบพิกัดฉากหรือระนาบ XY หรือ $\mathbb{R}^2$ แล้วจึงมาศึกษาใน 3 มิติ หรือ $\mathbb{R}^3$ จนกระทั่งขยายไปถึงการศึกษาบน $\mathbb{R}^n$ นั่นคือ $\mathbb{R}^n = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ เมื่อ } x_i \in \mathbb{R} \text{ ทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n\}$ โดยเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า *ปริภูมิยูคลิด* (Euclidian space) แต่ในทางคณิตศาสตร์ ปริภูมิยูคลิดไม่ได้เป็นปริภูมิที่ใหญ่ที่สุด ยังคงมีปริภูมิอีกมากมายที่ได้ถูกศึกษาในทางคณิตศาสตร์และใหญ่กว่าปริภูมิยูคลิด ในที่นี้เราจะขอยกมาเพียงหนึ่งปริภูมิที่ครอบคลุมปริภูมิยูคลิด นั่นคือ *ปริภูมิอิงระยะทาง* (metric space) ซึ่งปริภูมิยูคลิดเป็นกรณีเฉพาะหนึ่งของปริภูมิอิงระยะทางเท่านั้น โดยจะมีการให้บทนิยามของปริภูมิอิงระยะทางไว้ในบทนิยามที่ 2.4.2 พร้อมยกตัวอย่างประกอบ จุดมุ่งหมายของการศึกษาในบทนี้ เพื่อให้ผู้เรียนได้ทราบถึงปริภูมิอื่นๆ ที่นอกเหนือจากปริภูมิยูคลิด รวมทั้งทำให้ได้ทราบว่า เมื่อได้พิสูจน์ว่าทฤษฎีบทเป็นจริงบนปริภูมิอิงระยะทาง แล้วทฤษฎีบทนั้นจะเป็นจริงบนปริภูมิยูคลิดด้วย นั่นเพราะว่าปริภูมิยูคลิดเป็นส่วนหนึ่งของปริภูมิอิงระยะทางนั่นเอง และอย่างที่ได้อธิบายไว้ข้างต้นว่า ปริภูมิในทางคณิตศาสตร์ยังคงมีอีกมากมาย ยกตัวอย่างเช่น ปริภูมิฮิลเบิร์ต ปริภูมิบานาค ปริภูมิเชิงทอพอโลยี เป็นต้น ซึ่งผู้เรียนสามารถจะศึกษาต่อได้ในระดับที่สูงขึ้น

เริ่มแรกนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด บน $\mathbb{R}^n$ ก่อน

บทนิยาม 2.4.1 กำหนดให้ระยะทางระหว่างจุด x และ y เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}^n$ คือ

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (2.1)$$

สำหรับ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ โดยที่ $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ โดยที่ $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

ต่อไปจะพิจารณาคูณสมบัติของ $d(x, y)$ ซึ่งสอดคล้อง (2.1) ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4.1 สำหรับทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ และ $d(x, y)$ นิยามดัง (2.1) แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ และ $d(x, y)$ สอดคล้องกับ (2.1)

- (1) $d(x, y) \geq 0$ เป็นจริง ตามการนิยาม $d(x, y)$ ใน (2.1)
- (2) จะแสดงว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0; \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0; \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i; \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

- (3) จะแสดงว่า $d(x, y) = d(y, x)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} \\ &= |y - x| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

- (4) จะแสดงว่า $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ โดยจะนำการหาระยะห่างระหว่างจุด (อสมการสามเหลี่ยม) มาใช้ในการพิสูจน์ โดยเป็นที่ทราบกันดีว่าใน $\mathbb{R}^2$ นั้นหาหาระยะห่างระหว่างจุด $x = (x_1, x_2)$ และ $y = (y_1, y_2)$ คือ $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ และถ้ามีจุด $z = (z_1, z_2)$ จะได้ว่า

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}$$

และเมื่อพิจารณาบน $\mathbb{R}^3$ ก็จะได้ในทำนองเดียวกัน นั่นคือ สำหรับ $x = (x_1, x_2, x_3)$ และ $y = (y_1, y_2, y_3), z = (z_1, z_2, z_3)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\ & \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (x_3 - z_3)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + (z_3 - y_3)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้นจากวิธีการข้างต้น จึงทำให้ได้บน $\mathbb{R}^n$ ว่าสำหรับ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ & \leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} \\ & \quad + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2} \end{aligned}$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2} \\ & \quad + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 + \dots + (z_n - y_n)^2} \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

□

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.4.1 ข้อ (3) เรียกว่า *กฎสมมาตร (symmetry)* และข้อ 4 เรียกว่า *กฎอสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality)* นั้นเอง

ต่อไปจะกล่าวถึงปริภูมิอิงระยะทาง โดยจะเริ่มต้นจากการให้บทนิยามของปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม 2.4.2 กำหนดให้ X เป็นเซตใดๆ และ $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงจำนวนจริงที่ส่งจากผลคูณคาร์ทีเซียน $X \times X$ แล้ว d จะถูกเรียกว่า *ฟังก์ชันอิงระยะทาง (metric function)* บน X ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $x, y, z \in X$ สอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

$$(m1) \quad d(x, y) \geq 0$$

$$(m2) \quad d(x, y) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y$$

$$(m3) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(m4) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

จะเรียกคู่อันดับ (X, d) ว่า *ปริภูมิอิงระยะทาง (metric space)* และสำหรับทุกๆ $x, y \in X$ จะกล่าวว่าค่า $d(x, y)$ เป็นระยะทางระหว่าง x และ y ภายใต้ฟังก์ชันอิงระยะทางหรือเมตริก d

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.4.1 จะเห็นว่าสำหรับเซต $\mathbb{R}^n$ และ d ซึ่งสอดคล้องกับบทนิยาม 2.4.1 ดังนั้น $(\mathbb{R}^n, d)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

ทฤษฎีบท 2.4.2 สมมติให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $x, y, z \in X$ แล้วจะได้ว่า

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

ต่อไปนี้จะแสดงตัวอย่างของปริภูมิอิงระยะทาง

ตัวอย่าง 2.4.1 สำหรับเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ และกำหนดให้ฟังก์ชัน $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$d(x, y) = |x - y|$$

สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ แล้วจะได้ว่า $(\mathbb{R}, d)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

การพิสูจน์ จะแสดงว่าฟังก์ชัน d สอดคล้องกับคุณสมบัติ (m1) - (m4) ของบทนิยาม 2.4.2 กำหนดให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ และโดยคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ว่า

(m1) จะแสดงว่า $d(x, y) \geq 0$ เนื่องจาก $d(x, y) = |x - y|$ ทำให้ได้ว่า $d(x, y) \geq 0$

(m2) จะแสดงว่า $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\Leftrightarrow |x - y| = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(m3) จะแสดงว่า $d(x, y) = d(y, x)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &= |-(y - x)| \\ &= |y - x| \\ &= d(y, x) \end{aligned}$$

(m4) จะแสดงว่า $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x, y) &= |x - y| \\ &\leq |x - z| + |z - y| \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

จะเห็นว่าสอดคล้อง (m1) - (m4) ดังนั้น d เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง จึงสรุปได้ว่า $(\mathbb{R}, d)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง □

ตัวอย่าง 2.4.2 กำหนดให้ X เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง และฟังก์ชัน $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = y \\ 1 & \text{เมื่อ } x \neq y \end{cases}$$

จงแสดงว่า (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด □

ตัวอย่าง 2.4.3 สำหรับเซต $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ จงพิสูจน์ว่า $d_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

สำหรับทุกๆ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ แล้วจะได้ว่า $(\mathbb{R}^n, d_1)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ จะแสดงว่าสอดคล้องกับ (m1) - (m4)

(m1) จะแสดงว่า $d_1(x, y) \geq 0$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| \geq 0$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \geq 0$$

(m2) จะแสดงว่า $d_1(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| \geq 0$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d_1(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(m3) จะแสดงว่า $d_1(x, y) = d_1(y, x)$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \\ &= d_1(y, x) \end{aligned}$$

(m4) จะแสดงว่า $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} d_1(x, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \\ &= d_1(x, y) + d_1(y, z) \end{aligned}$$

โดยจะเห็นว่า d_1 สอดคล้องกับ (m1) - (m4) ดังนั้น d_1 เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง จึงสรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^n, d_1)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง $\square$

ตัวอย่าง 2.4.4 สำหรับเซต $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ จงพิสูจน์ว่า $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

สำหรับทุกๆ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ แล้วจะได้ว่า $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ จะแสดงว่าสอดคล้อง (m1) - (m4)

(m1) จะแสดงว่า $d_\infty(x, y) \geq 0$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| \geq 0$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \geq 0$$

(m2) จะแสดงว่า $d_\infty(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| \geq 0$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0 \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow x = y \end{aligned}$$

(m3) จะแสดงว่า $d_\infty(x, y) = d_\infty(y, x)$ เนื่องจาก $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| \\ &= d_\infty(y, x) \end{aligned}$$

(m4) จะแสดงว่า $d_\infty(x, y) \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| \\ &\leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y) \end{aligned}$$

$$\text{ทำให้ได้ว่า } d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \leq d_\infty(x, z) + d_\infty(z, y)$$

ซึ่งจะเห็นว่า d_∞ สอดคล้องกับ (m1) - (m4) ดังนั้น d_∞ เป็นฟังก์ชันอิงระยะทาง จึงสรุปได้ว่า $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง $\square$

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของเซตเปิดและเซตปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง โดยจะเริ่มต้นจากการให้บทนิยามของ บอลเปิด บอลปิด และทรงกลมบนปริภูมิอิงระยะทางก่อน ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4.3 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และให้จุด $x_0 \in X$ และจำนวนจริง $r > 0$ จะนิยามเซต 3 ชนิดต่อไปนี้

(1) *บอลเปิด (open ball)* เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $B(x_0, r)$ โดยที่

$$B(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$$

(2) *บอลปิด (closed ball)* เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overline{B}(x_0, r)$ โดยที่

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$$

(3) *ทรงกลม (sphere)* เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $S(x_0, r)$ โดยที่

$$S(x_0, r) = \{x \in X | d(x, x_0) = r\}$$

หมายเหตุ จะสังเกตเห็นว่า ถ้าเรากำหนดให้ $d(x, y) = |x - y|$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว $B(x, \epsilon)$ คือ $N(x, \epsilon)$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ นั่นเอง

ต่อไปจะเป็นการให้บทนิยามของเซตเปิดและเซตปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง

บทนิยาม 2.4.4 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ M เป็นเซตย่อยของ X บนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่า M เป็น*เซตเปิด (open set)* ก็ต่อเมื่อ M บรรจุบอลเปิดของแต่ละจุดในเซต M และเซตย่อย K บนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่า*เป็นเซตปิด (closed set)* ก็ต่อเมื่อส่วนเติมเต็ม (complement) ของมันเป็นเซตเปิด นั่นคือ $X \setminus K$ เป็นเซตเปิด

หมายเหตุ จากบทนิยามเซตเปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง จะสามารถเขียนได้ว่า สำหรับทุกๆ $y \in M$ จะมี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $B(y, \epsilon) \subseteq M$ ซึ่งเมื่อ $B(y, \epsilon) = N(x, \epsilon)$ แล้วบทนิยามของเซตเปิดนี้ จะเป็นบทนิยาม 2.1.2 นั่นเอง

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่าบอลเปิดบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นเซตเปิด ซึ่งแนวทางในการพิสูจน์จะแสดงทำนองเดียวกับการพิสูจน์ว่า ย่านใกล้เคียงเป็นเซตเปิดซึ่งได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 2.1.1

ทฤษฎีบท 2.4.3 บอลเปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) เป็นเซตเปิด

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x \in (X, d)$ และสำหรับจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะแสดงว่า $B(x, \epsilon)$ เป็นเซตเปิด กำหนดให้ $y \in B(x, \epsilon)$ จะได้ว่า

$$d(x, y) < \epsilon$$

สมมติให้ $\epsilon' = \epsilon - d(x, y)$ จะเห็นว่า $\epsilon' > 0$ จึงเหลือเพียงแสดงว่า $B(y, \epsilon') \subseteq B(x, \epsilon)$ ให้ $z \in B(y, \epsilon')$ จะได้ว่า

$$d(z, y) < \epsilon'$$

เนื่องจาก $\epsilon' = \epsilon - d(x, y)$ จะได้ว่า

$$d(z, y) < \epsilon - d(x, y)$$

ดังนั้น

$$d(z, y) + d(x, y) < \epsilon$$

โดย (m4) จะได้ว่า

$$d(z, x) < \epsilon$$

โดยบทนิยามของบอลเปิด จึงทำให้ได้ว่า

$$z \in B(x, \epsilon)$$

ดังนั้น $B(y, \epsilon') \subseteq B(x, \epsilon)$ จึงสรุปได้ว่า $B(x, \epsilon)$ เป็นเซตเปิด □

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทข้างต้น ทำให้ได้รับอีกว่า บอลปิดเป็นเซตปิด

ยิ่งไปกว่านั้น บนปริภูมิอิงระยะทางคุณสมบัติของเซตเปิดต่อไปนี้ยังคงเป็นจริง

ทฤษฎีบท 2.4.4 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) X และ $\emptyset$ เป็นเซตเปิด
- (2) ยูเนียนของเซตเปิดใดๆ เป็นเซตเปิด
- (3) อินเตอร์เซกชันของเซตเปิดจำกัดเซตเป็นเซตเปิด

การพิสูจน์ กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

- (1) พิจารณาทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 2.1.2 ข้อ 1. นั่นก็คือพิสูจน์ได้โดยตรงตามบทนิยามของเซตเปิด
- (2) กำหนดให้ G_i เป็นเซตเปิดใดๆ บนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) สำหรับ $i \in J$ เมื่อ J เป็นเซตดัชนี จะแสดงว่า $\bigcup_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด
กำหนดให้ $x \in \bigcup_{i \in J} G_i$ จะได้ว่า จะมี G_k สำหรับบาง $k \in J$ ซึ่ง $x \in G_k$ เนื่องจาก G_k เป็นเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $r > 0$ ซึ่งทำให้

$$B(x, r) \subseteq G_k$$

และเนื่องจาก $G_k \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ ทำให้ได้ว่า

$$B(x, r) \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$$

ดังนั้น $\bigcup_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด

(3) กำหนดให้ A_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ เป็นเซตเปิดใดๆ บนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d)

จะแสดงว่า $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด

กำหนดให้ $y \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ จะได้ว่า $y \in A_i$ สำหรับทุกๆ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และเนื่องจากทุกๆ A_i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ เป็นเซตเปิด จากบทนิยามของเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $r_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ซึ่งทำให้

$$B(y, r_i) \subseteq A_i$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ กำหนดให้ $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ จะได้ว่า

$$B(y, r) \subseteq B(y, r_i)$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ จึงทำให้ได้ว่า

$$B(y, r) \subseteq A_i$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น

$$B(y, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n A_i$$

โดยบทนิยามของเซตเปิดทำให้ได้ว่า $\bigcap_{i=1}^n A_i$ เป็นเซตเปิด

□

2.5 บทสรุป

เนื้อหาทั้งหมดในบทนี้ ได้เริ่มศึกษาตั้งแต่ทอพอโลยีบนเส้นจำนวนจริง (หรือบน $\mathbb{R}$ หรือบน ปริภูมิยูคลิด) นั่นคือ ได้กล่าวถึงย่านใกล้เคียง เซตเปิดและเซตปิดบนจำนวนจริงและต่อจากนั้นจึงได้ ขยายไปบนปริภูมิที่ใหญ่ขึ้น ซึ่งในที่นี้กล่าวถึงเพียงปริภูมิเดียว นั่นคือ ปริภูมิอิงระยะทาง โดยยังได้กล่าว ถึงบทนิยามของบอลเปิด บอลปิด เซตเปิดและเซตปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง พร้อมทั้งได้ให้ข้อสังเกต ของการศึกษานบนปริภูมิยูคลิดและปริภูมิอิงระยะทาง และยิ่งไปกว่านั้น บนเซตของจำนวนจริงยังได้ กล่าวถึง เซตกระชับ จุดลิมิต จุดภายใน จุดภายนอก และส่วนปิดคลุมบนจำนวนจริงด้วย ทั้งนี้เพื่อให้ ผู้อ่านได้มีความรู้พื้นฐานของเซตกระชับ จุดลิมิตบนจำนวนจริงก่อนที่จะขยายไปศึกษาบนปริภูมิที่ ใหญ่ขึ้นต่อไปในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า S เป็นเซตย่อยปิดที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ แล้ว S จะมีค่าต่ำสุด
2. จงพิสูจน์ ทฤษฎีบท 2.4.2
3. จงพิสูจน์ตัวอย่าง 2.4.2
4. จงพิสูจน์ว่า บนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$
 - (4.1) อินเตอร์เซกชันของเซตปิดใดๆ เป็นเซตปิด
 - (4.2) ยูเนียนจำกัดของเซตปิดเป็นเซตปิด
5. กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และให้ $\lambda = \sup S$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lambda \notin S$ แล้ว λ เป็นจุดลิมิตของ S
6. กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}$ และกำหนดให้ λ เป็นจุดลิมิตและขอบเขตบนบน S จงพิสูจน์ว่า $\lambda = \sup S$

บทที่ 3

ลำดับของจำนวนจริง

ในบทนี้ จะเริ่มต้นด้วยการแนะนำนิยามของลำดับบนจำนวนจริง ซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้อ่านคุ้นเคยกันดีในทางคณิตศาสตร์ แต่ ณ ที่นี้ จะขอนำเสนอในแง่ของการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลำดับ จากนั้นจึงให้นิยามของลิมิตของลำดับบนจำนวนจริง และยังสามารถแสดงการพิสูจน์ของคุณสมบัติของลิมิตด้วย เช่น ลิมิตของผลบวกของลำดับ ลิมิตของผลคูณของลำดับ และลิมิตของผลหารของลำดับ เป็นต้น ซึ่งสมบัติเหล่านี้ได้ถูกนำไปใช้อยู่สม่ำเสมอในการคำนวณค่าของลิมิต ต่อจากนั้น ได้แนะนำให้ผู้อ่านได้รู้จัก ลำดับโคชีของจำนวนจริง ซึ่งเป็นลำดับที่ผู้อ่านควรต้องรู้จักโดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับผู้ที่ศึกษาทางคณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ เพราะลำดับโคชีมีความสัมพันธ์และเกี่ยวข้องกับหลายๆ ด้าน ยกตัวอย่างเช่น ทุกลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชี ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้า และทุกลำดับโคชีเป็นลำดับที่มีขอบเขต เป็นต้น สิ่งทีกล่าวนี้นี้เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นจริงบนเซตของจำนวนจริง แต่ยังมีคำถามต่อว่าบนปริภูมิอื่นๆ ความสัมพันธ์ทั้งหมดเหล่านี้ยังเป็นจริงหรือไม่ ขอยกตัวอย่างบนปริภูมิอิงระยะทาง ใดๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคชีเป็นจริงบนปริภูมิอิงระยะทาง แต่ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้านั้นอาจจะไม่เป็นจริงบนปริภูมิอิงระยะทาง นอกเสียจากจะเพิ่มบางเงื่อนไขเข้าไป และถ้าหากได้รับว่าทุกลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้าแล้วนั้นแสดงว่าปริภูมินั้นมีความบริบูรณ์ (completeness) ซึ่งความบริบูรณ์นี้เป็นเครื่องมือที่ดีเครื่องมือหนึ่งเลยก็ว่าได้เพราะทำให้ได้รับผลลัพธ์ที่น่าสนใจมากมาย ซึ่งผู้อ่านสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากเรื่องของปริภูมิอิงระยะทาง ดังนั้นจากที่กล่าวมาจะเห็นว่า เรื่องของลำดับโคชีจึงเป็นสิ่งที่สำคัญในการนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ และในหัวข้อสุดท้ายของบทนี้ ยังได้กล่าวถึงลำดับทางเดียวและลำดับย่อยบนจำนวนจริง โดยจากความรู้เรื่องสัจพจน์อันดับทำให้เราทราบว่า บนจำนวนจริงสามารถเปรียบเทียบจำนวนจริงสองจำนวนได้ ดังนั้นจึงจะกล่าวถึงนิยามของลำดับทางเดียว ลำดับลดทางเดียว ลำดับเพิ่มทางเดียว ลำดับเพิ่มโดยแท้ และลำดับลดโดยแท้ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบของลำดับของจำนวนจริงนั่นเอง ยิ่งไปกว่านั้น ในหัวข้อนี้ยังได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของลิมิตกับลำดับทางเดียว เช่น ถ้าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับทางเดียวและลำดับนั้นมีขอบเขตบนแล้วลำดับของจำนวนจริงดังกล่าวนี้จะลู่เข้าสู่ค่าซุพรีมัมของลำดับดังกล่าว และในทำนองเดียวกันถ้าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับทางเดียวและลำดับนั้นมีขอบเขตล่างแล้วลำดับของจำนวนจริงดังกล่าวนี้จะลู่เข้าสู่ค่าอินฟิมัมของลำดับดังกล่าวด้วย ดังนั้นจากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้จะกล่าวถึงและอธิบายอย่างละเอียดในหัวข้อนี้ โดยจะเริ่มต้นบทนี้ด้วยการให้นิยามของลำดับและลิมิตของลำดับก่อน

3.1 ลิมิตของลำดับ

ก่อนอื่นจะเริ่มจากการแนะนำนิยามของลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 3.1.1 ลำดับของจำนวนจริง (sequence of real number) คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ ($\mathbb{N}$) และมีเรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริง ($\mathbb{R}$)

หมายเหตุ จากบทนิยามสามารถเขียนได้ว่า กำหนดให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งนิยามโดย

$$f(n) = x_n$$

สำหรับ $x_n \in \mathbb{R}$ และทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และจะใช้สัญลักษณ์ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{x_n\}$ หรือ $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ แทนลำดับดังกล่าว

ต่อไปเป็นตัวอย่างของลำดับตามบทนิยามที่กล่าวมาข้างต้น

ตัวอย่าง 3.1.1 กำหนดให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$f(n) = 2n$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงบทนิยามของการลู่เข้าของลำดับและค่าลิมิตของลำดับ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.2 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า (converges) สู่จำนวนจริง x ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ N ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$

จากบทนิยาม 3.1.2 จะเรียก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ว่าเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) และเรียก x ว่าค่าลิมิต (limit value) ของลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และจะเขียนแทนด้วย

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ หรือ } \lim x_n = x \text{ เมื่อ } n \rightarrow \infty$$

และจะกล่าวว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence) ถ้า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิจารณาการลู่เข้าของลำดับ โดยใช้บทนิยาม 3.1.2

ตัวอย่าง 3.1.2 จะแสดงว่า ลำดับคงที่ $\{c, c, c, \dots\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ c เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

วิธีทำ จากกำหนดให้มีลำดับคงที่ c นั่นคือ $c, c, c, \dots$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เลือก $N = 1$ จะได้ว่า

$$|c - c| = 0 < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > 1$ ดังนั้นโดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่าลำดับคงที่ c ลู่เข้าสู่ c □

ตัวอย่าง 3.1.3 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีส ข้อ (4) จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{N} < \epsilon$$

สำหรับ $n > N$ จะเห็นว่า $\frac{1}{N} > \frac{1}{n}$ ดังนั้น

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ □

ตัวอย่าง 3.1.4 จงแสดงว่า $\left\{ \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} \right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}$

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีส ข้อ (4) จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 < \frac{1}{N} < \epsilon$$

ทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$ แล้ว $\frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{2n^2+2-2n^2-n-2}{2(2n^2+n+2)} \right| \\ &= \left| \frac{-n}{2(2n^2+n+2)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{n}{2n^2+n+2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{n}{2n^2+n} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{n}{2n^2} \right| \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{N} \\ &< \frac{1}{N} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \frac{1}{2}$ □

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการพิจารณาลำดับลู่ออกโดยใช้บทนิยาม 3.1.2 มาช่วยในการพิสูจน์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.5 จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก

วิธีทำ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง นั่นคือ สมมติให้ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า จะมี $x \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = x$$

ดังนั้น สำหรับ $\epsilon = \frac{1}{2} > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|(-1)^n - x| < \frac{1}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จะเห็นว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่แล้ว สำหรับทุกๆ $n > N$ จะได้ว่า

$$|1 - x| < \frac{1}{2}$$

และถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว สำหรับทุกๆ $n > N$ จะได้ว่า

$$|-1 - x| < \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2 &= |(1 - x) - (-1 - x)| \\ &\leq |1 - x| + |-1 - x| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก □

ส่วนต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญของการลู่เข้าของลำดับบนจำนวนจริง โดยเริ่มจากหากลำดับที่พิจารณามากกว่าหรือเท่ากับ 0 แล้วลิมิตของลำดับนั้นจะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ด้วยรายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ แล้ว $x \geq 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

ต้องการแสดงว่า $x \geq 0$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $x < 0$ จะได้ว่า

$$\frac{-x}{2} > 0$$

กำหนดให้ $\epsilon = \frac{-x}{2} > 0$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon = \frac{-x}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จะได้ว่า

$$-\left(\frac{x}{2}\right) < x_n - x < -\frac{x}{2}$$

ดังนั้น

$$\frac{3x}{2} < x_n < \frac{x}{2}$$

แต่จาก $x < 0$ ดังนั้น $\frac{x}{2} < 0$ จึงทำให้ได้ว่า $x_n < 0$ สำหรับ $n > N$ จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น จึงได้ว่า $x \geq 0$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่าสำหรับลำดับที่ลู่เข้าแล้วจะลู่เข้าสู่ค่าลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.1.2 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้วลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ จะมีลิมิตเพียงค่าเดียว

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ สำหรับบาง $x, y \in \mathbb{R}$

จะแสดงว่า $x = y$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $x \neq y$ จะได้ว่า

$$|x - y| > 0$$

กำหนดให้ $\epsilon = \frac{|x-y|}{2} > 0$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - y| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon \\ &= 2 \frac{|x - y|}{2} \\ &= |x - y| \end{aligned}$$

จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $x = y$ นั่นคือ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ มีลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น $\square$

ต่อไปจะเป็นบทพิสูจน์สำหรับลำดับที่เปรียบเทียบกันได้ 3 ลำดับที่กล่าวว่า ถ้าหากมีลำดับที่เปรียบเทียบกันได้ 3 ลำดับแล้วหากลำดับที่มากที่สุดและลำดับที่น้อยที่สุดลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันแล้ว ลำดับที่อยู่ระหว่างสองลำดับนั้นจะลู่เข้าสู่ค่าเดียวกันด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.3 กำหนดให้ลำดับ $x_n \leq y_n \leq z_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_n \leq y_n \leq z_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$

จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ นั่นคือ

$$-\epsilon < x_n - x < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|z_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ นั่นคือ

$$-\epsilon < z_n - x < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ ถ้าเลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$

$$-\epsilon < x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จะได้ว่า $|y_n - x| < \epsilon$ สำหรับทุกๆ $n > N$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$ $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของทฤษฎีบท 3.1.3

ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\frac{n-1}{n^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

วิธีทำ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$0 \leq \frac{n-1}{n^{n+1}} < \frac{n}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^n} < \frac{1}{n}$$

จาก $\{0, 0, \dots\}$ เป็นลำดับคงที่ ดังนั้นจึงลู่เข้าไปที่ 0 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1.3 จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^{n+1}} = 0$$

$\square$

ต่อไปจะกล่าวถึงลำดับที่มีขอบเขตซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.3 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence) ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้

$$|x_n| \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็น การแสดงว่าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยใช้บทนิยาม 3.1.3

ตัวอย่าง 3.1.7 จงพิสูจน์ว่าลำดับคงที่ $\{c, c, \dots\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ พิจารณาลำดับคงที่ $\{c, c, \dots\}$ จะเห็นว่า ถ้าเลือก $M = |c|$ จะได้ว่า

$$|x_n| = |c| \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.3 จะได้ว่า ลำดับคงที่ c เป็นลำดับที่มีขอบเขต $\square$

ตัวอย่าง 3.1.8 จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

วิธีทำ ถ้าเลือก $M = 2$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n^2}{n^2+1}\right| &\leq \left|\frac{2n^2}{n^2}\right| \\ &= |2| \\ &= 2 \\ &= M \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยบทนิยาม 3.1.3 จะได้ว่า ลำดับ $\left\{\frac{2n^2}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่า ทุกๆ ลำดับลู่เข้าบนเซตของจำนวนจริงนั้นจะเป็นลำดับที่มีขอบเขต

ทฤษฎีบท 3.1.4 ทุกๆ ลำดับลู่เข้าของจำนวนจริงเป็นลำดับที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าของจำนวนจริง จะได้ว่า จะมี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

จะแสดงว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

กำหนดให้ $\epsilon = 1 > 0$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|x_n - x| < 1$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} |x_n| &= |x_n - x + x| \\ &\leq |x_n - x| + |x| \\ &< 1 + |x| \end{aligned}$$

เลือก $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |x|\}$ จะได้ว่า $|x_n| \leq M$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต □

ต่อไปนี้จะยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 3.1.4 เนื่องจากตัวอย่าง 3.1.4 ได้แสดงแล้วว่าลำดับ $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2+n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นในตัวอย่างต่อไปจึงจะแสดงว่าลำดับดังกล่าวเป็นลำดับที่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 3.1.9 จงพิสูจน์ว่าลำดับ $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2+n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

วิธีทำ เลือก $M = \frac{1}{2}$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+n+2}\right| \leq \left|\frac{n^2+1}{2n^2+2n}\right| = \left|\frac{n^2+1}{2(n^2+n)}\right| = \frac{1}{2} = M$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.3 ทำให้ได้ว่า $\left\{\frac{n^2+1}{2n^2+n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต □

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นทำให้เห็นว่า ลำดับลู่ออกเป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่บทกลับไม่เป็นจริง นั่นคือ ลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่ออก ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1.10 จงแสดงว่า $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

วิธีทำ ถ้าเลือก $M = 1$ จะได้ว่า

$$|(-1)^n| = 1 \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.3 จะได้ว่า $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่ในตัวอย่าง 3.1.5 เราจะได้แสดงแล้วว่าลำดับ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก ตัวอย่างนี้จึงทำให้เห็นว่า ลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่ออก $\square$

ในส่วนถัดไป จะกล่าวถึงคุณสมบัติของลิมิตบนลำดับของจำนวนจริงซึ่งที่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างมากมายในทางด้านแคลคูลัส เช่น ค่าลิมิตของผลบวกของลำดับ ค่าลิมิตของผลคูณของลำดับ และค่าลิมิตของผลหารของลำดับ เป็นต้น ดังแสดงการพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.5 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ สำหรับบาง $x, y \in \mathbb{R}$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = cx$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
- (4) ถ้า $y_n \neq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$
- (5) ถ้า $y_n \neq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$
- (6) ถ้า $x_n \leq y_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $x \leq y$
- (7) $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$
- (8) ถ้า $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$
- (9) สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = x^k$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$

- (1) จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$
กำหนดให้ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $\frac{\epsilon}{2} > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุก $n > N_1$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุก $n > N_2$ เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x + y)| &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y$

(2) จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = cx$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$ แยกพิจารณา 2 กรณี

กรณี 1 ถ้า $c = 0$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

$$|cx_n - cx| = 0 < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = cx$

กรณี 2 ถ้า $c \neq 0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และ $|c| > 0$ จะเห็นว่า $\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{|c|}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ พิจารณา

$$\begin{aligned} |cx_n - cx| &= |c||x_n - x| \\ &< |c| \frac{\epsilon}{|c|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = cx$

(3) จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่อเข้า โดยทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ที่ทำให้

$$|x_n| \leq M$$

สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2(1 + |y|)}$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2M}$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned}
 |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\
 &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\
 &= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\
 &< |x_n| \frac{\epsilon}{2M} + |y| \frac{\epsilon}{2(1+|y|)} \\
 &\leq M \frac{\epsilon}{2M} + |y| \frac{\epsilon}{2(1+|y|)} \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = xy$

- (4) กำหนดให้ $y_n \neq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $y \neq 0$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$
กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ และ $|y| > 0$ จะได้ว่า $\frac{|y|}{2} > 0$ ดังนั้น
จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ ดังนั้น โดยบทแทรก 1.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$|y| - |y_n| \leq |y - y_n| = |y_n - y| < \frac{|y|}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$ ดังนั้น

$$|y_n| > \frac{|y|}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{1}{|y_n|} < \frac{2}{|y|}$$

และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ และ $\frac{\epsilon|y|^2}{2} > 0$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|y_n - y| < \frac{\epsilon|y|^2}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ และโดยทฤษฎีบท 1.2.2 จะได้ว่า สำหรับ

ทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y} \right| &= \left| \frac{y - y_n}{y_n y} \right| \\
 &= \frac{|y - y_n|}{|y_n y|} \\
 &= \frac{|y - y_n|}{|y_n| |y|} \\
 &= |y - y_n| \left(\frac{1}{|y_n|} \cdot \frac{1}{|y|} \right) \\
 &< \frac{\epsilon |y|^2}{2} \cdot \frac{2}{|y|} \cdot \frac{1}{|y|} \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$

- (5) กำหนดให้ $y_n \neq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $y \neq 0$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$
 เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ โดยข้อ (4) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$ และ
 จากข้อ (3) จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \frac{1}{y_n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} \\
 &= x \cdot \frac{1}{y} \\
 &= \frac{x}{y}
 \end{aligned}$$

- (6) สมมติให้ $x_n \leq y_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า $x \leq y$
 เนื่องจาก $x_n \leq y_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $y_n - x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จากข้อ
 (1) และทฤษฎีบท 3.1.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - x \geq 0$$

ดังนั้น $y \geq x$

- (7) จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$
 เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี
 $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ โดยบทแทรก 1.2.1 จะได้ว่า

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |x|$

(8) สมมติให้ $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

กรณี 1 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - 0| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ เนื่องจาก $x_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $N \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$x_n < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ นี้ทำให้ได้ว่า

$$|\sqrt{x_n} - 0| = \sqrt{x_n} < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 0$

กรณี 2 ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ เมื่อ $x > 0$ จะเห็นว่า

$$0 < \sqrt{x} \leq \sqrt{x_n} + \sqrt{x}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

จาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon\sqrt{x}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| &= \left| (\sqrt{x_n} - \sqrt{x}) \cdot \frac{(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})} \right| \\ &= \left| \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \right| \\ &= \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\ &\leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} \\ &< \frac{\epsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

จึงได้รับว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

(9) กำหนดให้ $k \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = x^k$

สมมติให้ $b_n = x_n - x$ จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ โดยทฤษฎีบททวินาม

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n c_r^n a^{n-r} b^r$$

เมื่อ $c_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(x_n)^k &= (b_n + x)^k \\ &= b_n^k + c_1^k(b_n)^{k-1}x + c_2^k(b_n)^{k-2}x^2 + \dots + c_{k-1}^k(b_n)x^{k-1} + x^k\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$(x_n)^k - x^k = b_n^k + c_1^k(b_n)^{k-1}x + c_2^k(b_n)^{k-2}x^2 + \dots + c_{k-1}^k(b_n)x^{k-1}$$

จาก $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((x_n)^k - x^k) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^k = x^k$

□

ต่อไปเป็นส่วนหนึ่งของตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 3.1.5 มาประยุกต์ใช้

ตัวอย่าง 3.1.11 จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+5n+3}$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+5n+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+5n+3} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2})} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{2+0}{1+0+0} \\ &= 2\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.1.12 จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n+1}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณา

$$\frac{2\sqrt{n}}{n+1} = 2 \left(\sqrt{\frac{n}{(n+1)^2}} \right)$$

เนื่องจาก

$$\frac{4n}{(n+1)^2} = 4 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ (9) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ ทำให้ได้

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ (8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{\frac{n}{(n+1)^2}} \\ &= 2\sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2}} \\ &= 2\sqrt{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปจะพิสูจน์ว่า สำหรับเซตปิดใดๆ ทุกๆ ลำดับลู่เข้าในเซตปิดนั้นจะลู่เข้าสู่จุดลิมิตในเซตปิดนั้น

ทฤษฎีบท 3.1.6 กำหนดให้ F เป็นเซตย่อยบนเซตจำนวนจริง จะได้ว่า F เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ลำดับลู่เข้าใน F จะมีจุดลิมิตอยู่ใน F

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ F เป็นเซตปิด และให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับใน F ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ สำหรับบาง $x \in \mathbb{R}$ จะแสดงว่า $x \in F$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $x \notin F$ จะได้ว่า $x \in \mathbb{R} \setminus F$ เนื่องจาก F เป็นเซตปิด ทำให้ได้ว่า $\mathbb{R} \setminus F$ เป็นเซตเปิด จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้

$$N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus F$$

และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า จะมีจำนวนนับ N ซึ่งทำให้

$$|x - x_n| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น $x_n \in N(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus F$ สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับใน F จึงทำให้ได้ว่า $x \in F$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ ทุกๆ ลำดับลู่เข้าใน F จะมีจุดลิมิตอยู่ใน F จะแสดงว่า F เป็นเซตปิด นั่นคือต้องแสดงว่า $\mathbb{R} \setminus F$ เป็นเซตเปิด จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $\mathbb{R} \setminus F$ ไม่เป็นเซตเปิด จะได้ว่า จะมี $x \in \mathbb{R} \setminus F$ ซึ่งทำให้

$$N(x, \epsilon) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus F$$

สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ ทำให้ได้ว่า

$$N\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F \neq \emptyset$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า สำหรับแต่ละจำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$ ใดๆ เลือก

$$x_n \in N\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F$$

ดังนั้น $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับใน F โดยสมมติฐาน จะได้ว่า สำหรับ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ แล้ว $x \in F$ จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับที่ $x \in \mathbb{R} \setminus F$ จึงทำให้ได้ว่า $\mathbb{R} \setminus F$ เป็นเซตเปิด นั่นคือ F เป็นเซตปิด $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นเครื่องมือช่วยในการพิจารณาลำดับลู่เข้าสู่ 0 โดยที่มีการให้สมมติฐานเกี่ยวกับลำดับที่มีขอบเขต รายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.7 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$

การพิสูจน์ สมมติให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเนื่องจาก $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้

$$|y_n| \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - 0| < \frac{\epsilon}{M}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น สำหรับ $n > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x_n y_n - 0| &= |x_n y_n| \\ &= |x_n| |y_n| \\ &= |x_n - 0| |y_n| \\ &< \frac{\epsilon}{M} \cdot M \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$ $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 3.1.7

ตัวอย่าง 3.1.13 จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\left(\frac{\cos(n)}{n^2}\right) = \cos(n) \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

เนื่องจาก $|\cos(n)| \leq 1$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ว่า $\{\cos(n)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และจากตัวอย่าง 3.1.3 จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ (9) จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.1.7 จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n) \left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = 0$ □

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีบทเกี่ยวกับการลู่อเข้าของลำดับ ถ้าทราบว่าลำดับหนึ่งลู่อเข้าสู่ 0 และมีการให้บางเงื่อนไขบนสองลำดับ แล้วจะได้ผลลัพธ์ว่าอีกลำดับหนึ่งจะเป็นลำดับลู่อเข้า ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.8 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงและ $x \in \mathbb{R}$ ถ้ามีจำนวนจริง $k > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| \leq k|y_n|$$

สำหรับทุกๆ $n > m$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

การพิสูจน์ กำหนดให้ มีจำนวนจริง $k > 0$ และ $m \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| \leq k|y_n|$$

สำหรับทุกๆ $n > m$ และกำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $\frac{\epsilon}{k} > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ จะได้ว่า จะมี $N' \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|y_n| = |y_n - 0| < \frac{\epsilon}{k}$$

สำหรับทุกๆ $n > N'$ และเลือก $N = \max\{m, N'\}$ จะได้ว่า ทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq k|y_n| \\ &< k \frac{\epsilon}{k} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ □

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1.8

ตัวอย่าง 3.1.14 จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{7n^2+1} = \frac{1}{7}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2-2}{7n^2+1} - \frac{1}{7} \right| &= \left| \frac{7(n^2-2) - (7n^2+1)}{7(7n^2+1)} \right| \\ &= \left| \frac{-15}{7(7n^2+1)} \right| \end{aligned}$$

จาก $7n^2+1 \geq 7n^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \frac{n^2-2}{7n^2+1} - \frac{1}{7} \right| &\leq \left| \frac{-15}{7} \right| \left| \frac{1}{7n^2+1} \right| \\ &= \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{7n^2+1} \\ &\leq \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{7n^2} \\ &= \frac{15}{49} \cdot \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

จาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.8 ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-2}{7n^2+1} = \frac{1}{7}$$

□

ต่อไปยังคงกล่าวถึงทฤษฎีบทของการลู่เข้าของลำดับ ซึ่งถูกนำไปใช้อย่างสม่ำเสมอ ยกตัวอย่างเช่น สำหรับจำนวนจริงซึ่ง $0 < c < 1$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ เป็นต้น โดยแสดงรายละเอียดในการพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.9 กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงที่เป็นบวก แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $c < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$

(2) ถ้า $c > 1$ แล้ว $\{c^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

การพิสูจน์ กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงที่เป็นบวก

(1) กำหนดให้ $c < 1$ โดยในที่นี้จะกำหนดให้ $c = \frac{1}{1+r}$ เมื่อ $r > 0$ โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$(1+r)^n \geq 1+nr \quad (\text{แบบฝึกหัด})$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |c^n - 0| &= c^n \\ &= \left(\frac{1}{(1+r)^n} \right) \\ &\leq \frac{1}{1+nr} \\ &\leq \frac{1}{nr} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{r} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.8 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$

- (2) กำหนดให้ $c > 1$ โดยในที่นี้จะกำหนดให้ $c = 1 + r$ เมื่อ $r > 0$ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$c^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr$$

ดังนั้น $\{1 + nr\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต ทำให้ได้ว่า $\{c^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

□

ทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงว่าถ้าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ โดยที่ $x_{n+1} < x_n$ สำหรับทุกๆ $x_n > 0$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ แล้วจะได้ว่าลำดับนี้ลู่เข้าสู่ 0 ซึ่งจะแสดงบทพิสูจน์ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.10 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $x_n > 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ หากค่าได้ ถ้า $L < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_n > 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ หากค่าได้ และ $L < 1$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

เนื่องจาก $L < 1$ โดยทฤษฎีบท 1.3.7 (ทฤษฎีบทของความหนาแน่นของจำนวนจริง) จะได้ว่า จะมี $c \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$L < c < 1$$

กำหนดให้ $\epsilon = c - L > 0$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = L$ ทำให้ได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ จะได้ว่า

$$-\epsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} - L < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ ดังนั้น

$$L - \epsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \epsilon$$

ทำให้ได้ว่า

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + (c - L) = c$$

สำหรับทุก $n > N$ ถ้าให้ $k = N + 1$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > k$ จะได้ว่า $n - 1 > N$ ดังนั้น

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < c$$

สำหรับทุก $n > k$ นั่นคือ

$$x_{n+1} < cx_n$$

สำหรับทุก $n > k$ จะเห็นว่า ทุก ๆ $n > k$

$$\begin{aligned}
 0 &< x_{n+1} \\
 &< cx_n \\
 &< c^2 x_{n-1} \\
 &< c^3 x_{n-2} \\
 &< c^4 x_{n-3} \\
 &< \dots \\
 &< c^{n-(k-1)} x_k \\
 &= \frac{c^n x_k}{c^{k-1}}
 \end{aligned}$$

เลือก $M = \frac{x_k}{c^{k-1}}$ จะได้ว่า

$$0 < x_{n+1} < Mc^n$$

สำหรับ ทุก $n > k$ เนื่องจาก $0 < c < 1$ โดยทฤษฎีบท 3.1.9 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ โดยที่

$$0 < x_{n+1} = |x_{n+1} - 0| \leq M|c^n|$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.8 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ □

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.1.10

ตัวอย่าง 3.1.15 จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2n!} = 0$

วิธีทำ ให้ $x_n = \frac{3^n}{2n!}$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{3^{n+1}}{2(n+1)!} \div \frac{3^n}{2n!} \\
 &= \frac{3^{n+1}}{2(n+1)!} \times \frac{2n!}{3^n} \\
 &= \frac{3}{n+1}
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0 < 1$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.1.10 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2n!} = 0$ □

จากที่กล่าวมาในตอนต้นได้กล่าวถึงลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก และในลำดับต่อไปนี้จะเป็นการกล่าวถึงลำดับที่ลู่ออกแต่จะเป็นกล่าวถึงลำดับที่ลู่เข้าไปยังค่าอนันต์ (∞) นั่นเอง ซึ่งมีบทนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1.4 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง M จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก $n > N$ แล้ว

$$x_n > M$$

และจะกล่าวว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง M จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้สำหรับทุก $n > N$ แล้ว

$$x_n < M$$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิสูจน์ว่าลำดับที่กำหนดให้นั้นลู่เข้าสู่นันต์ โดยใช้บทนิยาม 3.1.4

ตัวอย่าง 3.1.16 จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$

การพิสูจน์ กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $M \geq 0$ โดยสมบัติอาร์คิมิดีส (ทฤษฎีบท 1.3.6) ข้อ 2 จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $M < N$ ดังนั้นสำหรับทุก $n > N$ จะเห็นว่า

$$n > N > M$$

เนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ ทำให้ได้ว่า $x_n > M$ สำหรับทุก $n > N$ และถ้า $M < 0$ แล้วทุก $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n > N$ จะได้ว่า

$$n > N > M$$

เช่นเดียวกัน จึงทำให้ได้ว่า $x_n > M$ สำหรับทุก $n > N$ ดังนั้น จากทั้ง 2 กรณี จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

□

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลำดับที่ลู่เข้าสู่นันต์ โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงว่าถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ที่พิจารณานั้นลู่เข้าสู่ออนันต์แล้วค่าลิมิตของ $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ จะลู่เข้าสู่ศูนย์ ซึ่งแสดงการพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.11 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

กำหนดให้ $x_n > 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และสำหรับทุก $\epsilon > 0$ โดยบทนิยาม 3.1.4 จะได้ว่า สำหรับ $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุก $n > N$ แล้ว

$$x_n > M = \frac{1}{\epsilon}$$

จะได้ว่า $\frac{1}{x_n} < \epsilon$ ดังนั้น

$$\left| \frac{1}{x_n} - 0 \right| < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ จึงทำให้สรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

($\Leftarrow$) แบบฝึกหัด

□

ในทฤษฎีบทสุดท้ายในหัวข้อนี้ ยังได้แสดงว่าสำหรับสองลำดับที่เปรียบเทียบกันได้ สามารถนำมาช่วยในการพิจารณาการลู่เข้าและลู่ออกของลำดับได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1.12 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n \leq y_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

(2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x_n \leq y_n$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

(1) สมมติให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ โดยบทนิยาม 3.1.4 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $M \in \mathbb{R}$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$x_n > M$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ เนื่องจาก $x_n \leq y_n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$y_n > M$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ โดยบทนิยาม 3.1.4 จึงสรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$

(2) แบบฝึกหัด

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 3.1.12 มาประยุกต์ใช้

ตัวอย่าง 3.1.17 จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n-1} = +\infty$

การพิสูจน์ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\frac{n^2-1}{n-1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n-1} = n+1 > n$$

โดยตัวอย่าง 3.1.16 จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ โดยทฤษฎีบท 3.1.12 จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n-1} = +\infty$$

□

3.2 ลำดับโคซีและสมบัติของลำดับโคซี

ต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงลำดับอีกชนิดหนึ่งที่มักจะถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทางด้านการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ นั่นคือ ลำดับโคซี ซึ่งความน่าสนใจของลำดับนี้ก็คือ ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับโคซีและลำดับลู่เข้า ซึ่งก็คือ ทุกๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคซี โดยได้แสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทดังกล่าวไว้ด้วยในทฤษฎีบทที่ 3.2.1 ดังนั้น ในที่นี้จะขอเริ่มต้นด้วยการให้บทนิยามของลำดับโคซีก่อน จากนั้นจึงจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญต่างๆ ของลำดับโคซี พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์

บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี (Cauchy sequence) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x_m| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $m, n > N$

ต่อไปจึงจะขอแสดงตัวอย่างของลำดับโคซี โดยใช้บทนิยามข้างต้นในการพิสูจน์

ตัวอย่าง 3.2.1 จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $\frac{\epsilon}{2} > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.6 (สมบัติอาร์มีเดียน) ข้อ (4) จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุกๆ $m, n > N$ ดังนั้น

$$\left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \leq \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

โดยบทนิยาม 3.2.1 จึงได้ว่า $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี □

ตัวอย่าง 3.2.2 จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $\frac{\epsilon}{2} > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.6 (สมบัติอาร์มีเดียน) ข้อ (4) จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{\epsilon}{2}$$

พิจารณาสำหรับทุกๆ $m, n > N$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{m^2 + m - 1}{m^2} - \frac{n^2 + n - 1}{n^2} \right| &= \left| \frac{n^2(m^2 + m - 1) - m^2(n^2 + n - 1)}{m^2 n^2} \right| \\
 &= \left| \frac{n^2 m - n^2 - m^2 n + m^2}{m^2 n^2} \right| \\
 &= \left| \frac{n^2(m - 1) - m^2(n - 1)}{m^2 n^2} \right| \\
 &\leq \left| \frac{n^2(m - 1)}{m^2 n^2} \right| + \left| \frac{m^2(n - 1)}{m^2 n^2} \right| \\
 &= \left| \frac{m - 1}{m^2} \right| + \left| \frac{n - 1}{n^2} \right| \\
 &\leq \left| \frac{m}{m^2} \right| + \left| \frac{n}{n^2} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{m} \right| + \left| \frac{1}{n} \right| \\
 &< \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 3.2.1 จึงได้ว่า $\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี □

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญของหัวข้อนี้ นั่นคือ การแสดงว่าทุกๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคซี

ทฤษฎีบท 3.2.1 ทุกๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคซี

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ สำหรับบาง $x \in \mathbb{R}$ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ ดังนั้น จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ เพราะฉะนั้น สำหรับทุกๆ $m, n > N$ จะได้ว่า

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \text{ และ } |x_m - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_m| &= |x_n - x + x - x_m| \\
 &\leq |x_n - x| + |x_m - x| \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 3.2.1 สรุปได้ว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี □

ต่อไปจะพิจารณาการเป็นลำดับโคซีโดยใช้ทฤษฎีบท 3.2.1 นั่นคือ จะแสดงว่าลำดับที่พิจารณานั้นลู่เข้าแล้วจะได้รับผลลัพธ์ว่าลำดับดังกล่าวนี้เป็นลำดับโคซี

ตัวอย่าง 3.2.3 จงพิจารณาลำดับ $\left\{\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{\cos(n)}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ว่าเป็นลำดับโคซีหรือไม่

การพิสูจน์ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

จึงได้ว่า $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี ซึ่งจะเห็นว่าในตัวอย่าง 3.2.2 ก็ได้แสดงแล้วว่า $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี จึงเป็นไปตามทฤษฎีบท 3.2.1 และจากตัวอย่าง 3.1.12 และตัวอย่าง 3.1.13 ได้แสดงว่า $\left\{\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\left\{\frac{\cos(n)}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $\left\{\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\left\{\frac{\cos(n)}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี $\square$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับโคซีกับลำดับที่มีขอบเขต

ทฤษฎีบท 3.2.2 ทุกๆ ลำดับโคซีเป็นลำดับที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี และให้ $\epsilon = 1 > 0$ โดยบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x_m| < 1$$

สำหรับทุกๆ $m, n > N$ กำหนดให้ $n_0 = N + 1$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$

$$\begin{aligned}|x_n| &= |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \\ &\leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \\ &< 1 + |x_{n_0}|\end{aligned}$$

เลือก $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, 1 + |x_{n_0}|\}$ จะเห็นว่า

$$|x_n| \leq M$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยบทนิยาม 3.1.3 สรุปได้ว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.2.2

ตัวอย่าง 3.2.4 จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.2.2 ได้แสดงแล้วว่า $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี ต่อไปจึงจะแสดงว่า $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2+n-1}{n^2}\right| &= \left|1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right| \\ &\leq |1| + \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right| \\ &\leq 1 + 1 + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต □

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการแสดงว่าบทกลับของทฤษฎีบท 3.2.2 ไม่เป็นจริง นั่นก็คือจะแสดงว่าทุกๆ ลำดับที่มีขอบเขตไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับโคซี ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.5 จงแสดงว่า ลำดับ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตแต่ไม่เป็นลำดับโคซี

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.1.10 จะเห็นว่า $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะเห็นว่า ถ้า m ที่เป็นจำนวนคู่ และ n ที่เป็นจำนวนคี่ และเลือก $\epsilon = 1 > 0$ แล้ว

$$\begin{aligned}|(-1)^m - (-1)^n| &= |1 + 1| \\ &= 2 \\ &> 1\end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $m, n \in \mathbb{N}$ โดยบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ไม่เป็นลำดับโคซี □

ต่อไปจะเป็นคุณสมบัติทางพีชคณิตของลำดับโคซี ยกตัวอย่างเช่น สำหรับสองลำดับโคซีใดๆ บนเซตของจำนวนจริง เมื่อนำมาคูณกันยังคงเป็นลำดับโคซีและเมื่อนำมาบวกกันก็ยังคงเป็นลำดับโคซีอยู่ จะเห็นได้ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2.3 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี แล้ว $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

จะแสดงว่า $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

กำหนดให้ $\epsilon > 0$ และเนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุกๆ $m, n > N_1$ และเนื่องจาก $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|y_m - y_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุกๆ $m, n > N_2$ เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $m, n > N$

$$\begin{aligned} |(x_m + y_m) - (x_n + y_n)| &= |(x_m - x_n) + (y_m - y_n)| \\ &\leq |x_m - x_n| + |y_m - y_n| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

สำหรับการพิสูจน์ว่า $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี (แบบฝึกหัด) □

ต่อไปเราจะยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 3.2.3

ตัวอย่าง 3.2.6 จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{n^2+2n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

วิธีทำ พิจารณา สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{n^2} = \frac{n^2 + n - 1}{n^2} + \frac{1}{n}$$

จากตัวอย่าง 3.2.1 และตัวอย่าง 3.2.2 ทราบว่าลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\left\{\frac{n^2+n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

โดยทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\left\{\frac{n^2+2n-1}{n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซีด้วย □

ตัวอย่าง 3.2.7 จงแสดงว่าลำดับ $\left\{\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี

วิธีทำ พิจารณา สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{2\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{1}{n}$$

จากตัวอย่าง 3.2.1 และตัวอย่าง 3.2.3 จะเห็นว่า ลำดับ $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\left\{\frac{2\sqrt{n}}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี โดย

ทฤษฎีบท 3.2.3 จะได้ว่า $\left\{\frac{2}{\sqrt{n(n+1)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี □

3.3 ลำดับทางเดียวและลำดับย่อย

ต่อไปจะยังคงนำเสนอเกี่ยวกับลักษณะของลำดับ โดยในที่นี้จะกล่าวถึงบทนิยามของลำดับทางเดียวและลำดับย่อยบนเซตของจำนวนจริง พร้อมทั้งกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลำดับทางเดียว และจากหัวข้อก่อนหน้าเราได้แสดงว่าทุกๆ ลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคซี จึงเกิดคำถามตามมาว่าแล้วบนเซตของจำนวนจริงลำดับโคซีจะเป็นลำดับลู่เข้าด้วยหรือไม่ (นั่นคือ บทกลับเป็นจริงหรือไม่นั่นเอง) ในหัวข้อนี้จึงได้แสดงว่าบนเซตของจำนวนจริงลำดับโคซีจะเป็นลำดับลู่เข้า โดยได้แสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทดังกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 3.3.6 นี้ และยิ่งไปกว่านั้น ในส่วนนี้ยังได้แสดงอีกว่า สำหรับลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตบน (ขอบเขตล่าง) จะได้ว่าเป็นลำดับลู่เข้าและมีค่าลิมิตเป็นค่าซุพรีมัม (อินฟิมัม) ของลำดับนั้นด้วย

ในที่นี้ จะเริ่มต้นในส่วนนี้ด้วยการกล่าวถึงบทนิยามของคำว่า ลำดับทางเดียวของจำนวนจริง

บทนิยาม 3.3.1 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า

- (1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียว (monotone increasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$$x_n \leq x_{n+1}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

- (2) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$$x_n < x_{n+1}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

- (3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียว (monotone decreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$$x_n \geq x_{n+1}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

- (4) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดโดยแท้ (strictly decreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ

$$x_n > x_{n+1}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

- (5) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence) ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียวหรือลำดับลดลงทางเดียวอย่างใดอย่างหนึ่ง

ต่อไปขอยกตัวอย่างของลำดับทางเดียว โดยจะพิจารณาตามบทนิยาม 3.3.1 ที่ได้ให้ไว้ในข้างต้น

ตัวอย่าง 3.3.1 จงแสดงว่า ลำดับ $\left\{\frac{3^n}{(n+1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียว

การพิสูจน์ จากโจทย์จะเห็นว่า $x_n = \frac{3^n}{(n+1)!}$ และเนื่องจาก $1 \geq \frac{3}{n+2}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{3^n}{(n+1)!} \\ &\geq \frac{3^n}{(n+1)!} \cdot \frac{3}{n+2} \\ &= \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} \\ &= x_{n+1} \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า $\left\{\frac{3^n}{(n+1)!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียว

□

ตัวอย่าง 3.3.2 กำหนดให้ $x_1 = 10$ และ $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - 1)$ จงแสดงว่าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับทางเดียว

วิธีทำ กำหนดให้ $x_1 = 10$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x_2 &= x_{1+1} = \frac{1}{2}(x_1 - 1) = \frac{1}{2}(10 - 1) = \frac{9}{2} = 4.5 \\x_3 &= x_{2+1} = \frac{1}{2}(x_2 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 1\right) = \frac{7}{4} = 1.75 \\x_4 &= x_{3+1} = \frac{1}{2}(x_3 - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} - 1\right) = \frac{3}{8} = 0.375 \\&\vdots\end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $x_n \geq x_{n+1}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับลดลงทางเดียว □

จากตัวอย่าง 3.3.2 จะเห็นว่าลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับที่เกิดจากลำดับที่เกิดขึ้นมาก่อน โดยจะกำหนดพจน์แรกของลำดับมาให้ ซึ่งจะเรียกลำดับลักษณะนี้ว่า ลำดับทำซ้ำ (iterative sequence) และเรียก x_1 ว่า ค่าเริ่มต้น (initial value)

ต่อไปจะแสดงการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่มีความสัมพันธ์กันระหว่างลำดับทางเดียวและการลู่เข้า โดยหากทราบว่าลำดับที่พิจารณาเป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตแล้วจะสามารถบอกได้ว่าลำดับนั้นลู่เข้า และยิ่งไปกว่านั้นยังสามารถบอกค่าของลิมิตของลำดับดังกล่าวได้ด้วย ดังทฤษฎีบทสองทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้า $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียวและมีขอบเขตบน แล้ว $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับลู่เข้าและ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียวและเป็นลำดับที่มีขอบเขตบน และให้

$$A = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

เนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตบน ดังนั้น A เป็นเซตที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความสมบูรณ์ จะได้ว่า จะมี $L \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $L = \sup A$ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x_N \in A$ และ

$$L - \epsilon < x_N \leq L$$

เนื่องจาก $L = \sup A$ จะได้ว่า $x_n \leq L$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และเนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียว จะได้ว่า ถ้า $n > N$ แล้ว

$$L - \epsilon < x_N \leq x_n \leq L < L + \epsilon$$

ดังนั้น

$$|x_n - L| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L = \sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ □

ทฤษฎีบท 3.3.2 ถ้า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียวและมีขอบเขตล่างแล้ว $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าและ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด (คำแนะนำ แสดงทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.3.1) □

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างที่สอดคล้องกับทฤษฎีบท 3.3.1

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\left\{\frac{n^2-1}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $x_n = \frac{n^2-1}{2n^2}$ จะได้ว่า

$$\sup\left\{\frac{n^2-1}{2n^2} | n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{1}{2}$$

และจาก $\frac{1}{2n^2} \geq \frac{1}{2(n+1)^2}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$x_n = \frac{n^2-1}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-1}{2(n+1)^2} = x_{n+1}$$

จะเห็นได้ว่า $x_n = \frac{n^2-1}{2n^2}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียว โดยทฤษฎีบท 3.3.1 จะได้ผลลัพธ์ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2} = \sup\left\{\frac{n^2-1}{2n^2} | n \in \mathbb{N}\right\} = \frac{1}{2}$$

□

จากทฤษฎีบท 3.1.4 ได้แสดงแล้วว่าลำดับลู่เข้าเป็นลำดับที่มีขอบเขตและจากทฤษฎีบท 3.3.1 และทฤษฎีบท 3.3.2 ก็ได้แสดงว่าลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตเป็นลำดับที่ลู่เข้า จากที่กล่าวมาข้างต้นจึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่สำคัญตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

บทแทรก 3.3.1 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับทางเดียวของจำนวนจริง จะได้ว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) จะแสดงว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ซึ่งได้รับโดยตรงจากทฤษฎีบท 3.1.4

($\Leftarrow$) จะต้องแสดงว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า จากทฤษฎีบท 3.3.1 และทฤษฎีบท 3.3.2 จะทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามที่ต้องการ □

ยิ่งไปกว่านั้น ในบทแทรกต่อไปยังได้แสดงอีกว่า หากลำดับที่พิจารณานั้นเป็นลำดับเพิ่มหรือลดลงทางเดียวซึ่งไม่มีขอบเขตแล้วลำดับนั้นจะเข้าสู่ค่าอนันต์ ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

บทแทรก 3.3.2 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับบนจำนวนจริง แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตและเป็นลำดับเพิ่มขึ้น แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$
- (2) ถ้า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตและเป็นลำดับลดลง แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

จากบทแทรก 3.3.2 จึงขอยกตัวอย่างเพื่อความเข้าใจของผู้เรียนดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาค่าลิมิตของลำดับ $\{n^2 + 2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$

การพิสูจน์ สำหรับทุกๆ $M \in \mathbb{R}$ โดยสมบัติของอาร์คิมิดีส ข้อ (2) จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$M < n < n^2 < n^2 + 2n + 1 = |n^2 + 2n + 1|$$

โดยบทนิยาม 3.1.3 จะได้ว่า $\{n^2 + 2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต และจาก $\{n^2 + 2n + 1\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้น ดังนั้น โดยบทแทรก 3.3.2 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 2n + 1) = +\infty$$

□

ในส่วนถัดไป จะขอแนะนำลำดับย่อยเพราะว่าในการพิจารณาลำดับนั้น การพิจารณาบางอย่างอาจจะไม่จำเป็นต้องนำลำดับทั้งหมดมาพิจารณา เราสามารถที่จะนำส่วนหนึ่งของลำดับมาใช้ในการพิจารณาก็ทำได้ผลลัพธ์ตามต้องการได้ ดังนั้น จึงขอแนะนำให้ผู้อ่านได้รู้จักลำดับย่อยก่อน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.2 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และให้ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนนับซึ่ง $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ จะเรียกลำดับ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ว่าเป็นลำดับย่อย (subsequence) ของลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

ต่อไปจะขอยกตัวอย่างของลำดับย่อยตามบทนิยามที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น

ตัวอย่าง 3.3.5 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ จงยกตัวอย่างของลำดับย่อยของลำดับดังกล่าว

วิธีทำ จาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้

$$\begin{aligned} \{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} &= \left\{\frac{1}{2i}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right\} \\ \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} &= \left\{\frac{1}{2j+1}\right\}_{j=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\right\} \\ \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} &= \left\{\frac{1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots\right\} \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}, \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}, \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ และยังมีอีกหลายแบบที่เป็นลำดับย่อยของ $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ อีก

□

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลำดับย่อย โดยจะแสดงว่าหากลำดับที่พิจารณานั้นลู่เข้าแล้วลำดับย่อยของลำดับดังกล่าวจะลู่เข้าสู่ค่าเดียวกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.3 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ แล้ว สำหรับทุกๆ ลำดับย่อยของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ จะลู่เข้าสู่ x

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ และ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - x| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$

ต่อไปเราจะแสดงว่า ถ้า $n_k < n_{k+1}$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ แล้ว $n_k \geq k$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งจะพิสูจน์โดยการใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สมมติให้ $P(n)$ แทนข้อความ "ถ้า $n_k < n_{k+1}$ แล้ว $n_k \geq k$ "

1. จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง จะเห็นว่า ถ้า $n_1 < n_2$ แล้ว $n_1 \geq 1$ เป็นจริงเสมอ จึงทำให้ได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง
2. ต่อไปสมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ ถ้า $n_k < n_{k+1}$ แล้ว $n_k \geq k$ จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง
เนื่องจาก $n_k \geq k$ และ $n_k < n_{k+1}$ จึงเห็นได้ชัดแน่นอนว่า $n_{k+1} \geq k+1$ ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักการใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงทำให้ได้ว่า ข้อความนี้เป็นจริง ถ้า $n_k < n_{k+1}$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ แล้ว $n_k \geq k$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จากที่พิสูจน์ข้างต้น จึงทำให้ได้ว่า สำหรับ $k > N$ จะได้ว่า $n_k \geq k > N$ ทำให้ได้รับว่า

$$|x_{n_k} - x| < \epsilon$$

นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ □

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกรณำทฤษฎีบท 3.3.3 มาช่วยในการพิจารณาการลู่เข้าของลำดับโดยใช้การพิจารณาจากลำดับย่อยนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.3.6 จงพิจารณาว่า ลำดับ $\{(-1)^n(2n)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

การพิสูจน์ เนื่องจาก $\{(-1)^n(2n)\}_{n=1}^{\infty} = \{-2, 4, -6, 8, -10, 12, \dots\}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เลือกลำดับย่อย

$$\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 8, 12, \dots\} = \{4n\}_{n=1}^{\infty}$$

พิจารณาลำดับ $n \leq 4n$ โดยตัวอย่าง 3.1.16 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ โดยทฤษฎีบท 3.1.12 จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4n = +\infty$$

เนื่องจาก $\{4n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{(-1)^n(2n)\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{4n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก โดยทฤษฎีบท 3.3.3 โดยการแย้งกลับที่จะได้ว่า ถ้ามีลำดับย่อยของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้าแล้ว $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ไม่ลู่เข้า จึงทำให้ได้ว่า $\{(-1)^n(2n)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก □

ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ว่าถ้าลำดับย่อยของลำดับที่พิจารณานั้นลู่เข้าสู่ลิมิตที่แตกต่างกันแล้ว ลำดับดังกล่าวนั้นจะเป็นลำดับที่ลู่ออก ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.4 กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้ามีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ x และมีลำดับย่อย $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ ของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้าสู่ y และ $x \neq y$ แล้ว $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก

การพิสูจน์ กำหนดให้ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ และ $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ ของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \text{ และ } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_j} = y$$

และ $x \neq y$ จะแสดงว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3.3 จะได้ว่า ทุกๆ ลำดับย่อยของ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าและลู่เข้าไปยังลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $x \neq y$ ดังนั้น $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 3.3.4

ตัวอย่าง 3.3.7 จงพิจารณาลำดับ $\left\{(-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าหรือลู่ออก

การพิสูจน์ เนื่องจากลำดับที่กำหนดให้ ทำให้ได้ว่า

$$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{2i^2+1}{i^2}\right\}_{i=1}^{\infty} \text{ และ } \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \left\{-\frac{2k^2+1}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

เป็นลำดับย่อยของ

$$\left\{(-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

เนื่องจาก

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{2i^2+1}{i^2}\right) = 2$$

และ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{2k^2+1}{k^2}\right) = -2$$

โดยทฤษฎีบท 3.3.4 จะได้ว่า $\left\{(-1)^n \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่ลู่ออก $\square$

ต่อไปจะแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่ว่า ทุกลำดับโคซีของจำนวนจริงเป็นลำดับที่ลู่เข้า แต่ในการทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ต้องใช้ความรู้และทฤษฎีบทที่นำมาใช้ในการพิสูจน์เป็นทฤษฎีบทซึ่งเกี่ยวข้องกับลำดับย่อย โดยเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่เป็นที่รู้จักกันดี นั่นคือ ทฤษฎีบทโบซาโน-ไวแยร์สตราสส์สำหรับลำดับ ดังจะกล่าวถึงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.5 [ทฤษฎีบทโบซาโน-ไวแยร์สตราสส์สำหรับลำดับ (Bolzano-Weierstrass theorem for sequences)] กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริง จะได้ว่า จะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าของลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยเซตจำกัด โดยสมมติว่า $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ประกอบด้วยสมาชิก 3 ตัว คือ a, b และ c และเป็นเซตต่อไปนี้

$$\{n : x_n = a\}, \{n : x_n = b\}, \{n : x_n = c\}$$

แล้วหนึ่งในเซตข้างต้นมีสมาชิกจำนวนอนันต์ ถ้าสมมติว่า $\{n : x_n = c\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิกจำนวนอนันต์และพิจารณาลำดับย่อย $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ซึ่งทำให้

$$x_{n_i} = c$$

และ $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ แล้ว $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ จะได้ว่า $x_{n_i} \rightarrow c$

ต่อไปจะพิจารณาว่า $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ประกอบด้วยเซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์

เนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะมีจำนวนจริง b และ d ซึ่งทำให้ $b \leq a_n \leq d$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เลือก $c = \frac{1}{2}(d-b)$ แล้ว ช่วงปิดใดช่วงปิดหนึ่งของ $[b, c]$ และ $[c, d]$ บรรจุสมาชิกจำนวนอนันต์ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ถ้า $[b, c]$ บรรจุสมาชิกจำนวนอนันต์ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เราจะเลือก $b_1 = b$ และ $d_1 = c$ และถ้า $[c, d]$ บรรจุสมาชิกจำนวนอนันต์ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ เราจะเลือก $b_1 = c$ และ $d_1 = d$ ดังนั้น จึงเลือกสมาชิก x_{n_1} ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ โดยที่ $x_{n_1} \in [b_1, d_1]$

ต่อไปสำหรับ $[b_1, d_1]$ นิยามว่า $c_1 = \frac{1}{2}(d_1 - b_1)$ ดังนั้น ช่วงปิดใดช่วงปิดหนึ่งของ $[b_1, c_1]$ และ $[c_1, d_1]$ บรรจุสมาชิกจำนวนอนันต์ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ในที่นี้จึงขอสมมติให้ $[b_1, c_1]$ บรรจุสมาชิกจำนวนอนันต์ จึงเลือก $b_2 = b_1$ และ $d_2 = c_1$ และนิยาม $[b_2, d_2]$ ดังนั้นจึงเลือกสมาชิก x_{n_2} ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ ด้วย $n_1 < n_2$ ซึ่ง $x_{n_2} \in [b_2, d_2]$ และ $x_{n_2} \neq x_{n_1}$ ต่อจากนั้นจะนิยาม $[b_3, d_3]$ และเลือก x_{n_3} ของ $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ โดยที่ $n_1 < n_2 < n_3$ ซึ่ง $x_{n_3} \in [b_3, d_3]$ และ $x_{n_3} \neq x_{n_2}$ และ $x_{n_3} \neq x_{n_1}$ โดยขั้นตอนวิธีดังกล่าวนี้ จะเลือกลำดับของช่วงปิด

$$[b, d] \supset [b_1, d_1] \supset [b_2, d_2] \supset [b_3, d_3] \supset \dots \supset [b_n, d_n] \supset \dots$$

และ $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ ซึ่งทำให้ $x_{n_1} \in [b_1, d_1], x_{n_2} \in [b_2, d_2], \dots$ จึงทำให้ได้ว่า

$$b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq d, d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq b$$

และ

$$b_k \leq x_{n_k} \leq d_k$$

สำหรับ $k = 1, 2, 3, \dots$ ยิ่งไปกว่านั้น เนื่องจาก

$$d_k - b_k = \frac{1}{2^k}(d - b) \rightarrow 0$$

เมื่อ $k \rightarrow \infty$ โดยทฤษฎีบท 3.3.1 และทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า จะมี x_0 ซึ่งทำให้

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = x_0$$

แต่ในความเป็นจริงแล้ว จากทฤษฎีบท 3.3.1 และทฤษฎีบท 3.3.2 จะได้ว่า จะมี x_0 และ y_0 ซึ่งทำให้ $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x_0$ และ $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = y_0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |x_0 - y_0| &\leq |x_0 - b_k| + |b_k - d_k| + |d_k - y_0| \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x_0 = y_0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.3 จะได้ว่า

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$$

□

ทฤษฎีบท 3.3.6 ทุกลำดับโคซีของจำนวนจริงเป็นลำดับลู่เข้า

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

ในสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงอีกหนึ่งใจความหลักของเรื่องลิมิต นั่นคือ ลิมิตซูพีเรียร์ และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับของจำนวนจริง โดยในที่นี้จะขอแนะนำนิยามของลิมิตซูพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับของจำนวนจริง และบางคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของลิมิตซูพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับของจำนวนจริง ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.3 กำหนดให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และให้

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ เป็นลิมิตของบางลำดับย่อย } \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ ของ } \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\}$$

จะนิยาม *ลิมิตซูพีเรียร์ (limit superior)* ของลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ คือ ค่าของ $\sup S$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง และเขียนแทนด้วย

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup S$$

และจะนิยาม *ลิมิตอินฟีเรียร์ (limit inferior)* ของลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ คือ ค่าของ $\inf S$ ซึ่งเป็นจำนวนจริง และเขียนแทนด้วย

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf S$$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตซูพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์

ทฤษฎีบท 3.3.7 กำหนดให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ถ้า $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$ และ $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$ แล้ว สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$I - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$ และ $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$ และจำนวนจริง $\epsilon > 0$

สมมติว่ามี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a_n \geq L + \epsilon$ เป็นจำนวนอนันต์ จะได้ว่า จะมีลำดับของจำนวนนับ $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ซึ่งทำให้

$$a_{n_k} \geq L + \epsilon$$

สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ทำให้ได้ว่า $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า จะมีลำดับย่อย $\{a_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ ของลำดับ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ เป็น

ลำดับลู่อเข้า โดยกำหนดให้ $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}} = x$ เนื่องจาก $\{a_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ทำให้ได้ว่า $x \in S$ ตามบทนิยาม 3.3.3 และเนื่องจาก $a_{n_k} \geq L + \epsilon$ จึงทำให้

$$x \geq L + \epsilon$$

จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $L = \sup S$ ดังนั้น จะมี $n \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนจำกัด ซึ่งทำให้ $a_n \geq L + \epsilon$ และทำให้ได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$a_n < L + \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N_1$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$I - \epsilon < a_n$$

สำหรับทุกๆ $n > N_2$ กำหนดให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า

$$I - \epsilon < a_n < L + \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$

□

จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามมาดังต่อไปนี้

บทแทรก 3.3.3 กำหนดให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ โดยทฤษฎีบท 3.3.3 จะได้ว่า ทุกๆ ลำดับย่อยของ a_n จะลู่อเข้าสู่ A นั่นคือ $S = \{A\}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \sup S = A = \inf S = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$ โดยทฤษฎีบท 3.3.7 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$A - \epsilon < a_n < A + \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|a_n - A| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

□

3.4 บทสรุป

จากที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ ได้เริ่มต้นจากการให้บทนิยามของลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้จักกันดีในรายวิชาทางด้านแคลคูลัส และต่อจากนั้นจึงนำเสนอบทนิยามของการลู่อเข้าของลำดับ พร้อมยกตัวอย่างของลำดับลู่อเข้าและแสดงวิธีพิสูจน์โดยใช้บทนิยามการลู่อเข้าของลำดับ ยิ่งไปกว่านั้น ยังได้

นำเสนอบทพิสูจน์ของคุณสมบัติของลิมิตของลำดับ ซึ่งถูกนำไปใช้ในการประยุกต์ใช้อยู่เสมอ โดยอีกสิ่งหนึ่งที่น่าสนใจในบทนี้คือ การแนะนำลำดับอีกชนิดหนึ่งซึ่งเป็นลำดับที่สำคัญในการนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทางการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ นั่นคือ ลำดับโคซี โดยทฤษฎีบทที่มักจะถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ก็คือ สำหรับลำดับโคซีจะเป็นลำดับที่มีขอบเขต และทุกๆ ลำดับลู่อเข้าเป็นลำดับโคซี และยิ่งไปกว่านั้น ลำดับโคซียังได้ถูกนำไปใช้ในการพิจารณาความบริบูรณ์ ซึ่งจะถูกศึกษาในระดับที่สูงขึ้น และถ้าหากเซตที่พิจารณาเป็นเซตของจำนวนจริงแล้ว ทุกๆ ลำดับโคซีเป็นลำดับลู่อเข้าด้วย แต่สำหรับบนปริภูมิอื่นๆ หากเป็นลำดับโคซีแล้วอาจจะไม่ลู่อเข้าก็ได้ และในหัวข้อสุดท้ายของบทนี้ เราได้กล่าวถึงลักษณะของลำดับทางเดียวและลำดับย่อย พร้อมทั้งมียกตัวอย่างประกอบ และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องของลำดับทางเดียวและสุดท้ายนี้ ได้แนะนำให้ผู้อ่านได้ทราบถึงลิมิตซูเปอร์เรียร์และลิมิตอินฟิเรียร์ของลำดับด้วย

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ เมื่อ $k \in I^+$
2. จงหาลิมิตของลำดับ $\{\frac{1}{n^k}\}_{n=1}^{\infty}$ สำหรับ $k \in \mathbb{N}$
3. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-7}{2n^3-5}$
4. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
5. จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$
6. จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$
7. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!}$
8. กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (บทกลับของทฤษฎีบท 3.1.11)
9. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1.12 ข้อ 2.
10. จงพิสูจน์ว่า ถ้ากำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ และ $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี แล้ว $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคซี
11. จงพิสูจน์ว่า $(1+r)^n \geq 1+nr$ เมื่อ $r > 0$ และ n เป็นจำนวนนับ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
12. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.6 (ข้อเสนอแนะ: ใช้ทฤษฎีบท 3.2.2 และทฤษฎีบท 3.3.5)
13. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|x| < 1$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

14. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ (ข้อเสนอแนะ: ให้ $b_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ และใช้ทฤษฎีบททวินาม)
15. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.2

บทที่ 4

ลิมิตของฟังก์ชัน

จากการศึกษาในบทที่ 3 นั้น ได้กล่าวถึงเรื่องของลิมิตแต่เป็นลิมิตของลำดับบนเซตของจำนวนจริงเท่านั้น ซึ่งโดยทั่วไปเรื่องของลิมิตจะมีเนื้อหาที่ค่อนข้างมาก และนำไปประยุกต์ใช้งานหลายด้าน แต่พื้นฐานความรู้แค่ลิมิตของลำดับยังคงไม่เพียงพอ ในบทนี้จึงจะกล่าวถึงการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งในการศึกษาลิมิตของลำดับ (ในบทที่ 3) นั้นจะเป็นเพียงแค่กรณีเฉพาะกรณีหนึ่งของลิมิตของฟังก์ชันเท่านั้น ดังจะเห็นได้จากการนิยามของลำดับว่า ลำดับเป็นเพียงฟังก์ชันชนิดหนึ่งเท่านั้น ดังนั้น ในบทนี้จึงขอเริ่มจากการกล่าวถึงนิยามของลิมิตของฟังก์ชัน พร้อมยกตัวอย่างการหาลิมิตของฟังก์ชันโดยพิจารณาจากการใช้บทนิยามของลิมิต นำเสนอคุณสมบัติต่างๆ ของลิมิตฟังก์ชันพร้อมบทพิสูจน์ของคุณสมบัติเหล่านั้นและได้ให้บทนิยามของฟังก์ชันที่มีขอบเขต และยังคงกล่าวถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่าลิมิตกับฟังก์ชันที่มีขอบเขตโดยได้แสดงไว้ในทฤษฎีบท 4.1.2 นอกจากนี้ ยังทราบกันดีว่าในการพิจารณาค่าของลิมิตทางการคำนวณหรือในทางแคลคูลัสนั้น สามารถพิจารณาได้จากค่าลิมิตทางซ้าย (ทางลบ) และค่าลิมิตทางขวา (ทางบวก) โดยพิจารณาว่าถ้าค่าลิมิตทางซ้ายมีค่าเท่ากับค่าลิมิตทางขวา จะทำให้สรุปได้ว่า ค่าลิมิตนั้นจะลู่เข้า ในส่วนนี้จึงได้เขียนบทพิสูจน์ของข้อความดังกล่าวไว้ในทฤษฎีบท 4.2.1 พร้อมทั้งแนะนำการลู่เข้าของลิมิตของฟังก์ชันทางซ้ายและทางขวา และในส่วนสุดท้ายของบทนี้ ยังได้กล่าวถึงลิมิตที่อนันต์ และลิมิตค่าอนันต์ของฟังก์ชัน พร้อมทั้งทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง ทั้งนี้เพื่อให้ผู้อ่านได้มีความรู้พื้นฐานในเรื่องของลิมิตอย่างครบถ้วน โดยเป้าหมายของการศึกษาในหัวข้อนี้มีความมุ่งหวังที่จะให้ผู้อ่านได้เห็นที่มาและการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ที่ผู้อ่านได้เคยนำความรู้เหล่านั้นไปใช้ในการคำนวณทางแคลคูลัสมาโดยตลอด และผู้อ่านจะได้ทราบถึงสิ่งที่ควรต้องคำนึงถึงในการนำทฤษฎีบทต่างๆ เหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อจะใช้คุณสมบัติของลิมิต $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ต้องทราบก่อนว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ หาค่าลิมิตได้ จึงจะนำคุณสมบัตินี้ไปใช้ได้ เป็นต้น

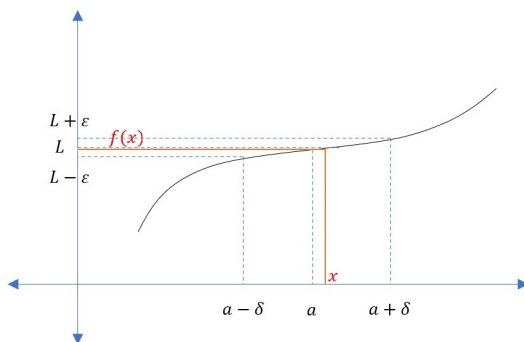
4.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

การเริ่มต้นในหัวข้อนี้ จะขอกล่าวถึงบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันก่อน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า L เป็นค่าลิมิตของ f ที่จุด a (limit of f at a) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

ซึ่งเขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ดังรูป 4.1

รูปที่ 4.1: ค่าลิมิตของ f ที่จุด a

จากบทนิยาม 4.1.1 ยังสามารถเขียนได้อีกอย่างว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละย่านใกล้เคียง $N(L, \epsilon)$ ของจุด L จะต้องมีย่านใกล้เคียง $N^*(a, \delta)$ ของจุด a ซึ่งทำให้ ถ้า $x \in N^*(a, \delta)$ แล้ว $f(x) \in N(L, \epsilon)$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิจารณาค่าของลิมิต โดยใช้บทนิยาม 4.1.1 มาใช้ในการพิสูจน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1.1 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-25}{x-5} = 8$ เมื่อ $x \neq 5$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $\delta = \epsilon$ จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - 3| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left| \frac{x^2 - 25}{x - 5} - 8 \right| \\ &= \left| \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} - 8 \right| \\ &= |x + 5 - 8| \\ &= |x - 3| \\ &< \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-25}{x-5} = 8$ □

ตัวอย่าง 4.1.2 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2+3x+1}{x+1} \right) = -1$ เมื่อ $x \neq -1$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ จะได้ว่า ถ้า $0 < |x + 1| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left| \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} - (-1) \right| \\ &= \left| \frac{(2x + 1)(x + 1)}{x + 1} - (-1) \right| \\ &= |2x + 1 + 1| \\ &= |2x + 2| \\ &= 2|x + 1| \\ &< 2\delta \\ &= 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1} \right) = -1$ เมื่อ $x \neq -1$ □

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะพิสูจน์ว่า ฟังก์ชันที่มีค่าลิมิตนั้นจะมีค่าลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 4.1.1 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = R$ แล้ว $L = R$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = R$ จะแสดงว่า $L = R$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $L \neq R$ และให้ $\epsilon = \frac{|L - R|}{2} > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ โดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta_1 \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = R$ โดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ แล้ว } |f(x) - R| < \epsilon$$

เราเลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ดังนั้น สำหรับ $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |L - R| &= |L - f(x) + f(x) - R| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - R| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon \\ &= 2 \cdot \frac{|L - R|}{2} \\ &= |L - R| \end{aligned}$$

จึงเกิดข้อขัดแย้ง จึงทำให้ได้ว่า $L = R$ □

ต่อไปจะเป็นการให้บทนิยามของฟังก์ชันที่มีขอบเขต ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1.2 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ จะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (bounded function) บนเซต D ก็ต่อเมื่อ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x)| \leq K \text{ สำหรับทุกๆ } x \in D$$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็น การพิสูจน์ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต ซึ่งจะพิสูจน์โดยใช้บทนิยาม 4.1.2

ตัวอย่าง 4.1.3 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยนิยามให้ $f(x) = 2 \cos x$ จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต

วิธีทำ เนื่องจาก

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ของค่าสัมบูรณ์ ข้อ (1) จะได้ว่า

$$|\cos x| \leq 1$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|2 \cos x| = 2|\cos x| \leq 2$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ถ้าเราเลือก $K = 2 > 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|2 \cos x| \leq K$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.2 จะได้ว่า $f(x) = 2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต $\square$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่จะแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันที่มีค่าลิมิตแล้วฟังก์ชันนั้นจะมีขอบเขต บนบางย่านใกล้เคียงลบออก ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.2 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนบางย่านใกล้เคียงลบออกของจุด a

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะแสดงว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ f มีขอบเขตบนเซต $N^*(a, \delta)$ กำหนดให้ $\epsilon = 1 > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - L| < 1$$

จาก $0 < |x - a| < \delta$ จะได้ว่า $x \in N^*(a, \delta)$ และจาก $|f(x) - L| < 1$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - L + L| \\ &\leq |f(x) - L| + |L| \\ &< 1 + |L| \end{aligned}$$

จึงเลือก $K = 1 + |L|$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ แล้ว

$$|f(x)| \leq K$$

จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $N^*(a, \delta)$ สำหรับบาง $\delta > 0$ $\square$

ทฤษฎีบทถัดไป เป็นการกล่าวถึงคุณสมบัติทางพีชคณิตของลิมิตของฟังก์ชัน โดยจะเริ่มต้นด้วยการนิยามการบวก การคูณและการหารของฟังก์ชันก่อน

บทนิยาม 4.1.3 กำหนดให้ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ จะนิยาม

- การบวกของฟังก์ชัน $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

สำหรับทุกๆ $x \in D$

- การคูณของฟังก์ชัน $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

สำหรับทุกๆ $x \in D$

- การหารของฟังก์ชัน $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

เมื่อ $g(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in D$

- สำหรับ $k \in \mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $kf : D \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$(kf)(x) = kf(x)$$

สำหรับทุกๆ $x \in D$

ทฤษฎีบท 4.1.3 กำหนดให้ $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ โดยที่ a และ c เป็นจำนวนจริง ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + R$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LR$$

$$(6) \text{ ถ้า } R \neq 0 \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{R}$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

$$(9) \text{ ถ้า } f(x) \geq 0 \text{ สำหรับทุกๆ } x \in D \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \text{ เมื่อ } L \geq 0$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

- (1) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ โดยกำหนดให้ $f(x) = c$ สำหรับทุกๆ $x \in D$ สามารถแสดงการพิสูจน์ตามบทนิยาม 4.1.1 ได้อย่างง่าย
- (2) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} x = a$
กำหนดให้ $f(x) = x$ สำหรับทุกๆ $x \in D$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เลือก $\delta = \epsilon$ จะเห็นว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x) - a| &= |x - a| \\ &< \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 4.1.1 ทำให้ได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

- (3) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$
จาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และ $\frac{\epsilon}{|c|+1} > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|+1}$$

ทำให้ได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |cf(x) - cL| &= |c||f(x) - L| \\ &< |c| \left(\frac{\epsilon}{|c|+1} \right) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cL$

- (4) แบบฝึกหัด

- (5) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LR$
กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ โดยทฤษฎีบท 4.1.2 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ f มีขอบเขตใน $N^*(a, \delta_1)$ นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x)| \leq K \text{ สำหรับทุกๆ } x \in N^*(a, \delta_1)$$

และจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\frac{\epsilon}{2(|R|+1)} > 0$ โดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2(|R|+1)}$$

และจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ และ $\frac{\epsilon}{2K} > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_3 > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta_3 \text{ แล้ว } |g(x) - R| < \frac{\epsilon}{2K}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LR| &= |f(x)g(x) - f(x)R + f(x)R - LR| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)R| + |f(x)R - LR| \\ &= |f(x)||g(x) - R| + |R||f(x) - L| \\ &< K \frac{\epsilon}{2K} + |R| \frac{\epsilon}{2(|R| + 1)} \\ &= \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LR$$

(6) แบบฝึกหัด

(7) แบบฝึกหัด (คำแนะนำ: วิธีการพิสูจน์เช่นเดียวกับ 3.1.5 ข้อ (9) ใช้ทฤษฎีบทนิยาม)

(8) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$

จากกำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

โดยบทแทรก 1.2.1 ข้อ (1) จึงได้ว่า

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$$

ทำให้ได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$||f(x)| - |L|| < \epsilon$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |L|$$

(9) กำหนดให้ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in D$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ เมื่อ $L \geq 0$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ แบ่งพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $L = 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\epsilon^2 > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - 0| < \epsilon^2$$

เนื่องจาก

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = |\sqrt{f(x)}| = \sqrt{|f(x)|}$$

จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| = \sqrt{|f(x)|} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

กรณี 2 ถ้า $L > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\epsilon\sqrt{L} > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta' > 0$ ทำให้ได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta'$ จะได้ว่า

$$|f(x) - L| < \epsilon\sqrt{L}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |\sqrt{f(x)} - \sqrt{L}| &= \left| \frac{(\sqrt{f(x)} - \sqrt{L})(\sqrt{f(x)} + \sqrt{L})}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}} \right| \\ &= \frac{|f(x) - L|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{L}} \\ &\leq \frac{|f(x) - L|}{\sqrt{L}} \\ &< \frac{\epsilon\sqrt{L}}{\sqrt{L}} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

□

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกรณำนำทฤษฎีบท 4.1.3 มาใช้ในการหาค่าลิมิต ซึ่งมักจะเป็นเครื่องมือที่ถูกนำไปใช้ในการคำนวณในทางแคลคูลัส ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 \\ &= (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1 \\ &= (2)^2 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) = 7$$

□

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 - 3x - 4)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 - 3x - 4) &= \lim_{x \rightarrow -1} 4x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 3x - \lim_{x \rightarrow -1} 4 \\ &= 4(\lim_{x \rightarrow -1} x)^2 - 3(\lim_{x \rightarrow -1} x) - \lim_{x \rightarrow -1} 4 \\ &= 4(-1)^2 - 3(-1) - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 - 3x - 4) = 3$$

□

จากทฤษฎีบท 4.1.3 ทำให้ได้รับผลที่ตามมาเป็นบทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.1.1 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ แล้ว

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L - R$

2. ถ้า $R \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{R}$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการนำบทแทรก 4.1.1 ไปประยุกต์ใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 + x - 7}{x^2 + 1} \right)$

วิธีทำ จากบทตั้ง 4.1.1 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 + x - 7}{x^2 + 1} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)}$$

และโดยทฤษฎีบท 4.1.3 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 7)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 7}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{2(1)^2 + 1 - 7}{1^2 + 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x^2 + x - 7}{x^2 + 1} \right) = -2$

□

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{3x - 3} \right)$

วิธีทำ โดยบทแทรก 4.1.1 และทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{3x - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{3(x - 1)} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{\lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1} \right) \\ &= \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1} + 1} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{3x - 3} \right) = \frac{1}{3}$

□

ทฤษฎีบทต่อไป จะแสดงบทพิสูจน์ว่า สำหรับ $f(x) \leq g(x)$ แล้วค่าลิมิตของ $f(x)$ จะยังค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าลิมิตของ $g(x)$ สำหรับทุกๆ x บนบางย่านใกล้เคียงลอบอก รายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.4 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ และ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ แล้ว $L \leq R$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ และ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ จะแสดงว่า $L \leq R$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง นั่นคือ สมมติให้ $L > R$ กำหนดให้ $\epsilon = \frac{L-R}{2} > 0$ จากบทแทรก 4.1.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L - R$$

ดังนั้นโดยบทนิยาม 4.1.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|(f(x) - g(x)) - (L - R)| < \frac{L - R}{2}$$

เลือก $\delta_2 = \min\{\delta, \delta_1\}$ จึงทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta_2)$ จะได้ว่า

$$-\frac{L - R}{2} + (L - R) < f(x) - g(x) < \frac{L - R}{2} + (L - R)$$

ดังนั้น

$$\frac{L - R}{2} < f(x) - g(x) < \frac{3(L - R)}{2}$$

นั่นคือ $f(x) - g(x) > 0$ จึงทำให้ได้ว่า $g(x) < f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta_2)$ จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับที่ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ ดังนั้น $L \leq R$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปแสดงให้เห็นว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ โดยที่ $x_n \neq a$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ด้วย ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.5 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ และ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ โดยที่ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

เนื่องจาก $\delta > 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ และ $x_n \neq a$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < |x_n - a| < \delta$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น จึงได้ว่า

$$|f(x_n) - L| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ โดยนิยาม 3.1.2 จึงได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ และ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง

$$0 < |x - a| < \delta \text{ แต่ } |f(x) - L| \geq \epsilon$$

จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า สำหรับ $\delta = \frac{1}{n}$ จะมี $\{a_n\} \subseteq D$ ซึ่ง $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}$ และ

$$|f(a_n) - L| \geq \epsilon$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับที่ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ และ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 4.1.5

ตัวอย่าง 4.1.8 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x + 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + 2x_n + 5)$ เมื่อ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ โดยที่ $x_n \neq 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ และ $a = 0$ และสมมติให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + 2x_n + 5) \\ &= 3 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right)^2 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \\ &= 3(0)^2 + 2(0) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2) + \lim_{x \rightarrow 0} (2x) + \lim_{x \rightarrow 0} (5) \\ &= 3(0)^2 + 2(0) + 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + 2x + 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 + 2x_n + 5)$ เมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทซึ่งถูกนำไปใช้ในหาค่าลิมิต โดยเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า squeeze theorem หรือ sandwich theorem โดยลักษณะของทฤษฎีบทนี้จะคล้ายคลึงกับทฤษฎีบทหนึ่งในเรื่องของลำดับ นั่นคือ ทฤษฎีบท 3.1.3 ซึ่งจะแสดงบทพิสูจน์ของ sandwich theorem ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.6 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ และ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ และ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$

จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จึงได้ว่า

$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$$

และจาก $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว

$$|h(x) - L| < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จึงได้ว่า

$$-\epsilon < h(x) - L < \epsilon$$

เลือก $\delta_3 = \min\{\delta, \delta_1, \delta_2\}$ จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta_3$ แล้ว

$$-\epsilon < f(x) - L \leq g(x) - L \leq h(x) - L < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) อีกครั้ง จึงได้ว่า

$$|g(x) - L| < \epsilon$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ □

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 4.1.6 นั่นคือ เป็นการหาค่าของลิมิตโดยใช้ sandwich theorem ในการพิจารณาค่าลิมิต

ตัวอย่าง 4.1.9 จงพิจารณาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

สำหรับทุกๆ จำนวนจริง θ จึงได้ว่า

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

และจาก $x^2 \geq 0$ ดังนั้น

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 0}(-x^2) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ โดยทฤษฎีบท 4.1.6 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชัน โดยถ้าหากทราบว่าค่าของลิมิตของฟังก์ชันที่กำลังพิจารณานั้นมากกว่าศูนย์ แล้วฟังก์ชันนั้นจะมีค่ามากกว่าศูนย์สำหรับในบางย่านใกล้เคียงรอบออก ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.7 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $L > 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $L > 0$

จะแสดงว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$

กำหนดให้ $\epsilon = \frac{L}{2} > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \frac{L}{2}$$

นั่นคือ ถ้า $x \in N^*(a, \delta)$ แล้ว $|f(x) - L| < \frac{L}{2}$ โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$0 < -\frac{L}{2} + L < f(x) < \frac{L}{2} + L$$

จึงทำให้ได้ว่า $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$

□

ในการพิจารณาของลำดับในทฤษฎีบท 3.1.7 ได้แสดงค่าลิมิตของลำดับที่เข้าสู่ศูนย์และอีกลำดับที่มีขอบเขต หากนำผลคูณของสองลำดับดังกล่าวมาพิจารณาหาค่าลิมิตจะทำให้ได้ผลลัพธ์ของลิมิตมีค่าเป็นศูนย์ จากลักษณะดังกล่าวทฤษฎีบทถัดไปจะแสดงให้เห็นว่าสำหรับการพิจารณาบนฟังก์ชันนั้นทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นจริงด้วย ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.8 ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $N^*(a, \eta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\eta > 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a}(f(x)g(x)) = 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $N^*(a, \eta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\eta > 0$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a}(f(x)g(x)) = 0$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน $N^*(a, \eta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\eta > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$|g(x)| \leq K$$

สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \eta)$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\frac{\epsilon}{K} > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - 0| < \frac{\epsilon}{K}$$

เลือก $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - 0| &= |f(x)||g(x)| \\ &= |f(x) - 0||g(x)| \\ &< \left(\frac{\epsilon}{K}\right) K \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow a}(f(x)g(x)) = 0$ □

ต่อไปเราจะขอยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 4.1.8

ตัวอย่าง 4.1.10 กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = 2 \cos x$ จะแสดงว่า

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2(x + 1) \cos x = 0$$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow -1} 2(x + 1)(\cos x)$ มีค่าเป็น 0 หากพิจารณาโดยทฤษฎีบท 4.1.8 จะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

และจากตัวอย่าง 4.1.3 ได้ว่า

$$g(x) = 2 \cos x$$

เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.1.8 ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2(x + 1) \cos x = 0$$

□

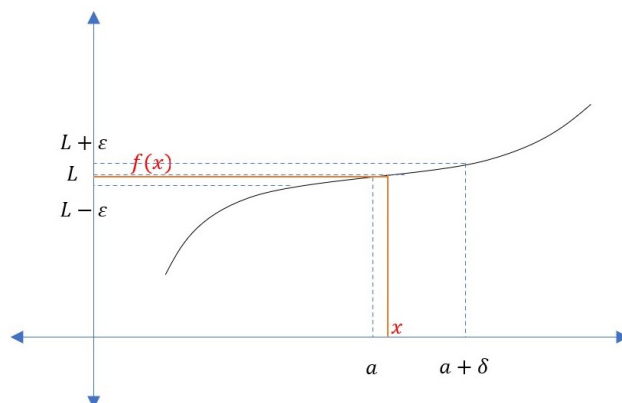
4.2 ลิมิตด้านเดียว ลิมิตค่าอนันต์ และลิมิตที่อนันต์

จากหัวข้อ 4.1 ได้เริ่มกล่าวถึงการลู่เข้าของลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าสู่จำนวนจริงค่าหนึ่ง แต่ในการพิจารณาค่าของลิมิตนั้น ค่าลิมิตอาจจะลู่เข้าหรือไม่ก็ได้ สิ่งหนึ่งที่ช่วยพิจารณาว่าค่าลิมิตนั้นลู่เข้าหรือไม่ก็คือ การพิจารณาค่าลิมิตทางซ้ายและค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันที่พิจารณา โดยถ้าหากค่าลิมิตทางซ้ายและค่าลิมิตทางขวาเท่ากันจะบอกค่าลิมิตนั้นได้ หรือลิมิตลู่เข้านั่นเอง แต่ถ้าค่าลิมิตทางซ้ายและค่าลิมิตทางขวาไม่เท่ากัน สามารถสรุปได้ว่าค่าลิมิตลู่ออกหรือไม่ลู่เข้านั่นเอง ดังนั้นในหัวข้อนี้จะเริ่มต้นด้วยการนำเสนอลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน และยิ่งไปกว่านั้นในหัวข้อนี้ ยังให้บทนิยามของฟังก์ชันที่ลิมิตเข้าสู่อนันต์ นั่นคือ ลู่เข้าสู่ $+\infty$ หรือ $-\infty$ ด้วย เพื่อเป็นการแสดงการพิสูจน์และการันตีว่าฟังก์ชันที่พิจารณานั้นลู่เข้าสู่อนันต์นั่นเอง และสุดท้ายของหัวข้อ ยังได้นำเสนอถึงการพิจารณาค่าลิมิตเมื่อ x ลู่เข้าสู่ $+\infty$ หรือ $-\infty$ ซึ่งจะเรียกว่า ลิมิตที่อนันต์ โดยจะนำเสนอบทนิยามของลิมิตที่อนันต์พร้อมทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง กล่าวโดยสรุปจะเห็นว่า โดยภาพรวมของหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงลิมิตไม่ลู่เข้านั่นเอง โดยจะขอเริ่มต้นด้วยบทนิยามของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชันก่อน

บทนิยาม 4.2.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า *ลิมิตทางขวา (right-hand limit) ของ f ที่จุด a มีค่าเท่ากับ L* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ดังรูป 4.2



รูปที่ 4.2: ลิมิตทางขวาของ f ที่จุด a

จากบทนิยาม 4.2.1 สามารถกล่าวอีกแบบได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ย่านใกล้เคียง $N(L, \epsilon)$ ของจุด L จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x \in (a, a + \delta) \text{ แล้ว } f(x) \in N(L, \epsilon)$$

บทนิยาม 4.2.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า *ลิมิตทางซ้าย (left-hand limit) ของ f ที่จุด a มีค่าเท่ากับ L* ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

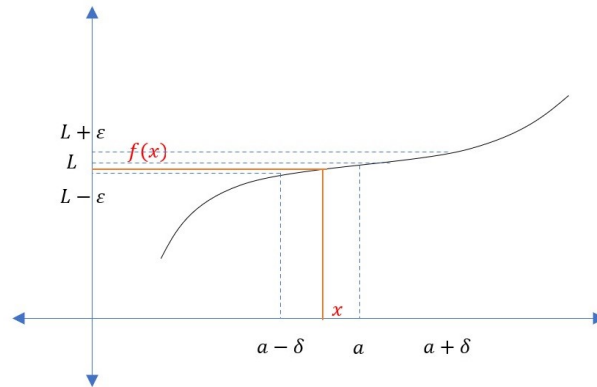
$$\text{ถ้า } a - \delta < x < a \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ดังรูป 4.3

จากบทนิยาม 4.2.1 สามารถกล่าวอีกอย่างได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ย่านใกล้เคียง $N(L, \epsilon)$ ของจุด L จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x \in (a - \delta, a) \text{ แล้ว } f(x) \in N(L, \epsilon)$$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิจารณาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม 4.2.1 และ 4.2.2

รูปที่ 4.3: ลิมิตทางซ้ายของ f ที่จุด a

ตัวอย่าง 4.2.1 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1; & x \geq 1 \\ x - 2; & x < 1 \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ และ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ จะได้ว่า ถ้า $1 < x < 1 + \delta$ นั่นคือ $0 < x - 1 < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| &= |(2x + 1) - 3| \\ &= |2x - 2| \\ &= 2|x - 1| \\ &< 2\delta \\ &= 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

เลือก $\delta = \epsilon$ จะได้ว่า ถ้า $1 - \delta < x < 1$ จะได้ว่า $-\delta < x - 1 < 0 < \delta$ โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จะได้ว่า $|x - 1| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x) - (-1)| &= |(x - 2) - (-1)| \\ &= |x - 1| \\ &< \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 4.2.2 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

□

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ใช้การพิจารณาการลู่เข้าของลิมิตฟังก์ชัน โดยใช้การพิจารณาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

สำหรับ $a < x < a + \delta$ จะเห็นว่า $a - \delta < x < a + \delta$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

และสำหรับ $a - \delta < x < a$ จะเห็นว่า $a - \delta < x < a + \delta$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 4.2.2 จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $a < x < a + \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $a - \delta_2 < x < a$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ว่า สำหรับ $x \in (a - \delta, a + \delta)$ ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ

$$\text{ถ้า } a - \delta_2 < a - \delta < x < a \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

และ

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta < a + \delta_1 \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

จึงทำให้ได้ว่า สำหรับ $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \epsilon$ โดยบทนิยาม 4.1.1 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ $\square$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นกรณำทฤษฎีบท 4.2.1 ไปประยุกต์ใช้พิจารณาลิมิตของฟังก์ชัน แต่จะนำไปใช้ในข้อความแย้งสลบที่ นั่นคือ ถ้าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันไม่เท่ากับลิมิตทางขวาของฟังก์ชันดังกล่าวแล้ว แล้วลิมิตฟังก์ชันนั้นจะไม่ลู่เข้าหรือหาค่าลิมิตไม่ได้นั่นเอง

ตัวอย่าง 4.2.2 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x}$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ พิจารณา

$$\frac{|x|}{2x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{2x} = -\frac{1}{2}$ และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{2x} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{2x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{2x}$$

โดยทฤษฎีบท 4.2.1 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x}$ หาค่าไม่ได้ □

จากที่กล่าวมาในเนื้อหาตอนต้นทั้งหมด จะเห็นว่าได้กล่าวถึงการที่ลิมิตเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง โดยตามบทนิยาม 4.1.1 ก็คือลิมิตเข้าสู่ค่า L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงจำนวนหนึ่งและก็สามารถกล่าวถึงนิเสธของบทนิยามดังกล่าว นั่นก็คือ ลิมิตไม่ลู่เข้า หรืออาจกล่าวได้ว่าลิมิตลู่ออกหรือหาค่าไม่ได้นั่นเอง แต่ในการพิจารณาลิมิตไม่ได้มีเพียงที่กล่าวมานี้เท่านั้น ยังคงมีกรณีที่ค่าของลิมิตลู่ออกเข้าสู่ $+\infty$ และ $-\infty$ อีกด้วย ดังนั้น ในส่วนถัดไปจึงจะขอกกล่าวถึงการนิยามค่าลิมิตที่เข้าสู่ $+\infty$ และ $-\infty$ โดยจะให้บทนิยามของค่าลิมิตที่เข้าสู่ $+\infty$ และ $-\infty$ หรือที่เรียกว่า *ลิมิตค่าอนันต์* ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } f(x) > M$$

และจะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } f(x) < -M$$

ตัวอย่างต่อไปเป็นการแสดงบทพิสูจน์ที่สอดคล้องกับบทนิยาม 4.2.3

ตัวอย่าง 4.2.3 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} = +\infty$ โดยที่ $x \neq \frac{1}{2}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $M > 0$ เลือก $\delta = \frac{1}{2M}$ และเนื่องจาก $x - \frac{1}{2} \neq 0$ จะได้ว่า ถ้า $0 < |x - \frac{1}{2}| < \delta$ แล้ว

$$0 < 2x - 1 < 2\delta = \frac{1}{M}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} > M$$

โดยบทนิยาม 4.2.3 สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1}{2x-1} = +\infty$ □

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตค่าอนันต์

ทฤษฎีบท 4.2.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของ a แล้วข้อความต่อไปนี้ เป็นจริง

$$(1) \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

$$(2) \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ แล้ว } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของ a

$$(1) \text{ กำหนดให้ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ จะแสดงว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$f(x) > M$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} = \epsilon$$

จึงได้ว่า

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{f(x)} < \epsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.1 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$

$$(2) \text{ กำหนดให้ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ จะแสดงว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$f(x) < -M$$

จะได้ว่า

$$f(x) < -\frac{1}{\epsilon} < 0$$

นั่นคือ

$$-\frac{1}{f(x)} < \epsilon$$

จะเห็นได้ว่า สำหรับ $0 < |x - a| < \delta$ และ $f(x) < 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| &= \left| \frac{1}{f(x)} \right| \\ &= -\frac{1}{f(x)} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.1 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0$



จากที่กล่าวมาข้างต้นนี้ ได้มีการกล่าวถึงบทนิยามของลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาไปแล้ว นั้น และยังได้ให้บทนิยามของลิมิตค่าอนันต์ไปแล้ว ต่อไปจะขอกกล่าวถึงลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของลิมิตค่าอนันต์ด้วย ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.4 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า

- (1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta \text{ แล้ว } f(x) > M$$

- (2) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a - \delta < x < a \text{ แล้ว } f(x) > M$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta \text{ แล้ว } f(x) < -M$$

- (4) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a - \delta < x < a \text{ แล้ว } f(x) < -M$$

ทฤษฎีบทต่อไปคือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของลิมิตค่าอนันต์ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 4.2.3 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ กำหนดให้จำนวนจริง $M > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < |x - a| < \delta \text{ แล้ว } f(x) > M$$

จะเห็นว่า ถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว $a - \delta < x < a + \delta$ ดังนั้น $f(x) > M$ โดยบทนิยาม 4.2.4 ข้อ (1) จึงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

และถ้า $a - \delta < x < a$ แล้ว $a - \delta < x < a + \delta$ ดังนั้น $f(x) > M$ โดยบทนิยาม 4.2.4 ข้อ (2) จึงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ กำหนดให้ $M > 0$ จาก $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta_1 \text{ แล้ว } f(x) > M$$

และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } a - \delta_2 < x < a \text{ แล้ว } f(x) > M$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะได้ว่า สำหรับ $a - \delta < x < a + \delta$ จะเห็นว่า

$$\text{ถ้า } a - \delta_2 < a - \delta < x < a \text{ แล้ว } f(x) > M$$

และ

$$\text{ถ้า } a < x < a + \delta < a + \delta_1 \text{ แล้ว } f(x) > M$$

จึงสรุปได้ว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $f(x) > M$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.2.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

□

ไม่เพียงแต่ข้างต้นที่กล่าวมาเท่านั้น ในเรื่องของลิมิตยังคงมีการพิจารณาฟังก์ชันที่มีค่าลิมิตที่อนันต์อีกด้วย นั่นคือ เป็นการพิจารณาค่าลิมิตเมื่อ x เข้าสู่ $+\infty$ หรือ $-\infty$ ดังจะนิยามในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.5 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > M \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

และจะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x < -M \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิจารณาค่าของลิมิตที่อนันต์โดยใช้บทนิยามข้างต้น

ตัวอย่าง 4.2.4 กำหนดให้ $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = \frac{x+1}{2x}$ จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และเลือก $M = \frac{1}{\epsilon} > 0$ จะได้ว่า ถ้า $x > M > 0$ แล้ว $\frac{1}{x} < \frac{1}{M}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| &= \left| \frac{x+1}{2x} - \frac{1}{2} \right| \\ &= \left| \frac{x+1-x}{2x} \right| \\ &= \frac{1}{2x} \\ &< \frac{1}{x} \\ &< \frac{1}{M} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 4.2.5 สรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ □

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่มีค่าลิมิตที่อนันต์

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ แล้วจะมีจำนวนจริง a ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน f มีขอบเขตในช่วง $[a, \infty)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ จะแสดงว่า จะมีจำนวนจริง a ซึ่งทำให้ f มีขอบเขตในช่วง $[a, \infty)$ จาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon = 1 > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } |f(x) - L| < 1$$

จากนั้นเราเลือก $M = 1 + |L| > 0$ และ $a > K$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x \in [a, \infty)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - L| + |L| \\ &< 1 + |L| \\ &= M \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.1.2 จะได้ว่าฟังก์ชัน f มีขอบเขตในช่วง $[a, \infty)$ □

ทฤษฎีบท 4.2.5 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ และ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } |f(x) - L| < \epsilon$$

เนื่องจาก $K > 0$ และ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ โดยบทนิยาม 3.1.4 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$x_n > K \text{ สำหรับทุกๆ } n > N$$

จึงทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $n > N$ ซึ่ง $x_n > K$ ดังนั้น

$$|f(x_n) - L| < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 3.1.2 จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$

($\Leftarrow$) แบบฝึกหัด

□

และในส่วนสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันของลิมิตที่อนันต์ซึ่งมีค่าอนันต์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.2.6 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ จะกล่าวว่า

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } f(x) > M$$

- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x < -K \text{ แล้ว } f(x) > M$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } f(x) < -M$$

- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $M > 0$ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x < -K \text{ แล้ว } f(x) < -M$$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการหาค่าของลิมิตที่อนันต์และมีค่าอนันต์ โดยใช้บทนิยาม 4.2.6 ข้างต้นในการพิจารณา

ตัวอย่าง 4.2.5 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-2}{x-1} = +\infty$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $M > 0$ และเลือก $K = M$ จะเห็นว่า ถ้า $x > K$ แล้ว

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \\ &= \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} \\ &= x + 2 \\ &> x \\ &> K \\ &= M \end{aligned}$$

โดยบทนิยาม 4.2.6 ข้อ (1) จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = +\infty$ □

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชันที่อนันต์ซึ่งมีค่าลิมิตเป็นค่าอนันต์

ทฤษฎีบท 4.2.6 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ $\mathbb{R}$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด (คำแนะนำ: แสดงทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.2.5) □

ทฤษฎีบท 4.2.7 กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง เมื่อ D เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ จำนวนจริง แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$
- (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = -\infty$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง

- (1) ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ จะแสดงว่า $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$
กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } |f(x) - A| < \epsilon \quad (4.1)$$

เราเลือก $\delta = \frac{1}{K} > 0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $t \in D_f$ ถ้า $0 < t < \frac{1}{K}$ จะได้ว่า $\frac{1}{t} > K$ จาก (4.1) แล้ว ทำให้ได้ว่า

$$\left| f\left(\frac{1}{t}\right) - A \right| < \epsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.2.1 จึงได้ว่า

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = A$ โดยบทนิยาม 4.2.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < t < \delta \text{ แล้ว } \left| f\left(\frac{1}{t}\right) - A \right| < \epsilon \quad (4.2)$$

เลือก $K = \frac{1}{\delta} > 0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x \in D_f$

$$\text{ถ้า } x > K = \frac{1}{\delta} \text{ แล้ว } 0 < \frac{1}{x} < \delta$$

โดย (4.2) จึงได้ว่า

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.2.5 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

(2) ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$

กำหนดให้จำนวนจริง $M > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ โดยบทนิยาม 4.2.6 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } x > K \text{ แล้ว } f(x) > M \quad (4.3)$$

ถ้าเลือก $\delta = \frac{1}{K} > 0$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $t \in D_f$ ถ้า $0 < t < \frac{1}{K}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{t} > K$ แล้ว โดย (4.3) จะได้ว่า

$$f\left(\frac{1}{t}\right) > M$$

โดยบทนิยาม 4.2.4 ข้อ (1) จึงได้ว่า $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

กำหนดให้จำนวนจริง $M > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = +\infty$ โดยบทนิยาม 4.2.4 ข้อ (1) จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } 0 < t < \delta \text{ แล้ว } f\left(\frac{1}{t}\right) > M \quad (4.4)$$

เราเลือก $K = \frac{1}{\delta}$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $x \in D_f$

$$\text{ถ้า } x > K = \frac{1}{\delta} \text{ แล้ว } 0 < \frac{1}{x} < \delta$$

โดย (4.4) จะได้ว่า $f(x) > M$ ดังนั้น โดยบทนิยาม 4.2.6 จึงได้ว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(3) แบบฝึกหัด



4.3 บทสรุป

จากเนื้อหาทั้งหมดที่กล่าวมาในบทนี้ ได้เริ่มต้นจากการให้บทนิยามของลิมิตของฟังก์ชัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างการหาลิมิตของฟังก์ชัน โดยใช้วิธีการแสดงตามบทนิยาม และได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญของลิมิตฟังก์ชัน ยกตัวอย่างเช่น ค่าของลิมิตฟังก์ชันจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น (ดังทฤษฎีบท 4.1.1) และทฤษฎีบททางพีชคณิตของลิมิตฟังก์ชันซึ่งเป็นสิ่งที่ถูกนำไปใช้คำนวณทางแคลคูลัส รวมถึงความเกี่ยวข้องของฟังก์ชันที่มีลิมิตและฟังก์ชันที่มีขอบเขต และบทพิสูจน์ของ sandwich theorem จากนั้นในหัวข้อที่สอง ได้ศึกษาเกี่ยวกับลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยมีบทพิสูจน์ที่สำคัญนั่นคือ ถ้าลิมิตทางซ้ายเท่ากับลิมิตทางขวาแล้วลิมิตของฟังก์ชันนี้จะหาค่าได้ จากนั้นยังได้กล่าวถึงลิมิตที่มีค่าอนันต์ ลิมิตที่อนันต์ รวมถึงทฤษฎีบทและตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับลิมิตที่มีค่าอนันต์ และลิมิตที่อนันต์ด้วย ซึ่งโดยรวมของการศึกษาหัวข้อนี้ เป็นความรู้พื้นฐานของลิมิตของฟังก์ชันที่ไม่ลู่เข้าหรือเข้าสู่ค่าอนันต์ ซึ่งเป็นประโยชน์ในการคำนวณทางแคลคูลัสและเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชัน เพื่อนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์อื่นๆ ในระดับที่สูงขึ้นต่อไป

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ 4. 6. และ 7.
2. จงพิสูจน์บทตั้ง 4.1.1
3. จงพิสูจน์บทกลับของทฤษฎีบท 4.2.5
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.6
5. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2.7 ข้อ 3.
6. จงใช้บทนิยามของลิมิต 4.1.1 พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้
 - 6.1 $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$
 - 6.2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$
7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = M$
 - 8.1 $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)] = L + M$
 - 8.2 $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)g(x)] = LM$
 - 8.3 ถ้า $M \neq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a^+} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$

บทที่ 5

ฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากบทที่ 4 ได้แนะนำนิยามของฟังก์ชัน แสดงบทพิสูจน์ของการหาขีดจำกัดของฟังก์ชัน พร้อมทั้งยกตัวอย่างการพิจารณาค่าลิมิตลู่เข้าของฟังก์ชันที่กำหนดให้ รวมถึงบนลิมิตที่อนันต์และลิมิตค่าอนันต์ และให้บทพิสูจน์ของคุณสมบัติที่สำคัญพร้อมทั้งความรู้พื้นฐานของลิมิตของฟังก์ชันไว้แล้ว ในบทนี้จึงจะนำความรู้ในเรื่องดังกล่าวมาใช้เพื่อจะพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยได้ให้นิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องไว้ในบทนิยามที่ 5.1.1 พร้อมยกตัวอย่างประกอบ จากนั้นจึงได้นำเสนอทฤษฎีบทต่างๆ ของฟังก์ชันต่อเนื่อง ยิ่งไปกว่านั้น จากในบทที่ 4 ได้มีการให้นิยามของค่าลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาไปแล้วนั้น ในบทนี้จะนำความรู้จากเรื่องดังกล่าวมาพิจารณาความต่อเนื่องทางซ้ายและความต่อเนื่องทางขวา ณ จุดจุดหนึ่งด้วย จึงนำไปสู่การนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จากบทนิยามนี้ทำให้ได้รับทฤษฎีบทที่สำคัญ เช่น ทฤษฎีบทค่าสุดขีด (extreme value theorem) และทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate value theorem) เป็นต้น ต่อจากนั้นในส่วนที่สองของบทนี้ ยังได้แนะนำฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป โดยฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบเอกรูปเป็นการขยายการพิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ ที่จุดจุดหนึ่ง ไปเป็นการพิจารณาจุดบนเซตเซตหนึ่ง ซึ่งได้ให้นิยามไว้ในบทนิยามที่ 5.2.1 พร้อมทั้งได้ยกตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องแบบเอกรูปและทฤษฎีบทที่สำคัญของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบเอกรูปและการพิสูจน์ของทฤษฎีบทเหล่านั้นไว้ในส่วนนี้ และในส่วนสุดท้ายของบทนี้ ยังได้แนะนำฟังก์ชันทางเดียวและฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ไว้อีกด้วย ดังนั้น จะขอเริ่มต้นบทนี้ด้วยการให้นิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องในบทนิยามต่อไปนี้

5.1 ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ในส่วนแรกนี้จะเริ่มต้นจากการกล่าวถึงนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

จากบทนิยามข้างต้น จะเห็นว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ซึ่งทำให้สามารถสรุปได้อีกว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

- (1) $f(a)$ หาค่าได้

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้

(3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

และถ้าฟังก์ชัน f สอดคล้องสมบัติข้อ (2) ข้างต้น แต่ $f(a)$ หาค่าไม่ได้หรือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ (นั่นคือไม่สอดคล้องข้อ (1) หรือข้อ (3)) จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ (removable discontinuous function) ที่จุด a

ต่อไปจะเสนอตัวอย่างของการพิจารณาความเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องตามบทนิยาม 5.1.1

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่จุด $x = 5$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$$

แต่ $f(5)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้ที่จุด $x = 5$ □

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 5.1.1 ถ้าเรานิยาม

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{เมื่อ } x \neq 5 \\ 10 & \text{เมื่อ } x = 5 \end{cases}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่จุด $x = 5$

นอกจากนี้ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าได้ แต่ค่าที่ได้นั้นไม่เท่ากัน จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f นั้นไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่ a (jump discontinuous at a) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด $x = 0$

วิธีทำ จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 สำหรับทุกๆ $x > 0$ จะได้ว่า $f(x) = 1$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

กรณีที่ 2 สำหรับทุกๆ $x < 0$ จะได้ว่า $f(x) = 0$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

ซึ่งจะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องแบบกระโดดที่จุด $x = 0$ □

ทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันต่อเนื่องกับการลู่เข้าของฟังก์ชันของลำดับที่ลู่เข้า รายละเอียดดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบน $N(a, \delta_1)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ดังนั้นฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ สำหรับทุกลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ใน D_f ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ โดยที่ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบน $N(a, \delta_1)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta_1 > 0$

($\Rightarrow$) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และสำหรับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ใน D_f ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ โดยที่ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } |x - a| < \delta_2 \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

และจากสมมติฐาน $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ และเลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ซึ่ง $\delta > 0$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - a| < \delta \text{ สำหรับทุกๆ } n > N$$

เนื่องจาก $\delta \leq \delta_2$ จะเห็นว่า สำหรับ $|x_n - a| < \delta$ แล้ว

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon \text{ สำหรับทุกๆ } n > N$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ สำหรับลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D_f$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ โดยที่ $x_n \neq a$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ และสำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ จะมี $x \in D_f$ ซึ่งทำให้

$$|x - a| < \delta \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon$$

เนื่องจาก มี $x \in D_f$ ซึ่งทำให้ $|x - a| < \delta$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ ดังนั้น จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะมี $a_1, a_2, \dots, a_n \in D_f$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} |a_1 - a| &< 1 \\ |a_2 - a| &< \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ |a_n - a| &< \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{5.1}$$

แต่

$$\begin{aligned} |f(a_1) - f(a)| &\geq \epsilon_1 \\ |f(a_2) - f(a)| &\geq \epsilon_2 \\ &\vdots \\ |f(a_n) - f(a)| &\geq \epsilon_n \end{aligned}$$

สำหรับบางจำนวนจริง $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n > 0$ จากข้างต้น จะเห็นว่าลำดับ $\{a_n\} \subseteq D_f$ ใน (5.1) และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ แต่จากสมมติฐานว่า ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ $|f(a_n) - f(a)| \geq \epsilon_n$ จึงทำให้สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a $\square$

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทของฟังก์ชันต่อเนื่องในทางพีชคณิต ซึ่งถูกนำไปประยุกต์ใช้ในทางแคลคูลัสอยู่เสมอ ยกตัวอย่างเช่น ถ้ามีฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง 2 ฟังก์ชัน เมื่อนำมาบวก คูณหรือหารกัน แล้วยังคงเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องอยู่นั่นเอง ซึ่งในการนิยามการบวก การคูณ และการหารของฟังก์ชันนั้นได้ให้นิยามไปแล้วในดังบทนิยาม 4.1.3

ทฤษฎีบท 5.1.2 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a แล้ว $f + g$ และ fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และถ้า $g(a) \neq 0$ แล้ว $\frac{f}{g}$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

การพิสูจน์ กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

จะแสดงว่า $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a นั่นคือ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$ โดยทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a ต่อไปจะแสดงว่า fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a นั่นคือ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (fg)(a)$ โดยทฤษฎีบท 4.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) \\ &= (\lim_{x \rightarrow a} f(x))(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) \\ &= f(a)g(a) \\ &= (fg)(a) \end{aligned}$$

ดังนั้น fg เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ และสำหรับ $g(a) \neq 0$ จะแสดงว่า $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ที่จุด a นั่นคือ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{f}{g}(a)$ โดยบทแทรก 4.1.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ &= \frac{f(a)}{g(a)} \\ &= \left(\frac{f}{g} \right) (a) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a เมื่อ $g(a) \neq 0$ □

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 5.1.2 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1.3 จงแสดงว่า $f(x) = x^5 + 2x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^5 + 2x^2 = x^2(x^3 + 2)$ ซึ่งจะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1 = 1^2$$

ดังนั้น x^2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และสำหรับ $x^3 + 2$ จะเห็นว่า

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2) = 3 = 1^3 + 2$$

ดังนั้น $x^3 + 2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ จากทฤษฎีบท 5.1.2 ทำให้ได้ว่า $x^2(x^3 + 2)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ ดังนั้น $x^5 + 2x^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ □

ต่อไปจึงมีคำถามชวนสงสัยต่อว่าแล้วหากนำฟังก์ชันต่อเนื่อง 2 ฟังก์ชันมาประกอบกัน แล้วผลลัพธ์ของฟังก์ชันที่ได้รับจากการประกอบกันนั้นจะยังคงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ ดังจะแสดงการพิสูจน์ในส่วนต่อไปนี้ แต่ก่อนอื่น จะขอทบทวนฟังก์ชันประกอบกันก่อน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.2 กำหนดให้ X, Y และ Z เป็นเซตใดๆ ซึ่งไม่เป็นเซตว่างและให้ $f : X \rightarrow Y$ และ $g : Y \rightarrow Z$ แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $g \circ f : X \rightarrow Z$ เป็นฟังก์ชันประกอบ (composite function) ถ้า $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ และสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y \in Y [(x, y) \in f \wedge (y, z) \in g] \text{ โดยที่ } x \in X \text{ และ } z \in Z$$

นั่นคือ

$$g \circ f = \{(x, z) \in X \times Z | \exists y \in Y, (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ จึงเป็นการแสดงให้ผู้อ่านทราบว่าเมื่อนำฟังก์ชันต่อเนื่อง 2 ฟังก์ชันมาประกอบกันจะยังคงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องนั่นเอง

ทฤษฎีบท 5.1.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(a)$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด a และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(a)$ จะแสดงว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(a)$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\eta > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับ $y \in D_g$

$$\text{ถ้า } |y - f(a)| < \eta \text{ แล้ว } |g(y) - g(f(a))| < \epsilon$$

และเนื่องจาก f ต่อเนื่องที่จุด a และจำนวนจริง $\eta > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$\text{ถ้า } |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < \eta$$

เนื่องจาก $f(x) \in R_f \cap D_g$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } |f(x) - f(a)| < \eta \text{ แล้ว } |g(f(x)) - g(f(a))| < \epsilon$$

จากข้างต้น ทำให้สรุปได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $|x - a| < \delta$ แล้ว

$$|g \circ f(x) - g \circ f(a)| < \epsilon$$

ดังนั้น โดยบทนิยาม 5.1.1 จะได้ว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a □

ต่อไปขอยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 5.1.3 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1.4 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = (\sin x)^2 + 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตจำนวนจริง

วิธีทำ จาก $f(x) = (\sin x)^2 + 1$ กำหนดให้ $h(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = \sin x$ ซึ่งจะเห็นว่า

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sin x) = (\sin x)^2 + 1$$

และเนื่องจาก

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1) = a^2 + 1 = h(a)$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ จำนวนจริง a และ

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a = g(a)$$

ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ จำนวนจริง a ด้วย ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.3 ทำให้ได้ว่า $h \circ g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับทุกๆ จำนวนจริง a จึงสรุปได้ว่า $(\sin x)^2 + 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตจำนวนจริง □

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ซึ่ง $[a, b]$ เป็นเซตย่อยบนเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 5.1.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียงของจุด a จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางด้านขวา (right continuous function) ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

และจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางด้านซ้าย (left continuous function) ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

บทนิยาม 5.1.4 กำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (continuous function on interval) $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด $c \in (a, b)$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่จุด a และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด b ซึ่งสามารถเขียน $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แทน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ได้

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิดนั้น ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ จะแสดงว่าฟังก์ชัน f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมี $x_n \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$|f(x_n)| > n$$

เนื่องจากช่วงปิด $[a, b]$ เป็นเซตที่มีขอบเขต จึงได้ว่า $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และโดยทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ที่ลู่เข้าของลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ นั่นคือ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$$

สำหรับบาง $x \in \mathbb{R}$ เนื่องจากช่วงปิด $[a, b]$ เป็นเซตปิด โดยทฤษฎีบท 3.1.6 จะได้ว่า $x \in [a, b]$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x โดยทฤษฎีบท 5.1.1 จะได้ว่า

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.4 จะได้ว่า $\{f(x_{n_k})\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ f ไม่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ ดังนั้น f มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ □

ต่อไปจะกล่าวถึงปัญหาค่าสุดขีด (extreme problem) ของฟังก์ชัน โดยกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนเซต A และนิยาม

$$M = \sup\{f(x) | x \in A\}$$

และ

$$m = \inf\{f(x) | x \in A\}$$

ถ้าฟังก์ชัน f มี $x_1, x_2 \in D_f$ (ถ้ามี) ซึ่งทำให้

$$f(x_1) = M \text{ หรือ } f(x_2) = m$$

และจะเรียก x_1 และ x_2 ว่าจุดสุดขีด (extreme point) และเรียก M และ m ว่าค่าสุดขีด (extreme value) ดังนั้น ทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับค่าสุดขีด นั่นคือ จะแสดงว่าหากฟังก์ชันที่พิจารณานั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตแล้วช่วงปิดนั้นจะมีค่าสุดขีด ดังการพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.5 [ทฤษฎีบทค่าสุดขีด (extreme value theorem)] ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ แล้วมีจุด $x_1, x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_1) = M$ และ $f(x_2) = m$ เมื่อ $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ และ $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.1.4 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ และโดยสัจพจน์ความบริบูรณ์จะได้ว่า จะมี $M \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

และโดยทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้ว่า จะมี $m \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

ดังนั้น $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

ต่อไปจะแสดงว่า จะมี $x_1 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_1) = M$ เนื่องจากข้างต้นได้ทราบว่า $f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ต้องการจะแสดงว่า $f(x) \geq M$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้งสมมติให้ $f(x) < M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ และนิยามให้ฟังก์ชัน $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จะเห็นว่า $g(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.1.2 จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และโดยทฤษฎีบท 5.1.4 จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง $[a, b]$ นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่งทำให้

$$\frac{1}{M - f(x)} = \left| \frac{1}{M - f(x)} \right| = |g(x)| \leq K$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น

$$0 < \frac{1}{K} \leq M - f(x)$$

จึงได้ว่า

$$f(x) \leq M - \frac{1}{K}$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ นั่นคือ $M - \frac{1}{K}$ เป็นขอบเขตบน จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ดังนั้น $f(x) \geq M$ สำหรับบาง $x \in [a, b]$ แต่เนื่องจาก $f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น ทำให้ได้ว่า จะมี $x_1 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_1) = M$

ต่อไปจะแสดงว่า จะมี $x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_2) = m$ โดยใช้ผลลัพธ์ข้างต้นที่พิสูจน์มา โดยพิจารณาฟังก์ชัน f แทนด้วยฟังก์ชัน $(-f)$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า $(-f)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ดังนั้น ถ้า $-f(x) < -m$ แล้วจะได้ว่า

$$-m = \sup_{x \in [a, b]} (-f(x))$$

จึงทำให้ได้ว่า จะมี $x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $-f(x_2) = -m$ นั่นคือ จะมี $x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_2) = m$ □

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 5.1.5

ตัวอย่าง 5.1.5 จงหาจุดบนช่วง $[-1, 3]$ ที่ทำให้ได้รับค่าซูพรีมัมและค่าอินฟิมัมของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^2$ ซึ่ง

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$$

สำหรับทุกๆ $a \in [-1, 3]$ นั่นก็คือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-1, 3]$ และยิ่งไปกว่านั้นจะเห็นว่า

$$\sup f(x) = 9 \text{ และ } \inf f(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in [-1, 3]$$

โดยที่ $f(3) = 9$ และ $f(0) = 0$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 5.1.5 ที่กล่าวว่า จะสามารถหา $0, 3 \in [-1, 3]$ ที่ทำให้ได้ค่าซูพรีมัมและอินฟิมัมของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ บนช่วง $[-1, 3]$ □

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่ยังคงเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ ถ้าทราบค่าฟังก์ชันที่พิจารณานั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $a \in \mathbb{R}$ และถ้า $f(a) > 0$ (หรือ $f(a) < 0$) แล้วจะได้ว่า จะมีบางย่านใกล้เคียงซึ่งบรรจุ x ที่ทำให้ทุกจุดในย่านใกล้เคียงนั้น มีค่า $f(x) > 0$ (หรือ $f(x) < 0$) ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.6 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ แล้ว

- (1) ถ้า $f(a) > 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$
- (2) ถ้า $f(a) < 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) < 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$

- (1) สมมติให้ $f(a) > 0$ จะแสดงว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$0 < -\frac{f(a)}{2} + f(a) < f(x) < \frac{f(a)}{2} + f(a)$$

จึงสรุปได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$ แล้ว $f(x) > 0$

- (2) สมมติให้ $f(a) < 0$ จะแสดงว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $f(x) < 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a จะได้ว่า สำหรับ $\epsilon = -\frac{f(a)}{2} > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\text{ถ้า } |x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < -\frac{f(a)}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$-\left(-\frac{f(a)}{2}\right) + f(a) < f(x) < -\frac{f(a)}{2} + f(a) = \frac{f(a)}{2} < 0$$

จึงสรุปได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ $x \in N(a, \delta)$ แล้ว $f(x) < 0$

□

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปจะเป็นผลลัพธ์จากสมมติฐานของฟังก์ชันต่อเนื่องที่กล่าวว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ซึ่ง $f(a) < 0 < f(b)$ แล้วจะสามารถหาจุดจุดหนึ่งบน (a, b) ซึ่งค่าฟังก์ชัน ณ จุดนั้น มีค่าเท่ากับศูนย์ได้เสมอ ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.7 ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $f(a) < 0 < f(b)$ แล้วจะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f(c) = 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(a) < 0 < f(b)$ จะแสดงว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f(c) = 0$ กำหนดให้

$$A = \{x \in [a, b] | f(x) \leq 0\}$$

เนื่องจาก $f(a) < 0$ จะได้ว่า $a \in A$ ดังนั้น $A \neq \emptyset$ จึงจะเห็นว่า A เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ซึ่งไม่เป็นเซตว่างที่มีขอบเขตบน โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ จะได้ว่า จะมี $c \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้

$$c = \sup A$$

และเนื่องจาก A เป็นเซตย่อยปิดที่มีขอบเขต โดยบทแทรก 2.3.1 จะได้ว่า A มีค่าสูงสุดซึ่งคือ c นั่นเอง จึงได้ว่า

$$c \in A$$

ต่อไปจะแสดงว่า $f(c) = 0$ ซึ่งจะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง นั่นคือสมมติให้ $f(c) \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $f(c) > 0$ หรือ $f(c) < 0$

กรณีที่ 1 สมมติให้ $f(c) > 0$ จะเห็นว่า $c \notin A$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $f(c) \leq 0$

กรณีที่ 2 สมมติให้ $f(c) < 0$ โดยทฤษฎีบท 5.1.6 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$f(x) < 0$$

สำหรับทุกๆ $x \in N(c, \delta)$ ดังนั้น จะเห็นว่า จะมีบาง $x' \in N(c, \delta)$ ซึ่ง $c < x'$ ที่ทำให้

$$f(x') < 0$$

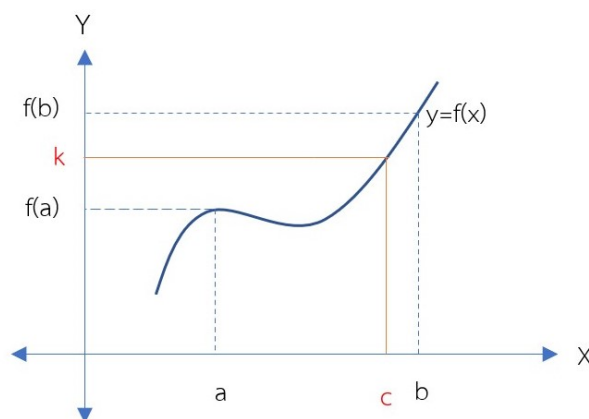
จึงทำให้สรุปได้ว่า จะมี $x' \in A$ ซึ่ง $c < x'$ แต่เนื่องจาก $c = \sup A$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่ว่า จะมีสมาชิกใน A ที่มากกว่า c ไม่ได้ ดังนั้น $f(c) \geq 0$ จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จึงสรุปได้ว่า $f(c) = 0$ □

จากผลของทฤษฎีบทข้างต้น ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญคือ ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง เป็นทฤษฎีบทหนึ่งซึ่งถูกนำไปประยุกต์ใช้อยู่เสมอ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.8 [ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (intermediate value theorem)]

กำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า k เป็นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ แล้วจะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f(c) = k$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ k เป็นจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ ดังรูป 5.1 จะแสดงว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f(c) = k$ จากสมมติให้ k เป็นจำนวนจริง



รูปที่ 5.1: ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง

ที่อยู่ระหว่าง $f(a)$ และ $f(b)$ จะเห็นว่า

$$f(a) < k < f(b) \text{ หรือ } f(b) < k < f(a)$$

จึงแยกการพิจารณาเป็น 2 กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $f(a) < k < f(b)$ จะกำหนดให้ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ โดยนิยาม

$$g(x) = f(x) - k \text{ สำหรับทุกๆ } x \in [a, b]$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ทำให้ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ

$$g(a) = f(a) - k < 0$$

และ

$$g(b) = f(b) - k > 0$$

ดังนั้น $g(a) < 0 < g(b)$ โดยทฤษฎีบท 5.1.7 จะได้ว่าจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $g(c) = 0$ นั่นคือ

$$0 = g(c) = f(c) - k$$

ดังนั้น $f(c) = k$

กรณีที่ 2 ถ้า $f(b) < k < f(a)$ จะกำหนดให้ $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ โดยนิยาม

$$h(x) = k - f(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x \in [a, b]$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ทำให้ได้ว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ

$$h(a) = k - f(a) < 0$$

และ

$$h(b) = k - f(b) > 0$$

ดังนั้น $h(a) < 0 < h(b)$ โดยทฤษฎีบท 5.1.7 จะได้ว่าจะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $h(c) = 0$ นั่นคือ

$$0 = h(c) = k - f(c)$$

ดังนั้น $f(c) = k$

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 5.1.8

ตัวอย่าง 5.1.6 กำหนดให้ $f(x) = x^3$ เมื่อ $x \in [-1, 1]$ จงหา $c \in [-1, 1]$ ที่ทำให้ $f(c) = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x^3$ เมื่อ $x \in [-1, 1]$ โดยที่

$$f(-1) = (-1)^3 = -1 \text{ และ } f(1) = 1^3 = 1$$

จากการกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ จะเห็นว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(-1) = -1$ และ $f(1) = 1$ ซึ่ง $0 \in (f(-1), f(1))$ โดยทฤษฎีบท 5.1.8 ทำให้ได้ว่าจะสามารถหา $c \in [-1, 1]$ ที่ทำให้ $f(c) = 0$ ได้ จึงทำให้ได้ว่า $c = 0$ ที่ทำให้ $f(0) = 0$ □

จากทฤษฎีบท 5.1.5 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด) และทฤษฎีบท 5.1.8 (ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง) จึงทำให้ได้รับบทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 5.1.1 ถ้ากำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ แล้วเรนจ์ของ f จะเป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต นั่นคือ $f(x) \in [m, M]$ เมื่อ

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ และ } m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและไม่เป็นฟังก์ชันคงที่บนช่วง $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.1.5 จะได้ว่า จะมี $x_1, x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$f(x_1) = m \text{ และ } f(x_2) = M$$

เนื่องจาก f ไม่เป็นฟังก์ชันคงที่ จะได้ว่า $m < M$ ถ้าให้ $k \in (m, M)$ จะได้ว่า

$$f(x_1) < k < f(x_2)$$

โดยทฤษฎีบท 5.1.8 จะได้ว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f(c) = k$ จึงทำให้สรุปได้ว่า

$$f(x) \in [m, M]$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น เรนจ์ของ f เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต □

ยิ่งไปกว่านั้น ในทางคณิตศาสตร์สิ่งที่สำคัญอีกสิ่งหนึ่งที่เป็นเครื่องมือและถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในคณิตศาสตร์ก็คือ จุดตรึง (fixed point) ได้มีการศึกษาอย่างมากในทางการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์และยังสามารถนำไปประยุกต์ได้ในหลากหลายด้านทั้งในคณิตศาสตร์และสาขาอื่นๆ มากมาย เช่น เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และอื่นๆ อีกมากมาย ดังจะเห็นได้จากงานวิจัยมากมายที่นำทฤษฎีบทจุดตรึงไปใช้ เช่น [10, 12, 15] เป็นต้น ดังนั้น ในความน่าสนใจที่ได้กล่าวมานี้ จึงทำให้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึง โดยนำความรู้เรื่องทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางที่กล่าวในข้างต้นมาใช้พิสูจน์ โดยจะเริ่มจากการนิยามจุดตรึงก่อน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.1.5 กำหนดให้ $f : X \rightarrow X$ เมื่อ X เป็นเซตใดๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง จะกล่าวว่า $x \in X$ เป็น *จุดตรึง (fixed point)* ของ f ถ้า $f(x) = x$ และสามารถใช้สัญลักษณ์ $Fix(f)$ หรือ $F(f)$ แทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ f ได้

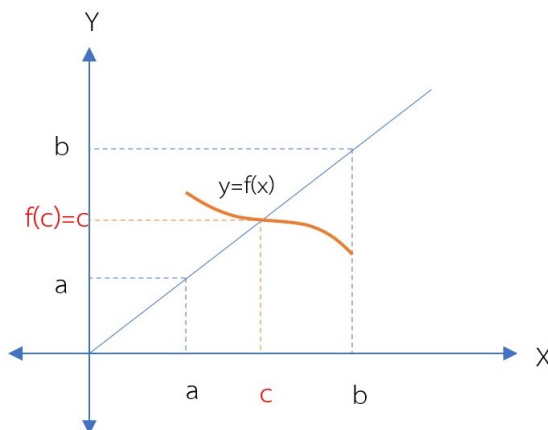
ต่อไปจะเป็นการพิสูจน์ว่าหากฟังก์ชันที่พิจารณานั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดแล้วฟังก์ชันนั้นจะมีจุดตรึงบนช่วงปิดนั้นด้วย ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.9 ถ้า $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f จะมีจุดตรึง นั่นคือ จะมีจุด $c \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(c) = c$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $f(x) \in [a, b]$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังรูป 5.2 ถ้า $f(a) = a$ หรือ $f(b) = b$ แล้วจะได้ว่า ทฤษฎีบทเป็นจริง

ดังนั้นจึงสมมติว่า $f(a) > a$ และ $f(b) < b$ และกำหนดให้ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$g(x) = x - f(x) \text{ สำหรับทุกๆ } x \in [a, b]$$



รูปที่ 5.2: จุดตรึง

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ ด้วย และ

$$g(a) = a - f(a) < 0$$

และ

$$g(b) = b - f(b) > 0$$

ทำให้ได้ว่า

$$g(a) < 0 < g(b)$$

โดยทฤษฎีบท 5.1.7 จะได้ว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $g(c) = 0$ ดังนั้น

$$c - f(c) = 0$$

นั่นคือ $f(c) = c$



5.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป

จากหัวข้อ 5.1. ได้มีการนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องที่ ณ จุดจุดหนึ่ง พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ และพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดจุดหนึ่งไปแล้วนั้น ดังนั้นเนื้อหาในหัวข้อนี้ จึงจะขยายการพิจารณาฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยถ้ากำหนดเซตใดเซตหนึ่งมาแล้วนำจุดสองจุดใดๆ บนเซตนั้นมาพิจารณาความต่อเนื่องแล้วเป็นไปตามนิยามความต่อเนื่อง จะนิยามฟังก์ชันที่พิจารณานั้นว่าเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแบบเอกรูป ดังบทนิยาม 5.2.1 พร้อมทั้งได้ยกตัวอย่างของฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป รวมทั้งได้ยกตัวอย่างของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องแต่ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปด้วย จากตัวอย่างนี้ทำให้ทราบว่าทุกฟังก์ชันที่ต่อเนื่องไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป ยกเว้นแต่ฟังก์ชันที่พิจารณานั้นเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต ฟังก์ชันต่อเนื่องนั้นจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปด้วย ดังบทพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.2.1 และในส่วนสุดท้ายของหัวข้อ ยังได้แนะนำฟังก์ชันทางเดียว และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันทางเดียวอีกด้วย

บทนิยาม 5.2.1 กำหนดให้ A เป็นเซตย่อยบนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป (*uniformly continuous function*) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ซึ่งทำให้สำหรับทุกๆ $x, y \in A$

$$\text{ถ้า } |x - y| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

ต่อไปจะยกตัวอย่างของฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป โดยใช้การพิสูจน์ตามบทนิยาม 5.2.1 และอีกตัวอย่างหนึ่งจะแสดงตัวอย่างของฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแต่ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2.1 กำหนดให้ $f(x) = 3x + 2$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนเซตจำนวนจริง

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ สำหรับทุก ๆ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |(3x_1 + 2) - (3x_2 + 2)| \\ &= 3|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้าเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ จะทำให้ได้ว่า ถ้า $|x_1 - x_2| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= 3|x_1 - x_2| \\ &< 3\delta \\ &= 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นโดยบทนิยาม 5.2.1 จึงทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $\mathbb{R}$ (จะสังเกตเห็นว่าค่า δ ที่เลือกขึ้นมานี้ขึ้นอยู่กับค่า ϵ เพียงค่าเดียว) $\square$

ตัวอย่าง 5.2.2 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ แต่ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $\mathbb{R}$

วิธีทำ กำหนดให้ $a \in \mathbb{R}$ และจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะเห็นว่า สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |x + a||x - a| \\ &\leq (|x| + |a|)|x - a| \end{aligned}$$

ถ้าจำนวนจริง $\delta \leq 1$ และ $|x - a| < \delta$ แล้วจะได้ว่า $|x - a| < 1$ โดยใช้คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ในบทแทรก 1.2.1 ข้อ (2) จึงทำให้ได้รับ $|x| < 1 + |a|$ ดังนั้น

$$|f(x) - f(a)| < (1 + 2|a|)|x - a| \tag{5.2}$$

และถ้า $\delta \leq \frac{\epsilon}{(1+2|a|)}$ และ $|x - a| < \delta$ จะทำให้ได้ว่า $|x - a| < \frac{\epsilon}{(1+2|a|)}$ ดังนั้น จาก (5.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< (1 + 2|a|)|x - a| \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้าเลือก $\delta = \min \left\{ 1, \frac{\epsilon}{(1+2|a|)} \right\}$ จะทำให้ได้ว่า

ถ้า $|x - a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(a)| < \epsilon$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a สำหรับทุก ๆ $a \in \mathbb{R}$ จึงทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ (จะสังเกตเห็นได้ชัดว่าค่า δ ที่เลือกมาในตัวอย่างนี้ขึ้นอยู่กับค่าของ ϵ และขึ้นอยู่กับค่าของ a ด้วย)

ต่อไปจะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $\mathbb{R}$ (นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ จะมี $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $|x_1 - x_2| < \delta$ แต่ $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$)

กำหนดให้ $\epsilon = 1$ พิจารณาสำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ กำหนดให้ $x_1 = \frac{1}{\delta}$ และ $x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ จะเห็นได้ชัดว่า $|x_1 - x_2| < \delta$ แต่จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 \right| \\ &= \left| \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 - \left(\left(\frac{1}{\delta}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \right) \right| \\ &= 1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงทำให้ได้ข้อสรุปว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน $\mathbb{R}$ □

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าฟังก์ชันต่อเนื่องอาจจะไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปได้ ในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะเห็นทฤษฎีบทที่แสดงให้เห็นว่า ถ้าหากฟังก์ชันต่อเนื่องที่พิจารณานั้นอยู่บนช่วงปิดที่มีขอบเขตแล้วฟังก์ชันนั้นจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิดนั้นด้วย

ทฤษฎีบท 5.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$

การพิสูจน์ จะพิสูจน์โดยใช้การแย้งกลับที่ นั่นคือ จะแสดงว่า ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$

สมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$ จากบทนิยาม 5.2.1 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\delta > 0$ จะมี $x, c \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$|x - c| < \delta \text{ แต่ } |f(x) - f(c)| \geq \epsilon$$

เนื่องจาก δ เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงทำให้ได้ว่า สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะมีลำดับบนจำนวนจริง $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งทำให้

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ แต่ } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

และเนื่องจาก $[a, b]$ เป็นเซตที่มีขอบเขต จึงทำให้ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบทของ Bolzano-Weierstrass (ทฤษฎีบท 3.3.5) ทำให้ได้ว่า จะมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า นั่นคือ จะมี $d \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = d$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |y_{n_k} - d| &\leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - d| \\ &< \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - d| \end{aligned}$$

จึงทำให้ได้ว่า เมื่อ $k \rightarrow \infty$ แล้ว $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = d$

ต่อไปจะแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด d สำหรับทุกๆ $\delta > 0$ และ $|x_{n_k} - d| < \delta$ โดยบทแทรก 1.2.1 จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}) - f(d)| &= |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) + f(y_{n_k}) - f(d)| \\ &= |(f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) - (f(d) - f(y_{n_k}))| \\ &\geq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| - |f(d) - f(y_{n_k})| \\ &\geq \epsilon - |f(d) - f(y_{n_k})| \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$|f(x_{n_k}) - f(d)| + |f(d) - f(y_{n_k})| \geq \epsilon$$

นั่นคือ มีอย่างน้อยหนึ่งลำดับของ $\{f(x_{n_k})\}$ หรือ $\{f(y_{n_k})\}$ ไม่ลู่เข้าไปยัง $f(d)$ โดยทฤษฎีบท 5.1.1 จึงทำให้ได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด d $\square$

จากตัวอย่าง 5.2.2 ได้พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ ว่าไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนเซตของ $\mathbb{R}$ แต่เมื่อพิจารณาบนโดเมนที่เป็นช่วงปิด จากทฤษฎีบท 5.2.1 จะทำให้ได้ว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป ซึ่งแสดงให้เห็นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.2.3 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ ทุกๆ $x \in [0, b]$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[0, b]$

วิธีทำ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และ $x_1, x_2 \in [0, b]$ จะเห็นว่า $|x_1 + x_2| \leq 2b$ และ

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq 2b|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

ถ้าเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{2b}$ จึงทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in [0, b]$ ถ้า $|x_1 - x_2| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq 2b|x_1 - x_2| \\ &< 2b \frac{\epsilon}{2b} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น โดยบทนิยาม 5.2.1 จึงทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[0, b]$ $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างของฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป

ตัวอย่าง 5.2.4 จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วง $(0, 1)$

วิธีทำ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0, 1)$ กำหนดให้ $\epsilon = \frac{1}{2}$ และจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีสได้ จะได้ว่า จะมีจำนวนนับ n ซึ่ง $\frac{1}{n} < \delta$ ถ้าให้ $x_1 = \frac{1}{n}$ และ $x_2 = \frac{1}{n+1}$ จะเห็นได้ชัดว่า $x_1, x_2 \in (0, 1)$ และ

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{n(n+1)} \right| \\ &< \frac{1}{n} \\ &< \delta \end{aligned}$$

และจะเห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \\ &= |n - (n+1)| \\ &= 1 \\ &> \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วง $(0, 1)$ □

ในส่วนสุดท้ายของหัวข้อนี้ จะขอแนะนำบทนิยามของฟังก์ชันทางเดียวตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.2.2 กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน เมื่อ A, B เป็นเซตใดๆ ซึ่งเป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างบนเซตจำนวนจริง จะกล่าวว่า

- (1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียว (monotone increasing function) บน A ถ้าสำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in A$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

- (2) f เป็นฟังก์ชันลดทางเดียว (monotone decreasing function) บน A ถ้าสำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in A$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

- (3) f เป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotone function) บน A ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวหรือฟังก์ชันลดทางเดียว

- (4) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing function) บน A ถ้าสำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in A$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- (5) f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ (strictly decreasing function) บน A ถ้าสำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in A$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ แล้ว

$$f(x_1) > f(x_2)$$

- (6) f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ (strictly monotone function) บน A ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้หรือฟังก์ชันลดโดยแท้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันทางเดียว โดยก่อนที่จะนำเสนอทฤษฎีบทต่อไป จะขอทบทวนบทนิยามของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งก่อน เพราะเป็นสมมติฐานหนึ่งที่จะถูกนำไปใช้เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ว่า สำหรับ f เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วงปิดนั้นด้วย ซึ่งจะพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไป

บทนิยาม 5.2.3 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one function) ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 5.2.2 กำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วงปิด $[a, b]$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบน $[a, b]$ เนื่องจาก $a < b$ จะได้ว่า $f(a) \neq f(b)$ นั่นคือ $f(a) < f(b)$ หรือ $f(a) > f(b)$

กรณีที่ 1 ถ้า $f(a) < f(b)$ และสมมติให้ f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า จะมีจุด $x_1, x_2 \in [a, b]$ ซึ่ง

$$x_1 < x_2 \text{ แต่ } f(x_1) > f(x_2)$$

เพราะจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า $f(x_1) \neq f(x_2)$ เนื่องจาก $x_1 < x_2 \in [a, b]$ จะเห็นว่า $x_1 \neq b$ ดังนั้น $f(x_1) > f(b)$ หรือ $f(x_1) < f(b)$

กรณีที่ 1.1 ถ้า $f(x_1) > f(b)$ จะเห็นว่า $f(x_1) > f(b) > f(a)$ โดยทฤษฎีบท 1.3.7 (ทฤษฎีบทความหนาแน่นของจำนวนจริง) สามารถเลือก $k \in (f(b), f(x_1))$ จึงจะได้ว่า $k \in (f(a), f(x_1))$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (ทฤษฎีบท 5.1.8) จะได้ว่า จะมีจุด $c_1 \in (a, x_1)$ ซึ่ง $f(c_1) = k$ และจะมีจุด $c_2 \in (x_1, b)$ ซึ่ง $f(c_2) = k$ แต่ $c_1 \neq c_2$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับที่กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

กรณีที่ 1.2 ถ้า $f(x_1) < f(b)$ จะได้ว่า $f(x_2) < f(b)$ สามารถเลือก $k \in (f(x_2), f(x_1))$ ทำให้ได้ว่า $k \in (f(x_2), f(b))$ โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะได้ว่า จะมีจุด $d_1 \in (x_1, x_2)$ ซึ่ง $f(d_1) = k$ จะมีจุด $d_2 \in (x_2, b)$ ซึ่ง $f(d_2) = k$ แต่ $d_1 \neq d_2$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง

จึงทำให้สรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บน $[a, b]$

กรณีที่ 2 ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(a) > f(b)$ จะเห็นว่า $-f(a) < -f(b)$ ใช้ผลลัพธ์จากข้างต้น จึงจะได้ว่า $-f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บนช่วงปิด $[a, b]$ นั่นก็คือ f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้บนช่วงปิด $[a, b]$ นั่นเอง $\square$

ต่อไปเป็นตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 5.2.2 ซึ่งเป็นการพิจารณาฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้โดยใช้การพิจารณาจากทฤษฎีบทข้างต้น

ตัวอย่าง 5.2.5 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \in [0, 2]$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บน $[0, 2]$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = \sqrt{x}$ เมื่อ $x \in [0, 2]$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง กำหนดให้ $x_1, x_2 \in [0, 2]$ จะเห็นว่า ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$$

ดังนั้น

$$x_1 = x_2$$

จึงสรุปได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 2]$ จะเห็นว่าสำหรับทุกๆ $a \in [0, 2]$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} = f(a)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0, 2]$ โดยทฤษฎีบท 5.2.2 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วงปิด $[0, 2]$ □

5.3 บทสรุป

จากการศึกษาในบทนี้ ผู้อ่านจะได้รู้จักนิยามของฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ ที่จุดจุดหนึ่งในบทนิยาม 5.1.1 ซึ่งเป็นสิ่งที่ถูกนำไปใช้ในการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันในทางแคลคูลัส พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ของคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่อง ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันที่ต่อเนื่องสองฟังก์ชันเมื่อนำมาบวกกัน คูณกัน หารกัน หรือประกอบกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง และต่อจากนั้นยังได้แนะนำฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทางซ้าย ทางขวา และฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตด้วย จากความรู้ที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ได้รับทฤษฎีบทที่สำคัญในบทนี้ คือ ทฤษฎีบทค่าสุดขีด (ทฤษฎีบทที่ 5.1.5) และทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (ทฤษฎีบท 5.1.8) และในหัวข้อสุดท้ายของบทนี้ ยังได้กล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปในบทนิยาม 5.2.1 แสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป และสุดท้ายของบทนี้ ยังได้ให้ผู้อ่านได้รู้จักฟังก์ชันทางเดียวซึ่งมักจะถูกใช้เป็นสมมติฐานการพิสูจน์ทฤษฎีบททั้งทางด้านการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีบทจุดตรึง และการศึกษาเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์และทฤษฎีบทอีกมากมายบนหลากหลายสาขาในทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อไป

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 และ g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 แล้ว $f + g$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด x_0
2. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ในโดเมนของ f ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ และ $x_n > x_0$ ทุกๆ $n = 1, 2, 3, \dots$
3. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ในโดเมนของ f ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ และ $x_n < x_0$ ทุกๆ $n = 1, 2, 3, \dots$
4. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด 0 และ $g(0) = 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|f(x)| \leq |g(x)|$ สำหรับทุกๆ $x \in N(0, \delta)$ สำหรับบาง $\delta > 0$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด 0
5. จงหา $M = \sup_{x \in A} f(x)$ และ $m = \inf_{x \in A} f(x)$ สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนเซต A และหาจุด $x_1, x_2 \in A$ ซึ่ง $f(x_1) = M$ และ $f(x_2) = m$
 - 5.1. $f(x) = 3 + 2x - x^2$ บน $[0, 4]$
 - 5.2. $f(x) = 2 - |x - 1|$ บน $[-2, 2)$
 - 5.3. $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ บน $(0, \infty)$
 - 5.4. $f(x) = 1 - x^2$ บน $(-2, 1)$
6. กำหนดให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(a) \leq g(a)$ และ $f(b) \geq g(b)$ จงพิสูจน์ว่า จะมีจุด $c \in [a, b]$ ซึ่ง $f(c) = g(c)$
7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนเซต I แล้ว $f + g$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนเซต I
8. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนเซต A และให้ k เป็นจำนวนจริงใดๆ จงพิสูจน์ว่า kf เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน A

บทที่ 6

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จากบทที่ 4 และบทที่ 5 ที่ผ่านมามีได้ศึกษาเรื่องของลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน รวมถึงทฤษฎีบทมากมายที่เกี่ยวข้องกับลิมิตของฟังก์ชันและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากความรู้ที่กล่าวมานั้น จึงทำให้สามารถนำไปใช้ในการศึกษาในเรื่องของอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้ เพราะว่าความรู้ในเรื่องของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้นั้นยังคงต้องใช้ความรู้เรื่องของลิมิตดังจะเห็นได้จากบทนิยาม 6.1.1 โดยอนุพันธ์เป็นเครื่องมือทางแคลคูลัสที่ถูกนำไปใช้ในหลากหลายด้าน อีกทั้งยังถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการศึกษาทางวิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ ฟิสิกส์ และทางวิทยาศาสตร์ เป็นต้น ในหัวข้อนี้เราจึงจะนำเสนอ บทนิยามของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทั้งทางซ้ายและทางขวา และแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง อีกทั้งได้นำเสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทของคุณสมบัติของการดำเนินการของอนุพันธ์ที่ถูกใช้ในทางแคลคูลัส เช่น สองฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ เมื่อนำมาบวก คูณ หรือหารกัน ยังได้ผลลัพธ์เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ รวมถึงกฎลูกโซ่ เป็นต้น ต่อจากนั้น ได้นำเสนอบทนิยามของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ซึ่งเป็นเรื่องหนึ่งที่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา ยกตัวอย่างเช่น ทางด้านเศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น โดยในทางเศรษฐศาสตร์นั้นมักจะถูกนำไปใช้ในการพิจารณาจุดดุลยภาพของปัญหาที่สนใจ ยิ่งไปกว่านั้น ในส่วนนี้ยังได้แนะนำทฤษฎีบทที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันพร้อมบทพิสูจน์ คือ ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's theorem) ทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน (mean-value theorem) และทฤษฎีบทค่ามัธยฐานของโคชี (Cauchy-mean value theorem) ซึ่งทฤษฎีบทเหล่านี้มักถูกนำไปใช้ในการคำนวณด้วยเช่นกัน นอกจากนี้ยังสามารถนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ไปช่วยในการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันได้อีกด้วย ซึ่งเป็นเครื่องมือหนึ่งที่สำคัญและน่าสนใจ โดยมีลักษณะที่ง่ายต่อการนำไปใช้ นั่นคือ หลักเกณฑ์โลปีตาล นั่นเอง โดยหลักเกณฑ์นี้จะนำไปใช้ช่วยในการหาค่าลิมิตในกรณีที่รูปแบบของฟังก์ชันของลิมิตที่ต้องการหาค่านั้นมีรูปแบบ เช่น $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ เป็นต้น ซึ่งไม่สามารถหาค่าลิมิตได้ด้วยวิธีการตามปกติ โดยหลักเกณฑ์นี้จะทำให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างเรื่องของอนุพันธ์และลิมิตนั่นเอง ซึ่งในบทนี้จึงได้นำเสนอการพิสูจน์ทฤษฎีบทของโลปีตาลไว้ในหัวข้อ 6.3 ด้วย และส่วนสุดท้ายของบทได้กล่าวถึงอนุพันธ์อันดับสูง นั่นคือ การหาอนุพันธ์ตั้งแต่อันดับสองเป็นต้นไป รวมถึงทฤษฎีบทที่รู้จักกันดีในเรื่องของอนุพันธ์อันดับสูง นั่นคือ ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่ถูกใช้ในทางแคลคูลัสและคณิตศาสตร์ประยุกต์อย่างมากมาย เช่น ในรายวิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข หรือสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น

6.1 อนุพันธ์

ในหัวข้อนี้จะเริ่มต้นจากการให้บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันก่อน

บทนิยาม 6.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนบางย่านใกล้เคียง $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ จะกล่าวว่า อนุพันธ์ (derivative) ของ f ที่จุด x_0 ถ้า

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (6.1)$$

และถ้าลิมิตของ (6.1) หาค่าได้ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด x_0 และจะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บนเซต A ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุด $x_0 \in A$ เมื่อ A เป็นเซตย่อยใดๆบน $\mathbb{R}$

ดังนั้น จึงสามารถกล่าวได้ว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันซึ่งโดเมนของฟังก์ชัน f' คือ เซตของจุด x_0 ทั้งหมดซึ่ง $f'(x_0)$ หาค่าได้ นอกจากนี้ยังมีสัญลักษณ์อื่นๆ ของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เช่น $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ และ y' เป็นต้น

ต่อไปเป็นการแสดงตัวอย่างของการพิสูจน์ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้สามารถหาอนุพันธ์ได้ โดยใช้บทนิยามของอนุพันธ์ (บทนิยาม 6.1.1) ในการพิจารณา

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ทุกๆ จุด $x \in \mathbb{R}$

วิธีทำ จะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $x > 0$ แล้ว $f(x) = x^2$ ดังนั้น จะเห็นว่าถ้า $x_0 > 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \end{aligned}$$

ซึ่ง $x_0 + h > 0$ เมื่อ $|h|$ มีค่าน้อยเพียงพอ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) \\ &= 2x_0 \\ &= 2|x_0| \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $x < 0$ แล้ว $f(x) = -x^2$ ดังนั้น จะเห็นว่าถ้า $x_0 < 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x_0 + h)^2 + x_0^2}{h} \end{aligned}$$

ซึ่ง $x_0 + h < 0$ เมื่อ $|h|$ มีค่าน้อยเพียงพอ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2x_0h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x_0 - h) \\ &= -2x_0 \\ &= 2|x_0| \end{aligned}$$

กรณีที่ 3 ถ้า $x_0 = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ ดังนั้น จะเห็นว่าถ้า $x_0 = 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} |h| \\ &= 0 \\ &= 2|x_0| \end{aligned}$$

จากทั้ง 3 กรณี จึงสรุปได้ว่า $f'(x) = 2|x|$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ □

ตัวอย่าง 6.1.2 กำหนดให้ $f(x) = k$ เป็นฟังก์ชันคงตัว สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ และ k เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $f'(x) = 0$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = k$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่างถัดไปจะเป็นการแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ โดยใช้บทนิยาม 6.1.1

ตัวอย่าง 6.1.3 กำหนดให้ $f(x) = |x|$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด $x = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก ถ้า $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$ หาค่าได้ แล้วค่าลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาต้องมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

จะเริ่มจากพิจารณากรณีที่ $h \rightarrow 0^+$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า $h > 0$ ดังนั้น $f(h) = |h| = h$ และ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

แต่ถ้าพิจารณากรณีที่ $h \rightarrow 0^-$ จะเห็นว่า $h < 0$ ดังนั้น $f(h) = |h| = -h$ และ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่าลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวามีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ หาค่าไม่ได้ จึงทำให้ได้ว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ ณ ที่จุด $x = 0$ □

จากตัวอย่างข้างต้นจึงทำให้เห็นว่า การพิจารณาหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันยังมีการใช้ความรู้ในเรื่องของค่าลิมิตทางซ้ายและค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันมาพิจารณา ซึ่งลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชันได้ศึกษาไปแล้วในหัวข้อที่ 4.2 ดังนั้น ต่อไปจึงจะนำความรู้เรื่องลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชันไปใช้ในการพิจารณาอนุพันธ์ทางขวาและอนุพันธ์ทางซ้าย และอนุพันธ์บนช่วงปิดของฟังก์ชันอีกด้วย รายละเอียดดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.1.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ จะกล่าวว่า f หาอนุพันธ์ทางขวาได้ (right differentiable) ที่จุด a ถ้าลิมิต $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ หาค่าได้ โดยจะเขียนแทนด้วย $f'(a^+)$ และจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ทางซ้ายได้ (left differentiable) ที่จุด b ถ้าลิมิต $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$ หาค่าได้ โดยจะเขียนแทนด้วย $f'(b^-)$

บทนิยาม 6.1.3 ถ้า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุด $x_0 \in (a, b)$ หาอนุพันธ์ทางขวาได้ที่จุด a และหาอนุพันธ์ทางซ้ายได้ที่จุด b แล้วจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด (differentiable on interval) $[a, b]$

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นการแสดงว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุดๆ หนึ่งแล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดๆ นั้นด้วย

ทฤษฎีบท 6.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x_0 แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x_0 โดยบทนิยาม 6.1.1 จะได้ว่า

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

หาค่าได้ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] (x - x_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= (f'(x_0))(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 □

จากบทพิสูจน์ข้างต้นทำให้ได้รับบทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 6.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ทางขวาได้ที่จุด a แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่จุด a และถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ทางซ้ายได้ที่จุด b แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางซ้ายที่จุด b

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด □

สำหรับทฤษฎีบทถัดไปจะเป็นการกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของผลบวกของฟังก์ชัน ผลคูณของฟังก์ชันและผลหารของฟังก์ชัน ซึ่งถือว่าเป็นหัวใจในเรื่องอนุพันธ์เลยทีเดียว โดยได้แสดงบทพิสูจน์ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1.2 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) สำหรับจำนวนจริง k ใดๆ ฟังก์ชัน kf จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(kf)'(c) = k(f'(c))$$

- (2) ฟังก์ชัน $f + g$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

- (3) ฟังก์ชัน fg จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(fg)'(c) = f(c)g'(c) + g(c)f'(c)$$

- (4) สำหรับ $g(c) \neq 0$ ฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{[g(c)]^2}$$

การพิสูจน์ ข้อ (1) และ (2) เป็นแบบฝึกหัด

- (3) จะแสดงว่าฟังก์ชัน fg จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $(fg)'(c) = f(c)g'(c) + g(c)f'(c)$ สำหรับทุกๆ x ในโดเมนของ fg ซึ่ง $x \neq c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x - c} &= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(c) + f(x)g(c) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= f(x)\frac{g(x) - g(c)}{x - c} + g(c)\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \end{aligned}$$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จะได้ว่า

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

และ

$$g'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

แล้วยังได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ และ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (fg)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{(fg)(x) - (fg)(c)}{x - c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(x) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] + \lim_{x \rightarrow c} \left[g(c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(x) \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} g(c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= f(c)g'(c) + f'(c)g(c) \end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า fg เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

(4) กำหนดให้ $g(c) \neq 0$ จะแสดงว่า ฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(c) = \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

เนื่องจากฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c ทำให้ได้ว่า

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

และ

$$g'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

แล้วยังได้ว่า $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ กับ $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$ ทำให้ได้ว่า จะมีช่วงเปิด $(c - \delta, c + \delta)$ ซึ่ง $g(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (c - \delta, c + \delta)$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ x ในโดเมนของ $\frac{f}{g}$ ซึ่ง $x \in N^*(c, \delta)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(c) &= \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)} \\ &= \frac{g(c)f(x) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)} \\ &= \frac{g(c)f(x) - g(c)f(c) + g(c)f(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)} \\ &= [g(c)f(x) - g(c)f(c) + g(c)f(c) - f(c)g(x)] \cdot \frac{1}{g(x)g(c)} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g} \right)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f}{g}(x) - \frac{f}{g}(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left\{ \frac{g(c)f(x) - g(c)f(c) + g(c)f(c) - f(c)g(x)}{x - c} \cdot \frac{1}{g(x)g(c)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left\{ \left[g(c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \left[\frac{1}{g(x)g(c)} \right] \right\} \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow c} g(c) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - \lim_{x \rightarrow c} f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \left[\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)g(c)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (g(c)f'(c) - f(c)g'(c)) \frac{1}{(g(c))^2} \\
 &= \frac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}
 \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

□

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทของอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันกำลัง ซึ่งมีทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1.3 สำหรับทุกๆ จำนวนเต็ม $n \neq 0$ ฟังก์ชัน $f(x) = x^n$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ โดยที่

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ และ nx^{n-1} หาค่าได้

การพิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง $n > 0$ จะใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ โดยกำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ " $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ " จะแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง ซึ่งจะเห็นว่า

$$\frac{d(x^1)}{dx} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{z - x}{z - x} = 1 = (1)x^{1-1}$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ต่อไปสมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $\frac{d(x^k)}{dx} = kx^{k-1}$ จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^{k+1}) &= \frac{d}{dx}(x^k \cdot x) \\
 &= x^k \frac{d}{dx}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(x^k) \\
 &= x^k(1) + x \cdot (kx^{k-1}) \\
 &= x^k + kx^k \\
 &= (k+1)x^k \\
 &= (k+1)x^{k(k+1)-1}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ เป็นจริงสำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

ต่อไปสำหรับทุกๆ $m \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า $-m < 0$ ดังนั้นจะพิจารณาอนุพันธ์ของ x^{-m} ว่าจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(x^{-m}) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^m} \right) \\
 &= \frac{x^m \cdot \frac{d}{dx}(1) - 1 \cdot \frac{d}{dx}(x^m)}{(x^m)^2} \\
 &= \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1} \cdot 1}{x^{2m}} \\
 &= -mx^{-m-1}
 \end{aligned}$$

จึงทำให้สรุปได้ว่า สำหรับทุกๆ n ที่เป็นจำนวนเต็มลบแล้ว $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$ ด้วย

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 6.1.2 และทฤษฎีบท 6.1.3 มาใช้พิจารณาหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 6.1.4 กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 12}{2x + 1}$ จงหาอนุพันธ์ของ $f(x)$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 6.1.2 และทฤษฎีบท 6.1.3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{2x^3 - 5x + 12}{2x + 1} \right) \\ = & \frac{(2x + 1) \frac{d}{dx}(2x^3 - 5x + 12) - (2x^3 - 5x + 12) \frac{d}{dx}(2x + 1)}{(2x + 1)^2} \\ = & \frac{(2x + 1) \left(\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(12) \right) - (2x^3 - 5x + 12) \left(\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) \right)}{(2x + 1)^2} \\ = & \frac{(2x + 1)(2(3x^2) - 5) - (2x^3 - 5x + 12)(2)}{(2x + 1)^2} \\ = & \frac{(2x + 1)(6x^2 - 10) - (4x^3 - 10x + 24)}{(2x + 1)^2} \\ = & \frac{12x^3 - 20x + 6x^2 - 10 - 4x^3 + 10x - 24}{(2x + 1)^2} \\ = & \frac{8x^3 + 6x^2 - 10x - 34}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญในการหาอนุพันธ์อีกเช่นกัน นั่นคือ กฎลูกโซ่ ซึ่งมักจะถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนในทางแคลคูลัส โดยเป็นการพิจารณาการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบนั่นเอง จะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 6.1.4 [กฎลูกโซ่ (chain rule)] ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $f(c)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(g \circ f)'(c) = [g'(f(c))]f'(c)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $f(c)$ นั่นคือ

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{และ} \quad g'(f(c)) = \lim_{y \rightarrow f(c)} \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)}$$

จะนิยามฟังก์ชัน h โดยกำหนดให้

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(c))}{y - f(c)}; & \text{ถ้า } y \neq f(c) \\ g'(f(c)); & \text{ถ้า } y = f(c) \end{cases}$$

ทำให้ได้ว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(c)$ เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c โดยทฤษฎีบท 6.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด c ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 5.1.3 ฟังก์ชันประกอบ $h \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อ

เนื่องจากจุด c ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} (h \circ f)(x) &= (h \circ f)(c) \\ &= h(f(c)) \\ &= g'(f(c))\end{aligned}$$

และจากนิยามของ h จะเห็นว่า

$$g(y) - g(f(c)) = h(y)[y - f(c)]$$

สำหรับทุกๆ y ในโดเมนของ h และ $y \neq f(c)$ ดังนั้น เนื่องจาก $y = f(x)$ จึงได้ว่า

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) = (h \circ f)(x)[f(x) - f(c)]$$

เพราะฉะนั้นถ้า $x \in N^*(c, \delta)$ สำหรับบาง $\delta > 0$ แล้ว

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} = (h \circ f)(x) \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right]$$

และเมื่อพิจารณา $x \rightarrow c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (h \circ f)(x) \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\ &= g'(f(c)) [f'(c)]\end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c □

ตัวอย่างต่อไปเป็นการนำทฤษฎีบท 6.1.4 มาใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

วิธีทำ จากกำหนดให้ $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ ต้องการหา $f'(x)$ ซึ่งจะกำหนดให้ $g(x) = \cos x$ และ $h(x) = x^2 + 1$ ดังนั้น $g \circ h(x) = g(h(x)) = g(x^2 + 1) = \cos(x^2 + 1)$ โดยจะเห็นว่าฟังก์ชัน f และ g หาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\frac{d(f(x))}{dx} &= \frac{d(\cos(x^2 + 1))}{dx} \\ &= \frac{d(\cos(x^2 + 1))}{dx} \cdot \frac{d(x^2 + 1)}{dx} \\ &= -\sin(x^2 + 1) \cdot (2x) \\ &= -2x \sin(x^2 + 1)\end{aligned}$$

□

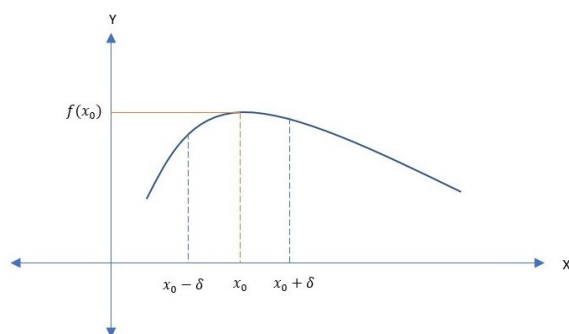
6.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

จากหัวข้อแรกได้กล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้พร้อมทั้งได้ยกตัวอย่างประกอบ และทฤษฎีบทเบื้องต้นเกี่ยวกับการดำเนินการของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึง คุณสมบัติเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับการหาอนุพันธ์ได้ นั่นคือ การนิยามค่าสูงสุดและต่ำสุดเฉพาะที่ ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ พร้อมทั้งยังพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญในเรื่องของอนุพันธ์ ยกตัวอย่างเช่น ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's theorem) ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (mean-value theorem) และทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของโคชี (Cauchy mean-value theorem) เป็นต้น โดยจะเริ่มต้นด้วยการกล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันค่าสูงสุดและต่ำสุดเฉพาะที่ก่อน

บทนิยาม 6.2.1 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $x_0 \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum) ของฟังก์ชัน f ถ้ามีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$f(x) \leq f(x_0)$$

สำหรับทุกๆ $x \in N(x_0, \delta)$ และจะเรียกจุด x_0 ว่า จุดสูงสุดเฉพาะที่ (local maximum point) ดังรูป 6.1 และจะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าต่ำสุดเฉพาะที่ (local minimum) ของฟังก์ชัน f ถ้ามีจำนวนจริง



รูปที่ 6.1: ค่าสูงสุดเฉพาะที่

$\delta > 0$ ซึ่งทำให้

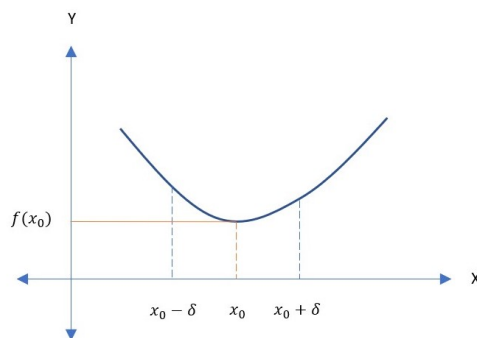
$$f(x) \geq f(x_0)$$

สำหรับทุก $x \in N(x_0, \delta)$ และจะเรียกจุด x_0 ว่าจุดต่ำสุดเฉพาะที่ (local minimum point) ดังรูป 6.2 และจะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดเฉพาะที่ (local extrem) ถ้า $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดเฉพาะที่หรือค่าต่ำสุดเฉพาะที่ และจะเรียกจุด x_0 ว่าจุดสุดขีดเฉพาะที่ (local extrem point)

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของค่าต่ำสุดและสูงสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.2.2 กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันใดๆ และ x_0 เป็นจุดที่อยู่ในช่วง I เมื่อ I เป็นเซตย่อยบนเซตของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของฟังก์ชัน f บน I ถ้า

$$f(x) \leq f(x_0)$$



รูปที่ 6.2: ค่าต่ำสุดเฉพาะที่

สำหรับทุกๆ $x \in I$ และจะเรียกจุด x_0 ว่าจุดสูงสุด (maximum point) ของ f บน I และจะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ของฟังก์ชัน f บน I ถ้า

$$f(x) \geq f(x_0)$$

สำหรับทุกๆ $x \in I$ และจะเรียกจุด x_0 ว่าจุดต่ำสุด (minimum point) ของ f บน I

ยิ่งไปกว่านั้น จะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ (absolute extrem) ถ้า $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ และจะเรียกจุด x_0 ว่าจุดสุดขีด (extrem point) ของ f บน I

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้า $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f เมื่อ $x_0 \in \mathbb{R}$ แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้

การพิสูจน์ กำหนดให้ $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน f เมื่อ $x_0 \in \mathbb{R}$ จะแสดงว่า $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ สมมติให้ $f'(x)$ หาค่าได้ และจาก $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดเฉพาะที่จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$f(x) \leq f(x_0)$$

สำหรับทุกๆ $x \in N(x_0, \delta)$ ดังนั้น ถ้า $x_0 < x < x_0 + \delta$ แล้ว

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

และถ้า $x_0 - \delta < x < x_0$ แล้ว

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

เนื่องจาก $f'(x_0)$ หาค่าได้ จึงทำให้ได้ว่า

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

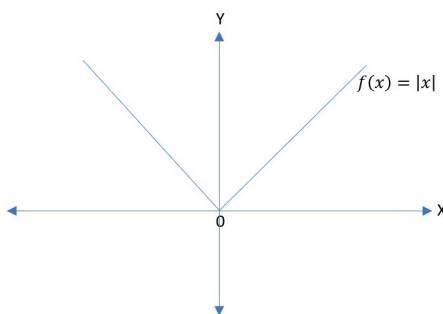
หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

นั่นคือ $f'(x_0) = 0$

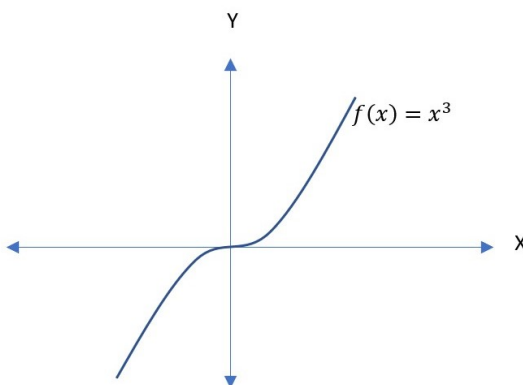
□

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสุดขีดเฉพาะที่อยู่ที่จุด 0 ที่ซึ่ง $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ ดังรูป 6.3



รูปที่ 6.3: $f(x) = |x|$

นอกจากนี้ บทกลับของทฤษฎีบท 6.2.1 ไม่เป็นจริง ยกตัวอย่างเช่น ถ้ากำหนดให้ $f(x) = x^3$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ แล้ว $f'(0) = 0$ แต่จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บนเซต $\mathbb{R}$ ดังรูป 6.4 นั่นหมายความว่า ไม่สามารถหาค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชันนี้ได้



รูปที่ 6.4: $f(x) = x^3$

จากทฤษฎีบท 6.2.1 ได้มีการพิจารณาค่า $f'(x_0) = 0$ สำหรับ $x_0 \in \mathbb{R}$ ไปแล้วนั้น ต่อไปจะนำการพิจารณาดังกล่าวไปแนะนำบทนิยามของจุดวิกฤตของฟังก์ชัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 6.2.3 จุด x_0 จะถูกเรียกว่า จุดวิกฤต (critical point) ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ $f'(x_0)$ หาค่าไม่ได้ และในกรณีนี้จะกล่าวว่า $f(x_0)$ เป็นค่าวิกฤต (critical value) ของ f สำหรับ $x_0 \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับจุดวิกฤต โดยทฤษฎีบทต่อไปเป็นการแสดงว่า สำหรับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต ฟังก์ชันดังกล่าวนี้จะมีค่าสุดขีด โดยค่าสุดขีดอาจจะเป็นค่าวิกฤตหรือค่า ณ ที่จุดขอบของช่วงปิด ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 6.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ แล้ว f จะมีจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดบนช่วง $[a, b]$ โดยที่จุดสุดขีดดังกล่าวจะอยู่ที่จุดใดจุดหนึ่งต่อไปนี้

- 1) จุด c ซึ่ง $f'(c) = 0$ หรือ
- 2) จุดซึ่ง f หาค่าอนุพันธ์ไม่ได้ หรือ
- 3) จุด $(a, f(a))$ หรือ $(b, f(b))$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.1.5 จะได้ว่า f จะมีจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดบน $[a, b]$

สมมติให้ $x_1 \in [a, b]$ เป็นจุดสูงสุด (จุดต่ำสุด) ของฟังก์ชัน f ถ้า $x_1 = a$ หรือ $x_1 = b$ แล้วจะสอดคล้องกับข้อ 3)

ต่อไปถ้า x_1 ไม่สอดคล้องข้อ 3) จะได้ว่า $x_1 \in (a, b)$ แล้วเป็นไปได้ 2 อย่างคือ $f'(x_1)$ หาค่าได้หรือ $f'(x_1)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้าข้อ 2) ไม่จริง แล้ว f' หาค่าได้ จึงทำให้ได้ว่า $f'(x_1) = 0$ ดังนั้น 1) เป็นจริง $\square$

ในทฤษฎีบทต่อไปเป็นการแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และค่าเรนจ์ ณ ที่จุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเท่ากันแล้วจะมีจุดๆ หนึ่งบนช่วงดังกล่าวที่หาอนุพันธ์แล้วได้ค่าเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นทฤษฎีที่เป็นที่รู้จักกันในชื่อ ทฤษฎีบทของโรลล์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.3 [ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's theorem)] ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $f(a) = f(b)$ แล้วจะมีจุด $x_0 \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(x_0) = 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $f(a) = f(b)$ จะแสดงว่า จะมีจุด $x_0 \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $f'(x_0) = 0$

ถ้า $f(x) = f(a)$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ ดังนั้น

$$f'(x) = 0$$

สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ ดังนั้น จึงสมมติว่ามีจุด $x \in (a, b)$ ซึ่ง $f(x) \neq f(a)$ โดยทฤษฎีบท 5.1.5 จะได้ว่า จะมีจุด $x_1, x_2 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้

$$f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ เนื่องจาก f ไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว และ $f(a) = f(b)$ จะได้ว่า จะมีจุด $x_0 \in [a, b]$ ซึ่งทำให้ $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดสัมบูรณ์ของ f บนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ ดังนั้น $f(x_0)$ เป็นค่าสุดขีดเฉพาะที่ของ f ด้วย และเนื่องจาก $f'(x_0)$ หาค่าได้ โดยทฤษฎีบท 6.2.1 จะได้ว่า

$$f'(x_0) = 0$$

□

ต่อไปขอยกตัวอย่างเพื่อประกอบความเข้าใจในทฤษฎีบท 6.2.3 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [-2, 2]$ จงหาจุด $x_0 \in (-2, 2)$ ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$

การพิสูจน์ จากกำหนดให้ $f(x) = x^2$ เมื่อ $x \in [-2, 2]$ จะพิจารณาโดยใช้ทฤษฎีบท 6.2.3 จะเห็นว่า จากการกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[-2, 2]$ และฟังก์ชัน f สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(-2, 2)$ และ

$$f(-2) = (-2)^2 = 4 = (2)^2 = f(2)$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.2.3 จึงทำให้ได้ว่า จะมีจุด $x_0 \in (-2, 2)$ ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$ ซึ่ง

$$f'(x_0) = \frac{d(x_0^2)}{dx_0} = 2x_0$$

ดังนั้น จึงได้ว่า $x_0 = 0$ ที่ทำให้ $f'(x_0) = 0$

□

ต่อไปจะขอเสนอทฤษฎีบทที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์และเป็นที่รู้จักกันดี นั่นคือ ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานและทฤษฎีบทค่ามัธยฐานของโคชี ซึ่งมักถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในการหาค่าของอนุพันธ์ ณ จุดจุดหนึ่งอยู่เสมอ โดยในทฤษฎีบทเหล่านี้ยังมีความเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ของฟังก์ชันอีกด้วย มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

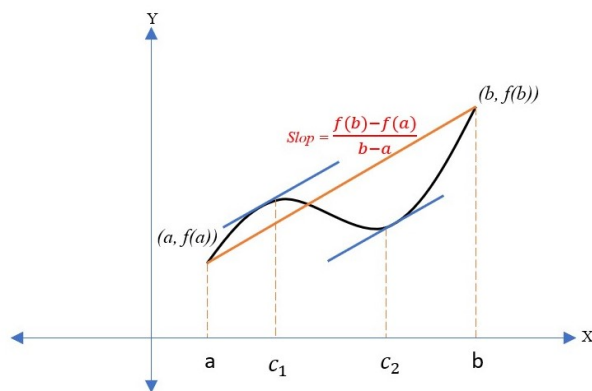
ทฤษฎีบท 6.2.4 [ทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน (mean-value theorem)] ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) แล้วจะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ดังรูป 6.5

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) จะแสดงว่า จะมีจุด $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ดังนั้น จึงจะเริ่มจากการนิยามฟังก์ชัน $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$g(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)]$$



รูปที่ 6.5: ทฤษฎีบทค่ามัธมิม

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ซึ่งเห็นได้ชัดแล้วว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 g(a) &= f(a)(b-a) - a[f(b) - f(a)] \\
 &= f(a) \cdot b - f(a) \cdot a - a \cdot f(b) + a \cdot f(a) \\
 &= f(a) \cdot b - a \cdot f(b) \\
 &= f(a) \cdot b - f(b) \cdot b + f(b) \cdot b - a \cdot f(b) \\
 &= b \cdot [f(a) - f(b)] + f(b) \cdot [b - a] \\
 &= f(b) \cdot [b - a] - b \cdot [f(b) - f(a)] \\
 &= g(b)
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 6.2.3 จะได้ว่า จะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่ง $g'(c) = 0$ ดังนั้น

$$f'(c)(b-a) - f(b) - f(a) = g'(c) = 0$$

นั่นคือ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

ตัวอย่าง 6.2.2 กำหนดให้ $M > 0$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ โดยที่ $|f'(x)| \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \quad (6.2)$$

สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

วิธีทำ กำหนดให้ $M > 0$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ x สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบท 6.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ ดังนั้นจึงทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[y, x]$

และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (y, x) สำหรับทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า จะมี $z \in (y, x)$ ซึ่งทำให้

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

ดังนั้น

$$|f'(z)| = \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

เนื่องจาก $|f'(x)| \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in \mathbb{R}$ และจาก $z \in \mathbb{R}$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M$$

ดังนั้น

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ □

หมายเหตุ เงื่อนไข (6.2) จะถูกเรียกว่า เงื่อนไขลิปชิตซ์ (Lipschitz's condition)

เงื่อนไขลิปชิตซ์เป็นเงื่อนไขที่สำคัญและน่าสนใจ เพราะถูกไปใช้ในการพิสูจน์สำหรับศึกษาในเนื้อหาในระดับที่สูงขึ้น และยังเป็นเครื่องมือที่สำคัญและถูกนำไปใช้ทั้งในคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์ ยกตัวอย่างเช่นการใช้เงื่อนไขของลิปชิตซ์ในการการันตีการมีผลเฉลยของปัญหาวามีเพียงค่าเดียว ยกตัวอย่างเช่น บนปัญหาของระบบพลวัตบน $\mathbb{R}^n$ โดยลักษณะของปัญหาของระบบพลวัต (dynamical system) คือ สำหรับ $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ เมื่อ $t \in \mathbb{R}$ และเขียนแทน $\phi_t(x)$ ด้วย $x(t)$ จะกล่าวว่า ϕ_t เป็นระบบพลวัต ถ้า

$$\frac{d(x(t))}{dt} = f(x(t))$$

และถ้า x เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้แล้ว x จะเป็นผลเฉลยของระบบพลวัตด้วย และสำหรับ

$$\frac{d(x(t))}{dt} = f(x(t))$$

หาค่าได้ เมื่อ $t_0 \leq t \leq T$ และ $x(t_0) = x_0$ แล้ว $x(t)$ จะกล่าวว่า เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น (initial value problem) โดยจะเห็นว่าปัญหาของระบบพลวัตกับปัญหาค่าเริ่มต้นมีความเกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กัน และถ้าหากฟังก์ชันที่พิจารณา มีเงื่อนไขของลิปชิตซ์เป็นจริงแล้วจะทำให้ได้รับผลลัพธ์ที่ว่า ปัญหาค่าเริ่มต้นจะมีผลเฉลยและมีเพียงค่าเดียว ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.5 กำหนดให้ f ฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้และอนุพันธ์นั้นต่อเนื่องบน $\mathbb{R}^n$ และ f สอดคล้องเงื่อนไขของลิปชิตซ์ แล้วจะได้ว่า สำหรับทุกๆ $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ปัญหาค่าเริ่มต้นจะมีผลเฉลยและมีเพียงค่าเดียว $x(t)$ สำหรับทุกๆ $t \in \mathbb{R}$

จากทฤษฎีบทนี้ทำให้สรุปได้ว่า หากฟังก์ชันที่พิจารณาสอดคล้องเงื่อนไขของลิปชิตซ์แล้วจะทำให้ได้ว่าปัญหาค่าเริ่มต้นของฟังก์ชันนั้นจะมีผลเฉลยและมีเพียงค่าเดียว และสามารถนำการพิจารณาดังกล่าวมาพิจารณาผลเฉลยของปัญหาของระบบพลวัตได้ด้วยเช่นเดียวกัน จากผลลัพธ์ข้างต้นนี้ ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้กันอย่างต่อเนื่องจนถึงปัจจุบันนี้ ดังดูได้จากผลงานวิจัยในเรื่องของระบบพลวัต [17, 18, 26, 27] และยิ่งไปกว่านั้น ยังได้นำการศึกษาเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในงานด้านเศรษฐศาสตร์ ดังดูได้จาก [19] เป็นต้น

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชันอนุพันธ์ นั่นคือ ทฤษฎีบทค่ามัธมิมของโคชี โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.6 [ทฤษฎีบทค่ามัธมิมของโคชี (Cauchy mean-value theorem)] ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) แล้วจะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด □

ทฤษฎีบทสุดท้ายของหัวข้อนี้ เป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้กับฟังก์ชันทางเดียว โดยถ้ามีฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และมีบางเงื่อนไขที่เกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นแล้ว สามารถทำให้ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียว ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 6.2.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $f'(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวบนช่วง (a, b)

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $f'(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวบนช่วง (a, b)

กำหนดให้ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ซึ่ง $x_1 < x_2$ โดยทฤษฎีบท 6.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขต $[x_1, x_2]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (x_1, x_2) โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่าจะมีจุด $x_0 \in (x_1, x_2)$ ซึ่งทำให้

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

เนื่องจาก $x_2 - x_1 > 0$ และ $f'(x_0) \geq 0$ ทำให้ได้ว่า $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ดังนั้น

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวบนช่วง (a, b) □

6.3 หลักเกณฑ์โลปีตาล

จากที่กล่าวมาข้างต้น ได้แนะนำฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และคุณสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ พร้อมทั้งทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้มาแล้ว แต่ยังคงมีอีกส่วนหนึ่ง

ของการหาอนุพันธ์ที่น่าสนใจ ที่ได้ถูกนำไปใช้ในการหาค่าของลิมิตของฟังก์ชันซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนด เช่น $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ เป็นต้น โดยจะกล่าวถึงการพิจารณาลิมิตและอนุพันธ์ของรูปแบบยังไม่กำหนดที่ได้กล่าวมา โดยวิธีการที่ช่วยในการหาคำตอบก็คือ หลักเกณฑ์ของโลปีตาล (l'Hôpital's rule) ซึ่งถูกนำไปใช้ในการคำนวณค่าของลิมิตของฟังก์ชัน นอกจากรูปแบบยังไม่กำหนดที่กล่าวมาแล้วยังมีรูปแบบอื่นๆ ที่สามารถใช้หลักเกณฑ์ของโลปีตาลในการพิจารณาได้ เช่น รูปแบบ $0 \cdot x^\infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0$ และ 0^∞ เป็นต้น ดังนั้น ต่อไปจึงจะขอกล่าวถึงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทของโลปีตาล

ทฤษฎีบท 6.3.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้บนเซต $N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ และให้ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$ หาค่าได้ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ จะหาค่าได้ และ

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

การพิสูจน์ จะนิยามฟังก์ชัน F และ G ดังต่อไปนี้

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } x \neq a \\ 0 & \text{ถ้า } x = a \end{cases}$$

และ

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ถ้า } x \neq a \\ 0 & \text{ถ้า } x = a \end{cases}$$

เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้บนเซต $N^*(a, \delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ ดังนั้น f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $N^*(a, \delta)$ และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ และ $f(a) = 0 = g(a)$ ทำให้ได้ว่า F และ G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต $N(a, \delta)$

ถ้า $a < x < a + \delta$ โดยที่ F และ G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, x]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, x) โดยทฤษฎีบท 6.2.6 จะได้ว่า จะมี $t_x \in (a, x)$ ซึ่งทำให้

$$(F(x) - F(a))G'(t_x) = (G(x) - G(a))F'(t_x)$$

นั่นคือ $F(x)G'(t_x) - F(a)G'(t_x) = G(x)F'(t_x) - G(a)F'(t_x)$ เนื่องจาก $F(a) = 0$ และ $G(a) = 0$ ดังนั้น

$$F(x)G'(t_x) = G(x)F'(t_x)$$

จึงได้ว่า

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(t_x)}{G'(t_x)}$$

และเนื่องจาก $G(a) = 0$ จะได้ว่า $G(x) \neq 0$ เพราะว่าถ้า $G(x) = 0 = G(a)$ แล้วโดยทฤษฎีบท 6.2.3 สำหรับฟังก์ชัน G บนช่วง $[a, x]$ จะมีจุด $c \in (a, x)$ ที่ทำให้ $G'(c) = 0$ ซึ่งทำให้ขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า $G'(x) = g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in N^*(a, \delta)$ ดังนั้น

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(t_x)}{G'(t_x)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a - \delta < x < a$ แล้วจะมี $t_x \in (x, a)$ ซึ่งทำให้

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(t_x)}{G'(t_x)} = \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)}$$

จะเห็นว่า ถ้า $x \rightarrow a$ แล้ว $t_x \rightarrow a$ ด้วย และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ หาค่าได้ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t_x \rightarrow a} \frac{f'(t_x)}{g'(t_x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของทฤษฎีบท 6.3.1

ตัวอย่าง 6.3.1 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = -3$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \sin 2x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin 2x) = 0$
และพิจารณา $\frac{d}{dx}(x + \sin 2x) = 1 + 2 \cos 2x$ และ $\frac{d}{dx}(x - \sin 2x) = 1 - 2 \cos 2x$
ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 6.3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} \\ &= \frac{1 + 2(1)}{1 - 2(1)} \\ &= \frac{3}{-1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 6.3.2 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (b, ∞) และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (b, \infty)$ ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$ หาค่าได้ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$ จะหาค่าได้และ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$ สำหรับบาง $L \in \mathbb{R}$ และให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า
จะมีจำนวนจริงบวก $N_1 > b$ ซึ่งทำให้

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

สำหรับทุกๆ $x > N_1$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริงบวก $N_2 > N_1$ ที่ทำให้

$$f(x) > 0 \text{ และ } g(x) > 0$$

สำหรับทุกๆ $x > N_2$ และจะเห็นว่า จะมีจำนวนจริงบวก $N_3 > N_2$ ที่ทำให้

$$f(x) > f(N_2) \text{ และ } g(x) > g(N_2)$$

สำหรับทุกๆ $x > N_3$ จากกำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (b, ∞) จะได้ว่าทั้ง f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[N_2, x]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (N_2, x) โดยทฤษฎีบท 6.2.6 (ทฤษฎีบทค่ามัธยฐานของโคชี) จะได้ว่าจะมีจุด $c \in (N_2, x)$ ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned} \frac{f'(c)}{g'(c)} &= \frac{f(x) - f(N_2)}{g(x) - g(N_2)} \\ &= \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\left(1 - \frac{f(N_2)}{f(x)}\right)}{\left(1 - \frac{g(N_2)}{g(x)}\right)} \end{aligned}$$

ดังนั้น สำหรับทุกๆ $x > N_3$ จึงได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot F(x)$$

เมื่อ $F(x) = \frac{1 - \frac{g(N_2)}{g(x)}}{1 - \frac{f(N_2)}{f(x)}}$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = L$ สำหรับทุกๆ $x > N_3$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot F(x) - L \right| \\ &\leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot F(x) - \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| \\ &= \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| |F(x) - 1| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| \end{aligned}$$

เนื่องจาก $c > N_2 > N_1$ จึงได้ว่า

$$\left| \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| - |L| \right| \leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

จึงได้ว่า

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| - |L| < \frac{\epsilon}{2}$$

ดังนั้น

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| < |L| + \frac{\epsilon}{2}$$

และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ จึงได้ว่า จะมีจำนวนจริงบวก $N_4 > N_3$ ซึ่งทำให้

$$|F(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2(|L| + \frac{\epsilon}{2})}$$

สำหรับทุกๆ $x > N_4$ ดังนั้น ถ้า $x > N_4$ แล้ว

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| &\leq \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} \right| |F(x) - 1| + \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| \\ &< \left(|L| + \frac{\epsilon}{2} \right) \left(\frac{\epsilon}{2(|L| + \frac{\epsilon}{2})} \right) + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ และจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$ ดังนั้น

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของทฤษฎีบท 6.3.2

ตัวอย่าง 6.3.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{3x} = 0$ สำหรับ $x > 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln 2x = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x = \infty$ เมื่อ $x > 0$

และจะเห็นว่า $\frac{d}{dx}(\ln 2x) = \frac{1}{x}$ และ $\frac{d}{dx}(3x) = 3$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 6.3.3 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(a, a+\delta)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, a+\delta)$ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = L$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$ และถ้ากำหนดให้ $x = a + \frac{1}{u}$ หรือ $u = \frac{1}{x-a}$ จะได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{u}\right) = \infty$$

และ

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \lim_{u \rightarrow \infty} g\left(a + \frac{1}{u}\right) = \infty$$

โดยทฤษฎีบท 6.3.2 และโดยทฤษฎีบท 6.1.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(a + \frac{1}{u})}{g(a + \frac{1}{u})} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f'(a + \frac{1}{u})(-\frac{1}{u^2})}{g'(a + \frac{1}{u})(-\frac{1}{u^2})} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f'(a + \frac{1}{u})}{g'(a + \frac{1}{u})} \\ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \\ &= L\end{aligned}$$

□

จากทฤษฎีบทข้างต้น จึงทำให้ได้รับบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 6.3.1 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $(a - \delta, a)$ สำหรับบางจำนวนจริง $\delta > 0$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a - \delta, a)$ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right) = L$ แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = L$$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด

□

นอกจากรูปแบบยังไม่กำหนดที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น ยังมีรูปแบบไม่กำหนดอื่นๆ อีกดังจะกล่าวถึงและยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ และ $\infty - \infty$

การหาลิมิตของฟังก์ชันซึ่งอยู่ในรูปนี้จะสามารถหาได้โดยการจัดให้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วจึงใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล ยกตัวอย่างเช่น

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$ แล้วจัดให้ $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ เพื่อให้อยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาลพิจารณาต่อไป

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - g(x) = \infty - \infty$ แล้วจัดให้ $f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$ เพื่อให้อยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ แล้วใช้กฎโลปีตาลพิจารณาต่อไปเช่นกัน

ตัวอย่าง 6.3.3 กำหนดให้ $f(x) = (2 - 2x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{4}{\pi}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 - 2x) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0 \cdot \infty$ ดังนั้นจึงจะจัดรูปแบบใหม่เป็น

$$f(x) = \frac{(2 - 2x)}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} = \frac{(2 - 2x)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-2x)}{\cot(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{0}{0}$ ดังนั้นจึงจะใช้หลักเกณฑ์โลปีตาล จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2-2x)}{\cot(\frac{\pi}{2}x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2}{-\frac{\pi}{2} \csc^2(\frac{\pi}{2}x)} \\ &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

□

รูปแบบยังไม่กำหนด 0^0 , 1^∞ และ ∞^0

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 0^0$ พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} e^{\ln[f(x)^{g(x)}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}\end{aligned}$$

ดังนั้นจึงจะพิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ โดยจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = 0 \cdot \infty$ จึงนำกลับไปใช้รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ พิจารณาเป็นลำดับต่อไป

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$ จากข้างต้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$ จึงจะพิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ โดยจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = 0 \cdot \infty$ จึงนำกลับไปใช้รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ พิจารณาเป็นลำดับต่อไป

และถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ซึ่ง $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \infty^0$ จากข้างต้น $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$ จึงจะพิจารณา $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ โดยจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x) = 0 \cdot \infty$ จึงนำกลับไปใช้รูปแบบยังไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ พิจารณาเป็นลำดับต่อไปเช่นกัน ดังจะแสดงตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.3.4 จงแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} (2x)^x = 1$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2x)^x = 0^0$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} (2x)^x &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(2x)} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x)}{\frac{1}{x}}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-x)} \\
 &= e^0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

□

6.4 อนุพันธ์อันดับสูง

จากที่ได้กล่าวมาข้างต้นของหัวข้อนี้ ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์เพียงชั้นเดียวหรือการหาอนุพันธ์เพียงครั้งเดียว โดยจะเรียกว่า อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) แต่ในการหาอนุพันธ์นั้นสามารถหาอนุพันธ์ได้มากกว่าหนึ่งครั้ง ดังนั้นในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ที่มากกว่าหนึ่งครั้งหรือที่เรียกว่าอนุพันธ์อันดับสูง (derivative of higher order) ดังจะกล่าวถึงในบทนิยามต่อไปนี้ นอกจากนี้ในหัวข้อนี้ยังได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์อันดับสูง นั่นคือ ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's theorem) โดยได้แสดงบทพิสูจน์ไว้ในหัวข้อนี้ด้วย

บทนิยาม 6.4.1 ถ้า f สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I เมื่อ $I \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า f' สามารถหาอนุพันธ์ของตัวเองได้ จะเขียนแทนอนุพันธ์ของ f' ด้วย f'' และจะเรียก f'' ว่าอนุพันธ์อันดับที่สองของ f (the second derivative of f) ถ้าดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้รับฟังก์ชัน

$$f, f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}, \dots, f^{(n)}$$

ซึ่งแต่ละฟังก์ชันดำเนินการตามกระบวนการข้างต้น แล้ว $f^{(n)}$ จะถูกเรียกว่า อนุพันธ์อันดับที่ n (the n th derivative หรือ the derivative of order n of f)

ต่อไปจะแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ทฤษฎีบท 6.4.1 สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน $[a, b]$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $f^{(n-1)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ และ $f^{(n)}(t)$ หาค่าได้ สำหรับทุกๆ $t \in (a, b)$ ถ้าให้ α, β เป็นจุดที่แตกต่างกันบน $[a, b]$ และนิยาม

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k \quad (6.3)$$

แล้วจะมีจุด x ที่อยู่ระหว่าง α และ β ซึ่งทำให้

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n \quad (6.4)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่งนิยามโดย

$$g(t) = f(t) - p(t) - M(t - \alpha)^n \quad (6.5)$$

เมื่อ $a \leq t \leq b$ โดย (6.3) และ (6.5) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} g(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k - M(t - \alpha)^n \\ &= f(t) - \left(\frac{f^{(0)}(\alpha)}{0!} (t - \alpha)^0 + \frac{f^{(1)}(\alpha)}{1!} (t - \alpha) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (t - \alpha)^{n-1} + M(t - \alpha)^n \right) \end{aligned}$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad (6.6)$$

เมื่อ $a < t < b$

ต่อไปจะแสดงว่า $g^{(n)}(x) = 0$ สำหรับบาง x ที่อยู่ระหว่าง α และ β

เนื่องจาก $p^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$ สำหรับ $k = 0, 1, \dots, n-1$ ทำให้ได้ว่า

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

ถ้าเลือก M ที่ทำให้ $g(\beta) = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.2.3 และทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า จะมี x_1 อยู่ระหว่าง α และ β ซึ่งทำให้

$$g'(x_1) = 0$$

และเนื่องจาก $g'(\alpha) = 0$ ในทำนองเดียวกัน จะมี x_2 อยู่ระหว่าง α และ x_1 ซึ่งทำให้

$$g''(x_2) = 0$$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ว่า จะมี x_n อยู่ระหว่าง α และ x_{n-1} ที่ทำให้

$$g^{(n)}(x_n) = 0$$

นั่นคือ จะมี x อยู่ระหว่าง α และ β ที่ทำให้ $g^{(n)}(x) = 0$ ดังนั้นโดย (6.6) จะได้ว่า จะมี x ที่ทำให้ $f^{(n)}(x) = n!M$ นั่นคือ

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = M$$

ดังนั้น จาก (6.5) จะได้ว่า $0 = g(\beta) = f(\beta) - p(\beta) - M(\beta - \alpha)^n$ นั่นคือ

$$f(\beta) = p(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n$$

□

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทข้างต้น สำหรับ $n = 1$ ทฤษฎีบทนี้จะเป็น ทฤษฎีบทค่ามัธยฐาน ในกรณีทั่วไป ทฤษฎีบทนี้ แสดงให้เห็นว่า f สามารถประมาณค่าโดยพหุนามของดีกรี $n - 1$ และ (6.4) ทำให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อน (error) ถ้าหากรู้ว่า $|f^{(n)}(x)|$ มีขอบเขต

ตัวอย่าง 6.4.1 จงใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์พิสูจน์ว่า สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ และสำหรับทุกๆ $x > 0$ จะได้ว่า

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \dots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ จะได้ว่าจะมี $c \in (0, x)$ ซึ่งทำให้

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}}$$

จะเห็นว่า สำหรับ $x > 0$ แล้วถ้า $n = 2k$ แล้ว $\frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}} > 0$ แต่ถ้า $n = 2k+1$ แล้ว $\frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+c)^{n+1}} < 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \dots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$$

□

นอกจากนี้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ยังได้ถูกนำไปใช้ในการคำนวณค่าผิดพลาด (error value) ได้อีกด้วยโดยศึกษาเพิ่มเติมได้จากเรื่องของอนุกรมกำลัง

6.5 บทสรุป

สิ่งที่ได้กล่าวมาทั้งหมดในหัวข้อนี้ ได้กล่าวถึงบทนิยามของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และคุณสมบัติต่างๆของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ซึ่งถูกนำไปใช้เป็นเครื่องมือในทางคณิตศาสตร์ด้านแคลคูลัสอยู่เสมอ แต่เมื่อมีความรู้เรื่องของลิมิต ค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวา จึงทำให้ในบทนี้ได้นำความรู้ดังกล่าวมากล่าวถึง ฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทางซ้ายและทางขวา และมีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ทางซ้ายและทางขวาด้วย จากนั้นได้มีการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ ยกตัวอย่างเช่น กฎลูกโซ่ (ทฤษฎีบท 6.1.4) ทฤษฎีบทของโรลล์ (ทฤษฎีบท 6.2.3) ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (ทฤษฎีบท 6.2.4) และทฤษฎีบทค่ามัชฌิมโคชี (ทฤษฎีบท 6.2.6) ซึ่งมีความเกี่ยวข้องกับค่าสูงสุดและต่ำสุดเฉพาะที่และค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ซึ่งเราได้กล่าวถึงไว้ในที่นี้ด้วย จากนั้นอีกหนึ่งหลักเกณฑ์สำคัญของอนุพันธ์ที่ได้กล่าวถึง คือ หลักเกณฑ์โลปีตาล ซึ่งได้นำความรู้เรื่องอนุพันธ์ไปใช้พิจารณาค่าลิมิตของฟังก์ชันในรูปแบบไม่กำหนด เช่น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^\infty$ เป็นต้น โดยในส่วนนี้ได้กล่าวถึงบทพิสูจน์ของการได้มาของหลักเกณฑ์โลปีตาลต่างๆไว้ และส่วนสุดท้ายของบทยังได้กล่าวถึงอนุพันธ์อันดับสูงและการพิสูจน์ที่สำคัญของอนุพันธ์อันดับสูงอีกหนึ่งทฤษฎีบทไว้ นั่นคือ ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (ทฤษฎีบท 6.4.1)

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์บทแทรก 6.1.1
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.1.2 ข้อ 1. และ 2.
3. กำหนดให้ $f(x) = mx + b$ เมื่อ m และ b เป็นจำนวนจริงคงตัวใดๆ จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกๆ จุด $x \in \mathbb{R}$ และ $f'(x) = m$
4. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.2.6 (ทฤษฎีบทของค่ามัธมิมของโคชี) (ข้อเสนอแนะ: ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของโรลล์สำหรับฟังก์ชัน $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$)
5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $f'(x) \leq 0$ สำหรับทุกๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดทางเดียวบนช่วง (a, b)
6. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I และ f' มีขอบเขตบนช่วง I จงพิสูจน์ว่า จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$$

สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$ (หมายเหตุ นั่นคือสอดคล้องเงื่อนไขลิปชิตซ์)

7. จงพิสูจน์บทแทรก 6.3.1
8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)} \right] = L$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = L$

บทที่ 7

การหาปริพันธ์

ในทางคณิตศาสตร์การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง เป็นเรื่องหนึ่งที่สำคัญและถูกศึกษาอยู่เสมอ อีกทั้งยังถูกนำไปประยุกต์ใช้ในหลากหลายสาขา แต่ก็ไม่ใช่ว่าเรื่องง่ายในการที่จะหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งของฟังก์ชันโดยทั่วไป เพราะอาจจะยากในการที่จะหาค่าดังกล่าว ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชันที่รู้จักกันดี นั่นก็คือ ฟังก์ชัน x^2 ซึ่งเป็นฟังก์ชันพาราโบลา แต่การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังกล่าวนั้นจะมีวิธีหาและพิจารณาอย่างไรที่จะให้ได้ค่าที่ถูกต้องและแม่นยำที่สุด โดยสิ่งที่มีมักจะถูกนำไปใช้อีกอย่างก็คือ ปริพันธ์ (integral) นั่นเองซึ่งมักจะถูกนำไปใช้ในด้านคณิตศาสตร์และนำไปประยุกต์ใช้ด้านต่างๆ เช่น วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ การเงินและฟิสิกส์ เป็นต้น ดังนั้นด้วยความสำคัญดังกล่าว จึงเป็นสิ่งที่ผู้เรียนทางด้านคณิตศาสตร์ควรต้องรู้จักในเรื่องนี้ ด้วยเหตุนี้ ในบทนี้จึงจะมาศึกษาในเรื่องของปริพันธ์รีมันน์ โดยจะเริ่มตั้งแต่การให้บทนิยามของปริพันธ์รีมันน์ ซึ่งก่อนที่จะได้รับบทนิยามนี้ต้องกล่าวถึง ผลบวกบนและผลบวกล่างก่อน ต่อจากนั้นจึงได้ยกตัวอย่างประกอบการพิจารณาการหาปริพันธ์ได้ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้โดยใช้บทนิยามของการหาปริพันธ์ได้ จากนั้นจึงได้นำเสนอคุณสมบัติที่ควรรู้จักของปริพันธ์รีมันน์พร้อมบทพิสูจน์และตัวอย่างประกอบทฤษฎีบทดังกล่าว และในส่วนสุดท้ายของบทนี้ เป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญที่ผู้เรียนควรต้องรู้จักในเรื่องของปริพันธ์ นั่นก็คือ ทฤษฎีบทที่สำคัญของปริพันธ์ ได้แก่ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส โดยในส่วนนี้เราได้กล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2 รวมถึงทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับปริพันธ์ โดยความสำคัญของทฤษฎีบทหลักมูล ก็คือ การหาค่าของปริพันธ์แบบจำกัดเขตนั่นเอง โดยมักจะถูกนำไปใช้ในรูปแบบ $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ เมื่อ $f = F'$ และยิ่งไปกว่านั้น ยังได้นำเสนอทฤษฎีบทของเทคนิควิธีที่ได้ถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการหาปริพันธ์ในแคลคูลัส นั่นคือ สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่สำคัญที่กล่าวมาแล้วข้างต้นนี้ด้วย

7.1 ปริพันธ์รีมันน์

ในหัวข้อนี้ จะเริ่มต้นด้วยการแนะนำเซตผลแบ่งกัน ต่อจากนั้นจึงให้บทนิยามของคำว่า ผลบวกบน (upper sum) และผลบวกล่าง (lower sum) เพื่อนำไปสู่การนิยามคำว่า ปริพันธ์รีมันน์ (Riemann integral) ซึ่งเป็นหัวใจสำคัญของบทนี้ ต่อจากนั้นจึงได้แสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปริพันธ์รีมันน์ พร้อมยกตัวอย่างประกอบ

บทนิยาม 7.1.1 กำหนดให้ $[a, b]$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขตบน $\mathbb{R}$ และจะเรียกเซตจำกัด $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ซึ่งมี

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

ว่าผลแบ่งกัน (partition) ของ $[a, b]$

หมายเหตุ ถ้า P และ Q เป็นผลแบ่งกันของ $[a, b]$ ซึ่ง $P \subseteq Q$ แล้วจะกล่าวว่า Q เป็นผลแบ่งกันละเอียดขึ้น (refinement partition) ของ P

บทนิยาม 7.1.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกันของ $[a, b]$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ และกำหนดให้

$$M_i(f) = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\text{และ } m_i(f) = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

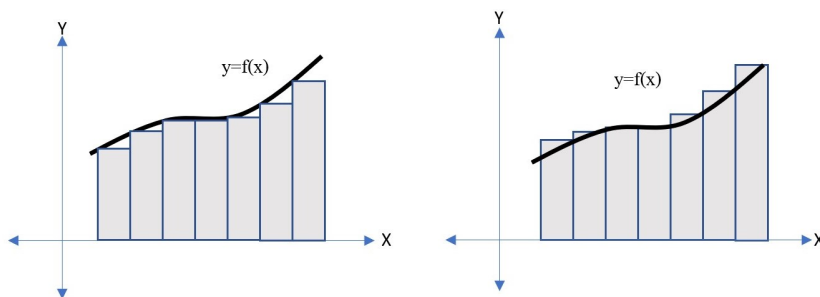
เมื่อพิจารณาค่าดังกล่าวเพียงฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งเพียงฟังก์ชันเดียว จะสามารถเขียนแทนด้วย M_i และ m_i ได้ตามลำดับ และจะนิยาม ผลบวกบน (upper sum) ของ f ซึ่งเทียบกับผลแบ่งกัน P ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงด้วย

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

และนิยามผลบวกล่าง (lower sum) ของ f ซึ่งเทียบกับผลแบ่งกัน P ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงด้วย

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

เมื่อ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ดังรูป 7.1



รูปที่ 7.1: $L(P, f)$ และ $U(P, f)$

ถ้าหากสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่าจะมีจำนวนจริง m และ M ซึ่งทำให้ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ เพราะฉะนั้นสำหรับแต่ละผลแบ่งกัน P ใดๆ ของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$m(b-a) \leq L(P, f) \leq U(P, f) \leq M(b-a)$$

นี้แสดงให้เห็นว่า เซตของผลบวกบนและผลบวกล่างสำหรับ f เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้น จะสามารถหาค่าของปริพันธ์บนและปริพันธ์ล่างของ f บน $[a, b]$ ได้ ดังบทนิยามของปริพันธ์บนและปริพันธ์ล่างของ f ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.1.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น จะเรียกจำนวนจริง

$$U(f) = \inf\{U(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a, b]\}$$

ว่า *ปริพันธ์บน (upper integral)* ของ f บน $[a, b]$ และจะเรียกจำนวนจริง

$$L(f) = \sup\{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a, b]\}$$

ว่า *ปริพันธ์ล่าง (lower integral)* ของ f บน $[a, b]$ และถ้าหากปริพันธ์บนและปริพันธ์ล่างของ f บน $[a, b]$ มีค่าเท่ากันแล้ว และจะกล่าวว่า f หาปริพันธ์รีมันน์ (Riemann integral) ได้บน $[a, b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f$ และจะเรียกสั้นๆ ว่า *ปริพันธ์ (integral)* แทนการเรียกว่า *ปริพันธ์รีมันน์*

ต่อไปจะเริ่มกล่าวถึงทฤษฎีบทของปริพันธ์ โดยจะเริ่มจากการพิสูจน์ความสัมพันธ์ของผลบวกบนและผลบวกล่างของผลแบ่งกั้นและผลแบ่งกั้นละเอียด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า P และ Q เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ และ Q เป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้นของ P แล้ว

$$L(P, f) \leq L(Q, f) \leq U(Q, f) \leq U(P, f)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ P และ Q เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ และ Q เป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้นของ P โดยบทนิยาม 7.1.2 จะเห็นว่า $L(Q, f) \leq U(Q, f)$

ต่อไปจะแสดงว่า $L(P, f) \leq L(Q, f)$

สมมติให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ และให้ P^* เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ โดยเป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้นของ P ที่มีจุดมากกว่าจุดใน P เพียงจุดเดียว กำหนดให้เป็น x^* โดยที่ $x_{k-1} < x^* < x_k$ สำหรับบาง $k = 1, \dots, n$ ถ้า

$$t_1 = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x^*]\} \text{ และ } t_2 = \inf\{f(x) | x \in [x^*, x_k]\}$$

แล้ว $t_1 \geq m_k$ และ $t_2 \geq m_k$ เมื่อ $m_k = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ จึงทำให้ได้ว่า ค่าของ $L(P^*, f)$ และ $L(P, f)$ จะเท่ากันบนทุกๆ ช่วงย่อย ยกเว้นบนช่วง $[x_{k-1}, x_k]$ ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L(P^*, f) - L(P, f) &= [t_1(x^* - x_{k-1}) + t_2(x_k - x^*)] - [m_k(x_k - x_{k-1})] \\ &= (t_1 - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (t_2 - m_k)(x_k - x^*) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

นั่นแสดงว่า $L(P, f) \leq L(P^*, f)$

ในกรณีทั่วไป ถ้า Q เป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้นของ P ที่มีจุดมากกว่า P อยู่จำนวน r จุด นั้นจะประยุกต์ผลลัพธ์ข้างบนนี้จำนวน r ครั้ง จะได้ว่า $L(P, f) \leq L(Q, f)$ สำหรับในการพิสูจน์ว่า $U(Q, f) \leq U(P, f)$ แสดงทำนองเดียวกับข้างต้น (เว้นเป็นแบบฝึกหัด) $\square$

จากทฤษฎีบทข้างต้นทำให้ได้รับบทแทรกที่ตามมาดังต่อไปนี้

บทแทรก 7.1.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า P และ Q เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ แล้ว $L(Q, f) \leq U(P, f)$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด (ข้อเสนอแนะ: ประยุกต์กับทฤษฎีบท 7.1.1 โดยพิจารณาว่า $P \cup Q$ เป็นผลแบ่งกันละเอียดขึ้นของทั้ง P และ Q) □

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่แสดงความสัมพันธ์ของปริพันธ์บนและปริพันธ์ล่างของฟังก์ชัน โดยเป็นการแสดงการเปรียบเทียบ ปริพันธ์บนและปริพันธ์ล่างของฟังก์ชันฟังก์ชันหนึ่ง หากฟังก์ชันที่พิจารณานั้นเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิดแล้วค่าของปริพันธ์บนของฟังก์ชันนั้นจะมากกว่าหรือเท่ากับปริพันธ์ล่างของฟังก์ชันเดียวกันนั้นเสมอ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1.2 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า $L(f) \leq U(f)$

การพิสูจน์ กำหนดให้ P และ Q เป็นผลแบ่งกันของ $[a, b]$ โดยบทตั้ง 7.1.1 จะได้ว่า

$$L(P, f) \leq U(Q, f)$$

จะเห็นว่า $U(Q, f)$ จึงเป็นขอบเขตบนสำหรับเซต

$$S = \{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกันของ } [a, b]\}$$

เพราะฉะนั้น $L(f) = \sup S \leq U(Q, f)$ นั่นคือ $L(f) \leq U(Q, f)$ สำหรับทุกๆ ผลแบ่งกัน Q ของ $[a, b]$ ดังนั้น

$$L(f) \leq \inf\{U(Q, f) | Q \text{ เป็นผลแบ่งกันของ } [a, b]\} = U(f)$$

□

ตัวอย่างต่อไปเป็นการใช้ผลบวกบนและผลบวกล่างพิจารณาค่าของปริพันธ์รีมันน์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 7.1.1 จงใช้ผลบวกบนและผลบวกล่างหาค่าของ $\int_0^1 2x^2$

วิธีทำ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เราพิจารณาผลแบ่งกัน

$$P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$$

บนช่วง $[0, 1]$ จะได้ว่า $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x) = 2x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 1]$ และบนทุกช่วงย่อย $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ ทำให้ได้ว่า

$$M_i = \sup \left\{ f(x) | x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\} = f\left(\frac{i}{n}\right) = 2\left(\frac{i}{n}\right)^2$$

และ

$$m_i = \inf \left\{ f(x) | x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \right\} = f\left(\frac{i-1}{n}\right) = 2\left(\frac{i-1}{n}\right)^2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 U(P_n, f) &= \sum_{i=1}^n 2 \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{n} \right)^3 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{n} \right)^3 \left[\frac{1}{6} (n)(n+1)(2n+1) \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{2n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 L(P_n, f) &= \sum_{i=1}^n 2 \left(\frac{i-1}{n} \right)^2 \left(\frac{1}{n} \right) \quad (7.1) \\
 &= \frac{2}{n^3} [0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2] \\
 &= \frac{2}{n^3} \left[\frac{1}{6} (n-1)(n)(2n-1) \right] \\
 &= \frac{2}{3} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{2n-1}{2n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \frac{2}{3}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \frac{2}{3}$ ทำให้ได้ว่า

$$U(f) \leq \frac{2}{3} \text{ และ } L(f) \geq \frac{2}{3}$$

และโดยทฤษฎีบท 7.1.2 ทำให้ได้ว่า

$$\frac{2}{3} \leq L(f) \leq U(f) \leq \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $L(f) = U(f) = \frac{2}{3}$ นั่นคือ $\int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$ □

ตัวอย่าง 7.1.2 กำหนดให้ $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ -1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน g หาปริพันธ์ไม่ได้บน $[0, 2]$

วิธีทำ กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใดๆ ของ $[0, 2]$ เนื่องจากทุกๆ ช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ จะบรรจุทั้งจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ จึงได้ว่า $M_i = 1$ และ $m_i = -1$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ดังนั้น

$$U(P, g) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 2$$

และ

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = - \sum_{i=1}^n \Delta x_i = -2$$

เพราะฉะนั้น $U(g) = 2$ และ $L(g) = -2$ ซึ่งจะเห็นว่า $L(g) \neq U(g)$ จึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน g หาปริพันธ์ไม่ได้บน $[0, 2]$ $\square$

ทฤษฎีบทต่อไป เป็นทฤษฎีบทที่ใช้ในการพิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้ โดยใช้การพิจารณาจากผลบวกบนและผลบวกล่าง ดังบทพิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.1.3 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า f จะหาปริพันธ์ได้ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น P ของ $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า $L(f) = U(f)$ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ เนื่องจาก

$$L(f) = \sup\{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a, b]\}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมีผลแบ่งกั้น P_1 ของ $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$L(f) - \frac{\epsilon}{2} < L(P_1, f)$$

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก

$$U(f) = \inf\{U(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a, b]\}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.3.2 อีกครั้ง จะได้ว่า จะมีผลแบ่งกั้น P_2 ของ $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$U(P_2, f) < U(f) + \frac{\epsilon}{2}$$

กำหนดให้ $P = P_1 \cup P_2$ และโดยทฤษฎีบท 7.1.1 จะเห็นว่า

$$L(P_1, f) \leq L(P_1 \cup P_2, f) \leq U(P_1 \cup P_2, f) \leq U(P_2, f)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &\leq U(P_2, f) - L(P_1, f) \\ &< \left[U(f) + \frac{\epsilon}{2} \right] - \left[L(f) - \frac{\epsilon}{2} \right] \\ &= U(f) - L(f) + \epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น P ของ $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

จะได้ว่า

$$U(P, f) < L(P, f) + \epsilon$$

ดังนั้น

$$U(f) \leq U(P, f) < L(P, f) + \epsilon \leq L(f) + \epsilon$$

เนื่องจากอสมการข้างบนนี้เป็นจริงทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.1.5 ทำให้ได้ว่า

$$U(f) \leq L(f)$$

แต่ในทฤษฎีบท 7.1.2 จะได้ว่า

$$L(f) \leq U(f)$$

ดังนั้น

$$L(f) = U(f)$$

จึงสรุปได้ว่า f หาปริพันธ์ได้

□

ต่อไปจะยกตัวอย่างประกอบทฤษฎีบท 7.1.3 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1.3 กำหนดให้ $f(x) = x$ โดยที่ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ ซึ่ง $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ สำหรับทุกๆ i ซึ่ง $0 \leq i \leq n$ จงแสดงว่า f หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x) = x$ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ทำให้ได้ว่า $M_i = f(x_i) = x_i$ และ $m_i = f(x_{i-1}) = x_{i-1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= \left[a + \frac{i(b-a)}{n} \right] - \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right] \\ &= \frac{i(b-a)}{n} - \frac{(i-1)(b-a)}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \end{aligned}$$

พิจารณา $U(P, f)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} U(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{a(b-a)}{n} + \sum_{i=1}^n \frac{i(b-a)^2}{n^2} \\ &= n \left[\frac{a(b-a)}{n} \right] + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= ab - a^2 + \frac{(n+1)(b-a)^2}{2n} \\ &= ab - a^2 + \frac{n(b-a)^2}{2n} + \frac{(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} \\
&= \frac{2(ab - a^2) + (b-a)^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกันพิจารณา $L(P, f)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
L(P, f) &= \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{(i-1)(b-a)}{n} \right) \left(\frac{b-a}{n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\frac{a(b-a)}{n} + \frac{i(b-a)^2}{n^2} - \frac{(b-a)^2}{n^2} \right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + n \left(\frac{a(b-a)}{n} - \frac{(b-a)^2}{n^2} \right) \\
&= \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + a(b-a) - \frac{(b-a)^2}{n} \\
&= \frac{(n+1)(b-a)^2}{2n} + ab - a^2 - \frac{(b-a)^2}{n} \\
&= \frac{n(b-a)^2}{2n} + \frac{(b-a)^2}{2n} + ab - a^2 - \frac{(b-a)^2}{n} \\
&= \frac{(b-a)^2}{2} + ab - a^2 - \frac{(b-a)^2}{2n} \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$U(P, f) - L(P, f) = \frac{(b-a)^2}{n}$$

สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีสจะได้ว่า จะมี $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$\frac{(b-a)^2}{\epsilon} < n$$

จะได้ว่า

$$\frac{(b-a)^2}{n} < \epsilon$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$U(P, f) - L(P, f) < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 7.1.3 จะได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

□

7.2 คุณสมบัติของปริพันธ์รีมันน์

จากหัวข้อก่อนหน้า ที่ได้แนะนำบทนิยามของปริพันธ์ไปแล้วนั้น ในหัวข้อนี้จึงจะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของปริพันธ์รีมันน์ ซึ่งมักจะถูกนำไปประยุกต์ใช้ในแคลคูลัสมากมาย เช่น การดำเนินการเกี่ยวกับผลบวกของปริพันธ์หรือการคูณด้วยสเกลาร์ของปริพันธ์ เป็นต้น ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 7.2.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันทางเดียวบนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวบนช่วงปิด $[a, b]$ (สำหรับกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันลดทางเดียวก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน) ทำให้ได้ว่า

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

สำหรับ $x \in [a, b]$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$

ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้ว f จะเป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้นโดยแบบฝึกหัดบทที่ 7 ข้อ 3 จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

สมมติให้ $f(a) < f(b)$ และให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีส (ทฤษฎีบท 1.3.6) ข้อ (3) จะได้ว่า จะมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$f(b) - f(a) < k\epsilon$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{k}(f(b) - f(a)) < \epsilon$$

กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ ซึ่ง $\Delta x_i \leq \frac{1}{k}$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จะได้ว่า

$$m_i = f(x_{i-1}) \text{ และ } M_i = f(x_i) \text{ สำหรับทุกๆ } i = 1, 2, \dots, n$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= \frac{1}{k} (f(b) - f(a)) \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 7.1.3 ทำให้ได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

□

นอกจากทฤษฎีบทข้างต้น ที่มีสมมติฐานว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ แล้วนั้น ถ้าหากสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้วจะได้ รับผลลัพธ์เช่นเดียวกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.2.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว f จะหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจากสมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 5.2.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$ จึงทำให้ได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $x, y \in [a, b]$

$$\text{ถ้า } |x - y| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

หากกำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ ซึ่ง $\Delta x_i < \delta$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ แล้วโดยทฤษฎีบท 5.1.5 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด) จะได้ว่า จะมีจุด s_i และ t_i บนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ ซึ่ง

$$m_i = f(s_i) \text{ และ } M_i = f(t_i)$$

เนื่องจาก $\Delta x_i < \delta$ จะได้ว่า $|s_i - t_i| < \delta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 0 &\leq M_i - m_i \\ &= f(t_i) - f(s_i) \\ &\leq |f(t_i) - f(s_i)| \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} U(P, f) - L(P, f) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{b-a} \Delta x_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 7.1.3 ทำให้ได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ □

ต่อไปจะแสดงบทพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติของการดำเนินการเบื้องต้นของการหาปริพันธ์ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.2.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) kf หาปริพันธ์ได้ และ $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
- (2) $f + g$ หาปริพันธ์ได้ และ $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ $k \in \mathbb{R}$

- (1) จะแสดงว่า kf หาปริพันธ์ได้และ $\int_a^b kf = k \int_a^b f$ โดยจะแบ่งพิจารณาเป็น 3 กรณี
กรณีที่ 1 ถ้า $k = 0$ แล้วตามบทนิยามของการหาปริพันธ์ได้ ทำให้ได้ว่าทฤษฎีบทนี้เป็นจริง
กรณีที่ 2 ถ้า $k > 0$ และให้ $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใดๆ ของช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 1.3.4 ข้อ (1) และ (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_i(kf) &= \sup\{(kf)(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= k \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= kM_i(f) \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ และ

$$\begin{aligned} m_i(kf) &= \inf\{(kf)(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= k \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= km_i(f) \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น

$$U(P, kf) = \sum_{i=1}^n M_i(kf) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n kM_i(f) \Delta x_i = kU(P, f)$$

จะได้ว่า $U(kf) = kU(f)$ และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $L(kf) = kL(f)$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ จะได้ว่า $L(f) = U(f)$ ดังนั้น

$$L(kf) = kL(f) = kU(f) = U(kf)$$

นั่นคือ kf เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ และ

$$\int_a^b kf = U(kf) = kU(f) = k \int_a^b f$$

กรณีที่ 3 ถ้า $k < 0$ (แบบฝึกหัดของผู้เรียน)

- (2) จะแสดงว่า $f + g$ หาปริพันธ์ได้ และ $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
 เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยบทนิยามของการหาปริพันธ์ได้ ทำให้ได้ว่า เซต $\{f(x) | x \in [a, b]\}$ และ $\{g(x) | x \in [a, b]\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต นั่นคือ มีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง และเนื่องจากทฤษฎีบท 1.3.3 จะได้ว่า

$$\sup\{(f + g)(x) | x \in [a, b]\} = \sup\{f(x) | x \in [a, b]\} + \sup\{g(x) | x \in [a, b]\}$$

ดังนั้น แต่ละผลแบ่งกัน $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ใดๆ ของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$M_i(f + g) = M_i(f) + M_i(g)$$

สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ทำให้ได้ว่า

$$U(P, f + g) = U(P, f) + U(P, g)$$

และในทำนองเดียวกัน จากแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1 ข้อ 7 จะทำให้ได้รับเช่นเดียวกันว่า

$$\inf\{(f + g)(x) | x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) | x \in [a, b]\} + \inf\{g(x) | x \in [a, b]\}$$

ดังนั้น แต่ละผลแบ่งกัน $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ใดๆ ของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$L(P, f + g) = L(P, f) + L(P, g)$$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 7.1.3 จะได้ว่า จะมีผลแบ่งกัน P_1 และ P_2 ของช่วงปิด $[a, b]$ ที่ทำให้

$$U(P_1, f) < L(P_1, f) + \frac{\epsilon}{2} \text{ และ } U(P_2, g) < L(P_2, g) + \frac{\epsilon}{2}$$

กำหนดให้ $P = P_1 \cup P_2$ โดยทฤษฎีบท 7.1.1 จะได้ว่า

$$U(P, f) \leq U(P_1, f) < L(P_1, f) + \frac{\epsilon}{2} \leq L(P, f) + \frac{\epsilon}{2}$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $U(P, g) < L(P, g) + \frac{\epsilon}{2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P, f + g) &= U(P, f) + U(P, g) \\ &< L(P, f) + \frac{\epsilon}{2} + L(P, g) + \frac{\epsilon}{2} \\ &< L(P, f) + L(P, g) + \epsilon \\ &= L(P, f + g) + \epsilon \end{aligned} \tag{7.2}$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$U(P, f + g) - L(P, f + g) < \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 7.1.3 จะได้ว่า $f + g$ หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

ต่อไปจะแสดงว่า $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

สำหรับแต่ละผลแบ่งกัน P ใดๆ ของช่วงปิด $[a, b]$ และใช้ (7.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= U(f + g) \\ &\leq U(P, f + g) \\ &< L(P, f) + L(P, g) + \epsilon \\ &\leq L(f) + L(g) + \epsilon \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g + \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\int_a^b (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) < \epsilon \quad (7.3)$$

และ

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= L(f + g) \\ &\geq L(P, f + g) \\ &> U(P, f) + U(P, g) - \epsilon \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$-\epsilon < \int_a^b (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \quad (7.4)$$

จาก (7.3) และ (7.4) จึงได้ว่า

$$\left| \int_a^b (f + g) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 7.2.3 มาใช้ในการหาค่าปริพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.2.1 กำหนดให้ $\int_0^3 x^2 dx = 9$, $\int_0^3 x dx = \frac{9}{2}$ และ $\int_0^3 3 dx = 9$ จงหา

1. $\int_0^3 4x dx$

2. $\int_0^3 (x^2 + 2x + 3) dx$

วิธีทำ 1. พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_0^3 4x dx &= 4 \int_0^3 x dx \\ &= 4 \left(\frac{9}{2} \right) \\ &= 18 \end{aligned}$$

2. พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 (x^2 + 2x + 3)dx &= \int_0^3 x^2 dx + \int_0^3 2x dx + \int_0^3 3 dx \\
 &= \int_0^3 x^2 dx + 2 \int_0^3 x dx + \int_0^3 3 dx \\
 &= 9 + 2 \left(\frac{9}{2} \right) + 9 \\
 &= 9 + 9 + 9 \\
 &= 27
 \end{aligned}$$

□

นอกจากนี้ ยังมีการพิจารณาการหาปริพันธ์บนช่วงปิด โดยใช้การแบ่งช่วงปิดหนึ่งเป็นช่วงปิดย่อยๆ ซึ่งจะเห็นว่าค่าปริพันธ์ของช่วงปิดทั้งหมดกับผลรวมของปริพันธ์แต่ละช่วงปิดย่อยทั้งหมดจะมีค่าเท่ากัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, c]$ และ $[c, b]$ แล้ว f จะหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และจาก f เป็นฟังก์ชันหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, c]$ และ $[c, b]$ จะได้ว่า จะมีผลแบ่งกัน P_1 ของ $[a, c]$ และ P_2 ของ $[c, b]$ ซึ่งทำให้

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\epsilon}{2}$$

และ

$$U(P_2, f) - L(P_2, f) < \frac{\epsilon}{2}$$

กำหนดให้ $P = P_1 \cup P_2$ จะได้ว่า P เป็นผลแบ่งกันของช่วงปิด $[a, b]$ และ

$$\begin{aligned}
 U(P, f) - L(P, f) &= U(P_1, f) + U(P_2, f) - L(P_1, f) - L(P_2, f) \\
 &= [U(P_1, f) - L(P_1, f)] + [U(P_2, f) - L(P_2, f)] \\
 &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
 &= \epsilon
 \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 7.1.3 จึงทำให้ได้ว่า f หาปริพันธ์ได้บน $[a, b]$ และยังทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f &\leq U(P, f) \\
 &= U(P_1, f) + U(P_2, f) \\
 &< L(P_1, f) + L(P_2, f) + \epsilon \\
 &\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \epsilon
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) < \epsilon \quad (7.5)$$

และ

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\geq L(P, f) \\ &= L(P_1, f) + L(P_2, f) \\ &> U(P_1, f) + U(P_2, f) - \epsilon \\ &\geq \int_a^c f + \int_c^b f - \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า

$$-\epsilon < \int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) \quad (7.6)$$

ดังนั้น จาก (7.5) และ (7.6) ทำให้ได้ว่า

$$\left| \int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f \right) \right| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ ดังนั้น

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 7.2.4 มาใช้ในการหาค่าปริพันธ์

ตัวอย่าง 7.2.2 กำหนดให้ $\int_{-2}^1 f(x)dx = 7$ และ $\int_1^2 f(x)dx = 3$ จงหา $\int_{-2}^2 f(x)dx$

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x)dx &= \int_{-2}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx \\ &= 7 + 3 \\ &= 10 \end{aligned}$$

□

ในส่วนตัวท้ายของหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงการหาปริพันธ์ได้ของฟังก์ชันประกอบ โดยจะแสดงว่า สำหรับ 2 ฟังก์ชัน โดยที่ฟังก์ชันหนึ่งสามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด และอีกหนึ่งฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดเดียวกันนั้น เมื่อนำสองฟังก์ชันนั้นมาประกอบกัน ผลที่ได้รับคือ ฟังก์ชันประกอบนั้น ยังคงเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิดดังกล่าวด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.2.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ เมื่อ $f([a, b]) \subseteq [c, d]$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และ $K = \sup\{|g(t)| | t \in [c, d]\}$

จะเลือก $0 < \epsilon' < \frac{\epsilon}{b-a+2K}$ เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[c, d]$ โดยทฤษฎีบท 5.2.1 จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[c, d]$ ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $0 < \delta < \epsilon'$ ซึ่งทำให้สำหรับทุกๆ $s, t \in [c, d]$

$$\text{ถ้า } |s - t| < \delta \text{ แล้ว } |g(s) - g(t)| < \epsilon'$$

และจากกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า จะมีผลแบ่งกัน $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ของ $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$U(P, f) - L(P, f) < \delta^2$$

$$\text{ต่อไปจะแสดงว่า } U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) < \epsilon$$

กำหนดให้ $A = \{i | M_i - m_i < \delta\}$ และ $B = \{i | M_i - m_i \geq \delta\}$ แยกพิจารณา 2 กรณี

กรณีที่ 1 ถ้า $i \in A$ และ $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ แล้ว

$$|f(x) - f(y)| \leq M_i - m_i < \delta$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$|g(f(x)) - g(f(y))| < \epsilon'$$

นั่นคือ $|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| < \epsilon'$ ทำให้ได้ว่า $M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f) \leq \epsilon'$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{i \in A} [M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f)] \Delta x_i &\leq \epsilon' \sum_{i \in A} \Delta x_i \\ &\leq \epsilon' (b - a) \end{aligned} \quad (7.7)$$

กรณีที่ 2 ถ้า $i \in B$ แล้ว $\frac{M_i - m_i}{\delta} \geq 1$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} \Delta x_i &\leq \frac{1}{\delta} \sum_{i \in B} (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &\leq \frac{1}{\delta} [U(P, f) - L(P, f)] \\ &< \delta \\ &< \epsilon' \end{aligned}$$

จากกำหนดให้ $K = \sup\{|g(t)| | t \in [c, d]\}$ จะได้ว่า $M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f) < 2K$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B} [M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f)] \Delta x_i &\leq 2K \sum_{i \in B} \Delta x_i \\ &< 2K \epsilon' \end{aligned} \quad (7.8)$$

จาก (7.7) และ (7.8) จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & U(P, g \circ f) - L(P, g \circ f) \\
 &= \sum_{i \in A} [M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f)] \Delta x_i + \sum_{i \in B} [M_i(g \circ f) - m_i(g \circ f)] \Delta x_i \\
 &\leq \epsilon'(b-a) + 2K\epsilon' \\
 &= \epsilon'(b-a+2K) \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 7.1.3 ทำให้ได้ว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ □

ต่อไปจะนำเสนอคุณสมบัติของฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ที่หาปริพันธ์ได้ โดยในการพิสูจน์จะนำทฤษฎีบท 7.2.5 มาช่วยในการแสดงบทพิสูจน์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

บทแทรก 7.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว $|f|$ หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

การพิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยบทนิยามของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$m \leq f(x) \leq M$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $B > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x)| \leq B$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ กำหนดให้ $g : [-B, B] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามโดย

$$g(t) = |t|$$

จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[-B, B]$ และ $f([a, b]) \subseteq [-B, B]$ โดยทฤษฎีบท 7.2.5 จะได้ว่า

$$g \circ f = |f|$$

หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จาก

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จากแบบฝึกหัดท้ายบท ข้อ 5 จะได้ว่า

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$$

ดังนั้น

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

□

7.3 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

สิ่งสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่ต้องกล่าวถึงของปริพันธ์ก็คือ ทฤษฎีบทที่สำคัญของปริพันธ์ที่มักถูกนำไปใช้ในทางแคลคูลัสอยู่เสมอ นั่นคือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส ซึ่งเป็นการกล่าวถึงการหาค่าของปริพันธ์บนเซตที่มีขอบเขต โดยในที่นี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทดังกล่าวพร้อมแสดงบทพิสูจน์ไว้ นอกจากนี้ ในส่วนนี้ยังคงกล่าวถึงสูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่ได้ถูกนำไปเป็นเทคนิคในการหาค่าปริพันธ์ในทางแคลคูลัสด้วยเช่นกัน ดังนั้น สิ่งที่ได้รับในหัวข้อนี้เป็นสิ่งที่มักถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการหาค่าปริพันธ์นั่นเอง โดยในการเริ่มต้นของหัวข้อนี้จะเริ่มจากการให้บทนิยามของค่าลบของฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 7.3.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยที่ $a < b$ จะนิยามให้

$$\int_b^a f = - \int_a^b f \text{ และ } \int_a^a f = 0$$

ต่อไปจะกล่าวถึงและแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 ซึ่งเป็นสิ่งที่ถูกนำไปใช้ในการพิจารณาฟังก์ชันปริพันธ์ทางแคลคูลัส นั่นคือ ถ้า $F'(x) = f(x)$ แล้ว F เป็นฟังก์ชันปริพันธ์ของฟังก์ชัน f หรือในทางแคลคูลัสจะเรียกฟังก์ชัน F ว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f นั่นเอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.1 [ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 (fundamental theorem of calculus 1)] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และกำหนดให้

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$ นอกจากนี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $c \in (a, b)$ แล้ว F จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $F'(c) = f(c)$

การพิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $B > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x)| \leq B$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

ต่อไปจะแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$

กำหนดให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ และสำหรับ $x, y \in [a, b]$ ซึ่ง $x < y$ เลือก $\delta = \frac{\epsilon}{B}$ ถ้า $|x - y| < \frac{\epsilon}{B}$ โดย

ทฤษฎีบท 7.2.4 และบทแทรก 7.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| \\
 &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| \\
 &= \left| \int_a^y f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \right| \\
 &= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\
 &\leq \int_x^y |f(t)|dt \\
 &\leq \int_x^y Bdt \\
 &= B(y - x) \\
 &< \epsilon
 \end{aligned}$$

ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบนช่วงปิด $[a, b]$

ต่อไปจะแสดงว่า F หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $F'(c) = f(c)$

จากกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $c \in (a, b)$ และให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $t \in (a, b)$

$$\text{ถ้า } |t - c| < \delta \text{ แล้ว } |f(t) - f(c)| < \epsilon$$

เนื่องจาก $f(c)$ เป็นค่าคงตัว โดยแบบฝึกหัดท้ายบท ข้อ 3 จะได้ว่า

$$f(c) = \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c)dt$$

สำหรับทุกๆ $x \neq c$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $x \in (a, b)$ ถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| &= \left| \frac{1}{x - c} (F(x) - F(c)) - \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c)dt \right| \\
 &= \left| \frac{1}{x - c} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt \right) - \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c)dt \right| \\
 &= \left| \frac{1}{x - c} \left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^c f(t)dt - \int_c^x f(c)dt \right) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{x - c} \left| \int_a^x f(t)dt + \int_c^a f(t)dt - \int_c^x f(c)dt \right| \right| \\
 &= \left| \frac{1}{x - c} \left| \int_c^x f(t)dt - \int_c^x f(c)dt \right| \right| \\
 &= \left| \frac{1}{x - c} \left| \int_c^x [f(t) - f(c)]dt \right| \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{x - c} \int_c^x |f(t) - f(c)|dt \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \left| \frac{1}{x-c} \right| \int_c^x \epsilon dt \\
&= \left| \frac{1}{x-c} \right| \epsilon |x-c| \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$F'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

นั่นคือ F หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b)

□

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันนี้ ยังสามารถแสดงได้อีกว่า ถ้า $c = a$ แล้ว

$$F'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a)$$

และถ้า $c = b$ แล้ว

$$F'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b)$$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างของการนำทฤษฎีบท 7.3.1 หรือทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 มาใช้ในการพิจารณาค่าปริพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3.1 กำหนดให้ $f(t) = |t|$ บนช่วง $[-2, 2]$ และให้ $F(x) = \int_{-2}^x f(t)dt$ จงหา $F'(x)$ ทุก $x \in (-2, 2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(t) = |t|$ โดยคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{เมื่อ } t \geq 0 \\ -t & \text{เมื่อ } t < 0 \end{cases}$$

ถ้า $x < 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-2}^x f(t)dt \\
&= \int_{-2}^x (-t)dt \\
&= -\int_{-2}^x tdt \\
&= -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} + 2
\end{aligned}$$

ถ้า $x > 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-2}^x f(t)dt \\
 &= \int_{-2}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\
 &= \int_{-2}^0 (-t)dt + \int_0^x tdt \\
 &= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right) \\
 &= 2 + \frac{x^2}{2}
 \end{aligned}$$

ถ้า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-2}^0 (-t)dt \\
 &= -\left(\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ทำให้ได้ว่า

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2 & \text{เมื่อ } -2 \leq x < 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ 2 + \frac{x^2}{2} & \text{เมื่อ } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ต่อไปจะแสดงว่า F หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดบน $(-2, 2)$ และ $F'(x) = f(x)$ บน $(-2, 2)$
กรณีที่ 1 ถ้า $-2 < c < 0$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 F'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) - \left(-\frac{c^2}{2} + 2\right)}{x - c} \\
 &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{c^2}{2}\right)}{x - c} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^2 - c^2)}{2(x - c)} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow c} \frac{x + c}{2} \\
 &= -c
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 ถ้า $c = 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + 2\right) - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + 2\right) - 2}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $F'_+(0) = 0 = F'_-(0)$

กรณีที่ 3 ถ้า $0 < c < 2$ แล้ว

$$\begin{aligned} F'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + 2\right) - \left(\frac{c^2}{2} + 2\right)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{2}\right)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x^2 - c^2)}{2(x - c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x + c}{2} \\ &= c \end{aligned}$$

จากทุกกรณีจึงจะเห็นได้ว่า F หาอนุพันธ์ได้ที่ c และ $F'(c) = c = |c| = f(c)$ นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in (-2, 2)$ □

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส 2 ซึ่งเป็นการแสดงบทพิสูจน์ของการพิจารณาค่าของการหาปริพันธ์ของ f' บนเซตที่มีขอบเขต ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.2 [ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2 (fundamental theorem of calculus 2)] ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ f' หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ และ f' หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ กำหนดให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 6.1.1 จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[x_{i-1}, x_i]$ และ f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (x_{i-1}, x_i) สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทค่ามัธยุม (ทฤษฎีบท 6.2.4) จะได้ว่า จะมี $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ ซึ่งทำให้

$$f'(t_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

ทำให้ได้ว่า $f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})f'(t_i)$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n [f'(t_i)(x_i - x_{i-1})] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $m_i(f') \leq f'(t_i) \leq M_i(f')$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L(P, f') &= \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n f'(t_i) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \\ &= f(b) - f(a) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i \\ &= U(P, f') \end{aligned}$$

จะเห็นว่า อสมการข้างต้นเป็นจริงสำหรับทุกๆ ผลแบ่งกั้น P ของช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น

$$L(f') \leq f(b) - f(a) \leq U(f')$$

แต่เนื่องจาก f' หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ ดังนั้น

$$L(f') = U(f') = \int_a^b f'$$

ทำให้ได้ว่า $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$

□

ตัวอย่างถัดไปจะเป็นการนำทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส 2 มาใช้ในการหาค่าปริพันธ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3.2 จงหาค่าของ $\int_1^2 (4x^3 - x^{-2})dx$

วิธีทำ เนื่องจากต้องการหาค่า $\int_1^2 (4x^3 - x^{-2})dx$ ซึ่ง $f'(x) = 4x^3 - x^{-2}$ จะเห็นว่า

$$f(x) = x^4 + x^{-1}$$

ซึ่ง $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุกๆ $x \in [1, 2]$ และ $f'(x) = 4x^3 - x^{-2}$ สามารถหาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[1, 2]$ โดยทฤษฎีบท 7.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3 - x^{-2})dx &= f(2) - f(1) \\ &= (2^4 + 2^{-1}) - (1^4 + 1^{-1}) \\ &= (16 + \frac{1}{2}) - (1 + 1) \\ &= \frac{29}{2} \end{aligned}$$

□

ในทฤษฎีบทต่อไป จะเป็นการแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ซึ่งเป็นอีกทฤษฎีบทหนึ่งที่สำคัญเกี่ยวกับปริพันธ์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.3 [ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ (mean value theorem for integrals)]

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ แล้วจะมีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f = f(c)(b - a)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 7.3.1 จะได้ว่า

$$F'(x) = f(x)$$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ดังนั้น F' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยทฤษฎีบท 6.2.4 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 7.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^b F' \\ &= F(b) - F(a) \\ &= F'(c)(b - a) \\ &= f(c)(b - a) \end{aligned}$$

□

ในทฤษฎีบทสุดท้ายที่จะถูกกล่าวถึงในบทนี้ เป็นอีกหนึ่งทฤษฎีบทที่ใช้เป็นเทคนิคในการหาค่าปริพันธ์ในทางแคลคูลัส ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีในชื่อว่าการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน ซึ่งจะแสดงบทพิสูจน์ของสูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.3.4 [สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (integration by parts formular)] ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ ซึ่งทั้ง f' และ g' เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g f'$$

การพิสูจน์ เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และโดยทฤษฎีบท 7.2.2 จะได้ว่า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้ากำหนดให้ $h = fg$ แล้ว

$$h' = f g' + g f'$$

โดยแบบฝึกหัดท้ายบท ข้อ 7 จะได้ว่า h' หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และโดยทฤษฎีบทหลักมูลแคลคูลัส 2 (ทฤษฎีบท 7.3.2) จะได้ว่า

$$\int_a^b h' = h(b) - h(a)$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_a^b f g' + \int_a^b f' g &= h(b) - h(a) \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b f g' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f' g$$

□

ต่อไปจึงขอนำเสนอตัวอย่างเพื่อประกอบความเข้าใจในการนำสูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนไปประยุกต์ใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3.3 จงหาค่าของ $\int_0^\pi e^x \cos x dx$

วิธีทำ กำหนดให้ $f_1(x) = e^x$ และ $g_1(x) = \sin x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[0, \pi]$ และ $f_1'(x) = e^x$, $g_1'(x) = \cos x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[0, \pi]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \cos x dx &= e^\pi \sin \pi - e^0 \sin 0 - \int_0^\pi \sin x e^x dx \\ &= e^\pi(0) - (1)(0) - \int_0^\pi \sin x e^x dx \\ &= - \int_0^\pi \sin x e^x dx \end{aligned}$$

และจะเห็นว่าถ้า $f_2(x) = e^x$ และ $g_2(x) = \cos x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[0, \pi]$ และ $f_2'(x) = e^x, g_2'(x) = -\sin x$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[0, \pi]$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} -\int_0^\pi e^x \sin x dx &= e^\pi \cos \pi - e^0 \cos 0 - \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= e^\pi(-1) - (1)(1) - \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= -e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \cos x dx \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \cos x dx &= -\int_0^\pi \sin x e^x dx \\ &= -e^\pi - 1 - \int_0^\pi e^x \cos x dx \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $2 \int_0^\pi e^x \cos x dx = -e^\pi - 1$ นั่นคือ $\int_0^\pi e^x \cos x dx = \frac{-e^\pi - 1}{2}$ □

7.4 บทสรุป

จากสิ่งที่กล่าวมาทั้งหมดในบทนี้ เป็นการกล่าวถึงบทนิยามของปริพันธ์รีมันน์ ซึ่งเป็นการแสดงให้เห็นใจความสำคัญและที่มาของการหาปริพันธ์ จากนั้นจึงได้ยกตัวอย่างของการหาปริพันธ์โดยใช้บทนิยาม และได้พิจารณาฟังก์ชันว่าเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้หรือไม่ โดยใช้ความสัมพันธ์ของผลบวกบนและผลบวกล่าง (ดังในทฤษฎีบท 7.1.3) ต่อจากนั้นได้แสดงการพิสูจน์ของคุณสมบัติของปริพันธ์รีมันน์ รวมถึงได้แสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันทางเดียวบนช่วงปิดที่มีขอบเขตเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิดนั้นๆ และฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจะเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิดนั้นด้วย จากนั้นจึงเป็นในส่วนของการดำเนินการทางพีชคณิตต่างๆ สำหรับฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้พร้อมยกตัวอย่างประกอบ และในหัวข้อสุดท้ายของบทนี้ เป็นการแสดงทฤษฎีบทที่สำคัญของปริพันธ์ รวมถึงเทคนิควิธีซึ่งถูกนำไปประยุกต์ใช้ในการคำนวณทางแคลคูลัสอยู่เสมอ นั่นคือ ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับปริพันธ์ และสุดท้ายคือ สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนพร้อมตัวอย่างประกอบ โดยในบทนี้ หวังว่าผู้อ่านจะได้ทราบถึงพื้นฐานความรู้ของปริพันธ์ ตลอดจนเทคนิควิธีที่นำไปประยุกต์ใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาเรื่องปริพันธ์ในระดับที่สูงขึ้น

แบบฝึกหัดท้ายบท

- กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า P และ Q เป็นผลแบ่งกั้นของช่วงปิด $[a, b]$ และ Q เป็นผลแบ่งกั้นละเอียดขึ้นของ P จงพิสูจน์ว่า $U(Q, f) \leq U(P, f)$
- จงพิสูจน์บทตั้ง 7.1.1
- กำหนดให้ $f(x) = c$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จงแสดงว่า f หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ $\int_a^b f(x)dx = c(b - a)$
- จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง $k < 0$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว kf หาปริพันธ์ได้ และ $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
- กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และ $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

- กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ โดยใช้ทฤษฎีบท 7.1.3 พิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f^2 หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$
- กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จงพิสูจน์ว่า fg เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ (ข้อเสนอแนะ: $fg = \frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$)
- กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ และกำหนดให้ $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จงพิสูจน์ว่า

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a)$$

บทที่ 8

อนุกรมของจำนวนจริง

ในบทเรียนสุดท้ายของเล่มนี้เป็นอีกเรื่องหนึ่งที่ต้องศึกษาและทำความเข้าใจ ซึ่งเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับลำดับของจำนวนจริงที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 3 โดยในบทนี้จะศึกษาเรื่อง อนุกรม นั่นเอง โดยอนุกรม ก็คือ การหาผลรวมของลำดับ ดังนั้นในบทนี้จึงจะนำความรู้ในเรื่องของลำดับที่ได้ศึกษาไปแล้วในบทที่ 3 นั้นมาเป็นเครื่องมือในการศึกษาและพิสูจน์ทฤษฎีบทด้วย อนุกรมเป็นอีกหนึ่งความรู้พื้นฐานในการศึกษาทางคณิตศาสตร์เพราะไม่ว่าจะเป็นการหาปริพันธ์ (บทที่ 7) ก็ได้มีการใช้เรื่องของผลรวม (sum) เป็นพื้นฐานในการได้มาซึ่งบทนิยามของปริพันธ์ และไม่ได้มีเพียงเท่านี้ เนื้อหาเรื่องผลรวมนั้นยังเป็นเรื่องที่สำคัญและได้ถูกใช้บ่อยๆ รวมทั้งในทางสถิติด้วย โดยในทางสถิติ ผลรวมมักจะอยู่ในสูตรต่างๆ ยกตัวอย่างเช่น การหาค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และในการศึกษาเชิงลึกของสถิติก็ยังมีในเรื่องของการถดถอย อีกทั้งวิธีกำลังสองน้อยสุด เป็นต้น ที่ได้นำเรื่องผลรวมไปใช้ จากความสำคัญของอนุกรมที่กล่าวมา ทำให้เนื้อหาในบทนี้จึงจะเริ่มจากพื้นฐานของการกล่าวถึงบทนิยามอนุกรมอนันต์ และการนิยามการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ และพิสูจน์ทฤษฎีบทพื้นฐานที่สำคัญของอนุกรมอนันต์ลู่เข้า ต่อจากนั้นในหัวข้อที่สอง จะกล่าวถึงวิธีการต่างๆ ที่ใช้ในการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ของทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ด้วย ดังนั้น ในส่วนแรกของบทนี้ จึงจะเริ่มต้นจากการกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมอนันต์และการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

8.1 อนุกรมอนันต์

เนื้อหาตลอดบทนี้ จะกำหนดให้ $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนจริง จะใช้สัญลักษณ์

$$\sum_{k=m}^n a_k$$

แทนผลบวก $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$ เมื่อ $n \geq m$ และจะกล่าวว่าลำดับ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็น *ผลบวกย่อย (partial sum)* ที่เกิดจากลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เมื่อ $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

บทนิยาม 8.1.1 กำหนดให้ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยที่เกิดจากลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เรียกลำดับ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ว่า *อนุกรมอนันต์ (infinite series)* หรือ *อนุกรม (series)* และเขียนแทนด้วย

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \text{ หรือ } \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

ถ้าลำดับ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า (converge) สู่จำนวนจริง $s \in \mathbb{R}$ (นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$) แล้วจะกล่าวได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ และจำนวนจริง s จะถูกเรียกว่า *ผลบวก (sum) ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*

และจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ลู่ออก (diverge)* ถ้าลำดับ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก และถ้าหาก $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ แล้วจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกสู่ $+\infty$ และเขียนแทนด้วย $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

ต่อไปเป็นการพิจารณาการลู่เข้าของลำดับที่กำหนดให้ตามบทนิยามข้างต้น

ตัวอย่าง 8.1.1 จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

วิธีทำ เนื่องจากผลบวกย่อย

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

และ

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

สำหรับทุก ๆ $n \geq 1$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0$ จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

□

ตัวอย่าง 8.1.2 จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $s_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$ □

ตัวอย่าง 8.1.3 จงแสดงว่าอนุกรมฮาร์โมนิก (Harmonic series) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ ลู่ออกสู่ $+\infty$

วิธีทำ เนื่องจากผลบวกย่อย

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ถ้า $m > n$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} s_m - s_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} \\ &> \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} \quad (\text{มีจำนวน } m-n \text{ พจน์}) \\ &= \frac{m-n}{m} \\ &= 1 - \frac{n}{m} \end{aligned}$$

ถ้าให้ $m = 2n$ จะได้ว่า $s_{2n} - s_n > \frac{1}{2}$ นี่แสดงว่า $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ไม่เป็นลำดับโคซี ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่ออก และเนื่องจาก $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ที่ไม่มีขอบเขต จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

□

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติพื้นฐานของผลรวมซึ่งถูกนำไปใช้ทางแคลคูลัสอยู่เสมอ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.1 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = s + t$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (ka_n) = ks$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{R}$

การพิสูจน์ แบบฝึกหัด □

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทข้างต้น จะเห็นว่าการบวกกันของอนุกรมอนันต์หรือการคูณอนุกรมอนันต์ด้วยค่าคงที่นั้น ต้องทราบก่อนว่าอนุกรมอนันต์เหล่านั้นลู่เข้า จึงจะได้ผลลัพธ์ตามทฤษฎีบท 8.1.1

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรม โดยจะใช้ทฤษฎีบท 8.1.1 มาช่วยในการพิจารณาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1.4 จงพิจารณาว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} + \frac{2}{n(n+1)}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนี้

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right)$$

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right)$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต และ $r = \frac{1}{3}$ โดยที่ $|r| < 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่ง

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right) = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

และจากตัวอย่าง 8.1.1 จะเห็นว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2(1)$$

ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} + \frac{2}{n(n+1)} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n(n+1)} \right) \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} \right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \right) + 2(1) \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทต่อไปเป็นการแสดงว่าถ้าพิจารณาผลรวมของอนุกรมสองอนุกรม โดยที่มีอนุกรมหนึ่งลู่ออกแล้ว ผลรวมของสองอนุกรมนั้นจะลู่ออก ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.2 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าและ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

จะแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก โดยจะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง

สมมติให้ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และจากสมมติฐานที่ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จึงทำให้ได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((a_n + b_n) + (-1)a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐานที่ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ดังนั้น จึงทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก □

ทฤษฎีบทต่อไปจะแสดงว่าถ้าผลรวมอนุกรมอนันต์ลู่เข้า แล้วลิมิตของลำดับของอนุกรมนั้นจะลู่เข้าสู่ศูนย์ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.3 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยที่เกิดจากลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ดังนั้น จะมีจำนวนจริง s ซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ และเนื่องจาก

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

จากทฤษฎีบทข้างต้น โดยการแย้งสลับที่ ทำให้ได้ผลลัพธ์ว่า ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้น จึงจะใช้ผลลัพธ์นี้ในการพิจารณาการลู่ออก ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1.5 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n$$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 8.1.3 จะนำมาใช้ในการพิจารณาอนุกรมต่อไปนี้

(1) กำหนดให้ $a_n = \frac{n}{n+1}$ และจะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ซึ่งไม่เป็น 0 โดยทฤษฎีบท 8.1.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่เป็นอนุกรมลู่เข้า นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(2) กำหนดให้ $a_n = n$ และจะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ ซึ่งไม่เป็น 0 โดยทฤษฎีบท 8.1.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

□

หมายเหตุ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ อาจจะเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ ยกตัวอย่างเช่น

(1) ถ้ากำหนดให้ $a_n = n$ และ $b_n = -n$ โดยที่ $a_n + b_n = 0$ ซึ่งจากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

(2) ถ้ากำหนดให้ $a_n = n$ และ $b_n = n$ จะเห็นว่า $a_n + b_n = 2n$ ซึ่งจะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก และ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0$ ก็เป็นอนุกรมลู่ออก

ดังนั้น จาก (1) และ (2) จึงทำให้เห็นว่า ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ทำให้ไม่สามารถที่จะตอบได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 0$ เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่เข้าหรือไม่

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้า โดยพิจารณาจากค่าสัมบูรณ์ของผลรวมบางพจน์ของลำดับดังกล่าว นั่นคือ ถ้าค่าสัมบูรณ์ของผลรวมบางพจน์ของลำดับดังกล่าวมีค่าน้อยกว่าทุกๆ จำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ แล้วจะทำให้ได้ว่าอนุกรมอนันต์นั้นลู่เข้า โดยการตรวจสอบนี้มีชื่อว่า เกณฑ์โคชีสำหรับอนุกรม ดังจะกล่าวในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.1.4 [เกณฑ์โคชีสำหรับอนุกรม (Cauchy criterion for series)] อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \epsilon$ สำหรับทุกๆ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq m > N$

การพิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นลำดับลู่เข้าและให้จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่า ลำดับของผลบวกย่อย $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.1 จะได้ว่า $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี จึงทำให้ได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|s_n - s_m| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m, n > N$ ดังนั้น ถ้า $n \geq m > N^*$ เมื่อ $N^* = N + 1$ แล้ว $m - 1 > N$ ทำให้ได้ว่า

$$|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| = |s_n - s_{m-1}| < \epsilon$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้แต่ละจำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n, m \in \mathbb{N}$ และ $n \geq m > N$ ดังนั้น สำหรับทุกๆ $n > m > N$ จะเห็นว่า $m + 1 > N$ จะได้ว่า

$$|s_m - s_n| = |a_{m+1} + \dots + a_n| < \epsilon$$

จึงทำให้ได้ว่า $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับโคชี ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3.6 จะได้ว่า $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\square$

ต่อไปจะแนะนำอนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots \quad (8.1)$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใดๆ จะเรียกอนุกรม (8.1) ว่า **อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)**

ตัวอย่างต่อไปเป็นการแสดงบทพิสูจน์ของการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมเรขาคณิต โดยที่พิจารณาบนเงื่อนไขของ $|r|$ เมื่อ r สอดคล้อง (8.1)

ตัวอย่าง 8.1.6 จงแสดงว่าถ้า $|r| < 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ลู่เข้าสู่ $\frac{1}{1-r}$ และถ้า $|r| \geq 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ จะเป็นอนุกรมลู่ออก

วิธีทำ จะพิจารณา $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ จึงกำหนดให้ผลบวกย่อย

$$s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}(1-r)s_n &= (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n) \\ &= 1-r^{n+1}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$s_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

ถ้า $|r| < 1$ โดยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ข้อ 1 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-r}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

ถ้า $|r| \geq 1$ จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \neq 0$ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 8.1.3 ทำให้ได้ว่า $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก $\square$

8.2 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม

จากหัวข้อที่ผ่านมา ได้มีการกล่าวถึงการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ แต่ในการพิจารณาว่าอนุกรมจะลู่เข้าหรือไม่นั้นจะต้องมีวิธีการทดสอบ โดยในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงวิธีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมในวิธีต่างๆ ได้แก่ การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ การทดสอบแบบอัตราส่วน การทดสอบโดยราก การทดสอบโดยปริพันธ์ และการทดสอบอนุกรมสลับ พร้อมทั้งแสดงบทพิสูจน์ของการทดสอบดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นด้วย

ทฤษฎีบท 8.2.1 [การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ (comparison test)] กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ (นั่นคือ $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$) และมีจำนวนจริง $M > 0$ และ $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง

$$0 \leq a_n \leq Mb_n$$

สำหรับทุก $n > n_0$ แล้วข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
- (2) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

การพิสูจน์ กำหนดให้จำนวนจริง $M > 0$ และ $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $0 \leq a_n \leq Mb_n$ สำหรับทุก $n > n_0$ จะเห็นว่า ถ้า $n_0 \leq m < k$ แล้ว

$$0 \leq \sum_{n=m+1}^k a_n \leq \sum_{n=m+1}^k Mb_n$$

(1) กำหนดให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 8.1.4 สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ $k_0 \geq n_0$ ซึ่งทำให้

$$\sum_{n=m+1}^k b_n < \frac{\epsilon}{M}$$

สำหรับทุกๆ $k > m \geq k_0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=m+1}^k a_n \\ &\leq \sum_{n=m+1}^k Mb_n \\ &= M \sum_{n=m+1}^k b_n \\ &< M \left(\frac{\epsilon}{M} \right) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $k > m > k_0$ โดยทฤษฎีบท 8.1.4 จึงได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

(2) กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก โดยข้อ (1) ทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออกด้วย และเนื่องจาก $b_n \geq 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า ลำดับของผลบวกย่อย $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ ที่เกิดจาก $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ซึ่งเป็นลำดับเพิ่มทางเดียว เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$ $\square$

ตัวอย่างต่อไป จะพิจารณาอนุกรมอนันต์ว่าลู่เข้าหรือไม่ โดยใช้วิธีการทดสอบโดยการเปรียบเทียบ

ตัวอย่าง 8.2.1 จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ จากตัวอย่าง 8.1.1 ทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ลู่เข้า และเนื่องจาก

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ โดยทฤษฎีบท 8.2.1 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ลู่เข้า $\square$

ต่อไปจะแนะนำอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ซึ่งเป็นการกล่าวถึงอนุกรมของลำดับที่อยู่ในค่าสัมบูรณ์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (absolutely convergent series) และถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้าออก จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข (conditionally convergent series)

ต่อไปเป็นการแสดงให้เห็นว่า ถ้าอนุกรมอนันต์ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้วอนุกรมนั้นจะลู่เข้า ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2.2 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้า

การพิสูจน์ กำหนดให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จากทฤษฎีบท 8.1.4 จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \epsilon$$

สำหรับทุก ๆ $n \geq m > N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |a_m + a_{m+1} + \dots + a_n| &\leq |a_m| + |a_{m+1}| + \dots + |a_n| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 8.1.4 จึงทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า □

ต่อไปจะยกตัวอย่างของอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 8.2.2 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

วิธีทำ จะพิจารณา $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$ โดยจะเห็นว่าสำหรับกรณีที่ $n > 3$ จะได้ว่า

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{(n+1)^2}$$

และจากตัวอย่าง 8.2.1 ทราบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8.1.1 ข้อ (2) จึงทำให้ได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)^2}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า และใช้ทฤษฎีบท 8.2.1 ข้อ (1) จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right|$$

เป็นอนุกรมลู่เข้า จึงทำให้สรุปได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ □

ต่อไปจะกล่าวถึงอีกหนึ่งวิธีการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ นั่นคือ การทดสอบโดยอัตราส่วน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2.3 [การทดสอบโดยอัตราส่วน (ratio test)] กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
- (2) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก
- (3) ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ แล้วการทดสอบนี้ไม่มีข้อสรุป

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่มีทุกพจน์ไม่เป็นศูนย์

- (1) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ ถ้า $L < 1$ แล้วโดยทฤษฎีบท 1.3.7 จะได้ว่าจะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $L < r < 1$ โดยทฤษฎีบท 3.3.7 จึงทำให้ได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq r$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงทำให้ได้ว่า

$$|a_{n+1}| \leq r|a_n|$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |a_{N+k}| &\leq r|a_{N+(k-1)}| \\ &\leq r^2|a_{N+(k-2)}| \\ &\vdots \\ &\leq r^k|a_N| \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ และเนื่องจาก $0 < r < 1$ และจากตัวอย่าง 8.1.6 จะได้ว่าอนุกรมเรขาคณิต $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ ลู่เข้า จึงได้ว่า $\sum_{k=1}^{\infty} r^k|a_N|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 8.2.1 ทำให้ได้ว่า อนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{N+k}|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ จึงได้ว่า $\sum_{n>N} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

- (2) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ โดยทฤษฎีบท 3.3.7 จะได้ว่า จะมี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

สำหรับทุกๆ $n > n_0$ ทำให้ได้ว่า

$$|a_{n+1}| > |a_n|$$

สำหรับทุกๆ $n > n_0$ และเนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ทุกพจน์ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 8.1.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

(3) จากตัวอย่าง 8.2.2 จะเห็นว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right)$ ลู่เข้า และ

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^2}{(n+1)^2} \right| \\ &= 1\end{aligned}$$

และจากตัวอย่าง 8.1.3 ทราบว่าอนุกรมฮาร์มอนิก $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ ลู่ออก ซึ่ง

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$$

นั่นคือ ทั้งสองอนุกรม

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

จากทั้งสองอนุกรมอนันต์มี $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ แต่จะเห็นว่าอนุกรมหนึ่งลู่เข้าส่วนอีกอนุกรมหนึ่งลู่ออก จึงทำให้ไม่สามารถสรุปได้ว่าถ้าสำหรับอนุกรมซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ แล้วอนุกรมเหล่านั้นอาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

□

ตัวอย่างต่อไปเป็นการนำการทดสอบโดยอัตราส่วนมาใช้ในการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรม ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.2.3 จงพิจารณาว่าอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) r^n$ จะลู่เข้าเมื่อ r มีค่าเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์จะพิจารณาการทดสอบโดยอัตราส่วนในการพิจารณาการลู่เข้า ถ้ากำหนดให้

$a_n = \left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) r^n$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(2 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2}\right) r^{n+1}}{\left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right) r^n} \\ &= r \frac{\left(2 + \sin \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{\left(2 + \sin \frac{n\pi}{2}\right)}\end{aligned}$$

จากข้างต้นจะเห็นว่า ถ้า $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วค่าของ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ที่เป็นไปได้ คือ $\frac{3r}{2}$ หรือ $\frac{2r}{3}$ หรือ $\frac{r}{2}$ หรือ $2r$ ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = 2r$$

และ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{r}{2}$$

จึงทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าเมื่อ $0 < r < \frac{1}{2}$ และลู่ออกเมื่อ $r > 2$ ซึ่งกรณีที่ $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$ นั้นไม่สามารถสรุปได้ในการทดสอบชนิดนี้

□

ตัวอย่าง 8.2.4 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{2^n}{n!}$ จะเห็นว่า $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right| \\ &= \left| \frac{2}{n+1} \right| \\ &= \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

พิจารณา $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า □

ตัวอย่าง 8.2.5 จงตรวจสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ln n}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{e^n}{3^{\ln n}}$ จะเห็นว่า $a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{3^{\ln(n+1)}}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{e^{n+1}}{3^{\ln(n+1)}} \cdot \frac{3^{\ln n}}{e^n} \right| \\ &= \left| \frac{e}{3^{\ln(n+1) - \ln n}} \right| \\ &= \frac{e}{3^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{3^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}} \\ &= \frac{e}{3^0} \\ &= e \\ &> 1 \end{aligned}$$

จึงทำให้ได้ว่า อนุกรมลู่ออก □

สำหรับการทดสอบชนิดถัดไปเป็นการทดสอบโดยราก โดยจะแสดงบทพิสูจน์ในทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 8.2.4 [การทดสอบโดยราก (root test)] กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = A$ ดังนั้นข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) ถ้า $A < 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
- (2) ถ้า $A > 1$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก
- (3) ถ้า $A = 1$ แล้วการทดสอบนี้ไม่มีข้อสรุป

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = A$

- (1) กำหนดให้ $A < 1$ โดยทฤษฎีบท 1.3.7 จะได้ว่าจะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $A < r < 1$ และโดยทฤษฎีบท 3.3.7 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < r$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ทำให้ได้ว่า

$$|a_n| < r^n$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ เนื่องจาก $|r| < 1$ โดยตัวอย่าง 8.1.6 จึงทำให้ได้ว่า อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ลู่เข้า และโดยทฤษฎีบท 8.2.1 จึงทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

- (2) กำหนดให้ $A > 1$ โดยทฤษฎีบท 3.3.7 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$1 \leq |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ทำให้ได้ว่า

$$1 \leq |a_n|$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ โดยทฤษฎีบท 3.1.1 จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| > 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 8.1.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

- (3) จากตัวอย่าง 8.1.3 และตัวอย่าง 8.2.2 ทราบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก และเนื่องจากแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3 ข้อ 7 ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} \right|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n^2)^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n^{\frac{1}{n}})^2} \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}})^2} \\ &= \frac{1}{1^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right|^{\frac{1}{n}} = 1$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^2} \right| = 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right| = 1$ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ลู่ออก จึงทำให้ไม่สามารถสรุปได้ว่า ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าหรือลู่ออก

□

ต่อไปเป็นตัวอย่างของการใช้การทดสอบโดยราก เพื่อพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

ตัวอย่าง 8.2.6 จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \frac{n}{2^n}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right) \left(\frac{2^n}{n}\right) \\ &= \frac{n+1}{2n}\end{aligned}$$

ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}$ โดยทฤษฎีบท 8.2.4 จึงทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n}\right)$ ลู่เข้า

ในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^{\frac{1}{n}}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n} \ln n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n}}\right) \\ &= \frac{1}{2} (e^0) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

โดยทฤษฎีบท 8.2.4 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ ลู่เข้า □

ตัวอย่าง 8.2.7 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ln(2^n+1)}\right)^n$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $a_n = \left(\frac{n}{\ln(2^n+1)}\right)^n$ โดยที่ $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\ln(2^n+1)}$ ซึ่งจะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(2^n+1)}$ อยู่ในรูป $\frac{\infty}{\infty}$ จึงต้องใช้กฎโลปีตาล ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ln(2^n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2^n+1}\right) \frac{d}{dn}(2^n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{2^n \ln 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{2^n+1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= \frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

ซึ่ง $0 < \ln 2 < \ln e = 1$ ดังนั้น $\frac{1}{\ln 2} > 1$ ดังนั้น อนุกรมลู่ออก □

ต่อไปจะเป็นการทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์โดยปริพันธ์ ซึ่งมีการพิจารณาการลู่เข้าดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2.5 [การทดสอบโดยปริพันธ์ (integral test)] กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ และกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันลดลงที่เป็นบวก (นั่นคือ สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \geq f(x_2) > 0$) ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\int_1^n f(x) dx)$ หาค่าได้

การพิสูจน์ กำหนดให้ $a_n = f(n)$ และ $b_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันลดลง จะได้ว่า แต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

สำหรับทุกๆ $x \in [n, n+1]$ โดยแบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7 ข้อ 8 จะได้ว่า

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$0 < a_{n+1} \leq b_n \leq a_n$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

($\Rightarrow$) สมมติให้อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ลู่เข้า นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8.2.1 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\int_1^n f(x) dx)$ หาค่าได้นั่นเอง

($\Leftarrow$) สมมติให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\int_1^n f(x) dx)$ หาค่าได้ ทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 8.2.1 จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\square$

ต่อไปเราจะใช้การทดสอบโดยปริพันธ์ พิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

ตัวอย่าง 8.2.8 จงพิจารณาว่าอนุกรมพี (p-series) ต่อไปนี้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = 1$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^p} \right|^{\frac{1}{n}} = 1$ ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้การทดสอบโดยอัตราส่วนและการทดสอบโดยรากได้ จึงจะทดสอบโดยใช้การทดสอบโดยปริพันธ์

กรณีที่ 1 ถ้า $p = 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ โดยตัวอย่าง 8.1.3 ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณีที่ 2 ถ้า $p \leq 0$ แล้วจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 8.1.3 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

กรณีที่ 3 ถ้า $p > 0$ ในกรณีนี้ จะกำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ถ้า $p \neq 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx &= \left[-\frac{1}{x^{p-1}(p-1)} \right]_1^n \\ &= \frac{1}{p-1} \left(1 - \frac{1}{n^{p-1}} \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p-1}$ เมื่อ $p > 1$ และจะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \infty$ เมื่อ $0 < p < 1$ ดังนั้นโดยการทดสอบโดยปริพันธ์ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^p}\right)$ ลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และลู่ออกเมื่อ $0 < p < 1$ ดังนั้นจากทุกกรณีข้างต้นจึงทำให้สรุปได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$ $\square$

ตัวอย่าง 8.2.9 จงทดสอบว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{ne^{\sqrt{n}}}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(-1)}{(\sqrt{xe^{\sqrt{x}}})^2} \left[\sqrt{xe^{\sqrt{x}}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + e^{\sqrt{x}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) \right] \\ &= \frac{(-1)}{(\sqrt{xe^{\sqrt{x}}})^2} \left[\sqrt{xe^{\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + e^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นว่า $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ $x \geq 1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดและเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[1, \infty)$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_1^n f(x) dx &= \int_1^n \frac{1}{\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}} dx \\ &= -\frac{2}{e^{\sqrt{n}}} + \frac{2}{e} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \frac{2}{e}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแน่นอน $\square$

และสุดท้ายของบทนี้ จะกล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมสลับ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 8.2.2 กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมอนันต์ ถ้าพจน์ในอนุกรมนี้มีค่าสลับกันระหว่างจำนวนจริงบวกและจำนวนจริงลบแล้วจะเรียกอนุกรมนี้ว่า *อนุกรมสลับ (alternating series)*

ต่อไปเป็นทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมสลับ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2.6 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลดลงทางเดียวของจำนวนจริงบวกและ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ลู่เข้า

การพิสูจน์ กำหนดให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดลงทางเดียวของจำนวนจริงบวก และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ และให้ $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยที่เกิดจากลำดับ $\{(-1)^{n+1} a_n\}$ จะได้ว่า

$$s_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$$

เนื่องจาก $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดลงทางเดียว จะได้ว่า $a_k - a_{k+1} \geq 0$ สำหรับทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จึงทำให้ได้ว่าลำดับย่อย $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับเพิ่มทางเดียว นอกจากนี้ จะเห็นว่า

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1$$

ดังนั้น ลำดับ $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตบน โดยทฤษฎีบท 3.3.1 จะได้ว่า ลำดับย่อย $\{s_{2n}\}$ ลู่เข้าสู่บางจำนวนจริง s และสำหรับผลบวกย่อยของจำนวนคี่เราจะทราบว่า

$$s_{2n+1} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1}$$

โดยกระบวนการเดียวกับข้างต้น จะได้ว่า ลำดับย่อย $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียวและมีขอบเขตล่างเป็น 0 ดังนั้น จะมีจำนวนย่อยของ $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลู่เข้า

เนื่องจาก $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$$

สำหรับบาง $s \in \mathbb{R}$ ทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ จะได้ว่าจะมีจำนวนนับ N_1 และ N_2 ซึ่งทำให้

$$|s_{2n} - s| < \epsilon \text{ สำหรับทุกๆ } n > N_1$$

และ

$$|s_{2n+1} - s| < \epsilon \text{ สำหรับทุกๆ } n > N_2$$

ดังนั้น ถ้าให้ $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ แล้วจะได้ว่า

$$|s_n - s| < \epsilon \text{ สำหรับทุกๆ } n > N$$

นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ จึงกล่าวได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = s$ นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ลู่เข้า $\square$

ในตัวอย่างสุดท้ายนี้ จะพิจารณาอนุกรมสลับโดยใช้ทฤษฎีบท 8.2.6 มาช่วยในการพิจารณา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.2.10 จงตรวจสอบว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ พิจารณาเช่นเดียวกับตัวอย่าง 8.2.2 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ ลู่เข้า และถ้าพิจารณาโดยทฤษฎีบท 8.2.6 จะเห็นว่า เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ และ $\frac{1}{n} > 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และ $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลดลงทางเดียวของจำนวนจริงบวก ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8.2.6 จึงได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า $\square$

8.3 บทสรุป

เนื้อหาในบทนี้ ได้กล่าวถึงบทนิยามของอนุกรมอนันต์ การลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมอนันต์ และคุณสมบัติพื้นฐานของอนุกรมอนันต์ รวมถึงได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญคือ เกณฑ์โคชีสำหรับอนุกรม (ทฤษฎีบท 8.1.4) ซึ่งเป็นทฤษฎีบทหนึ่งที่เราพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์พร้อมแสดงบทพิสูจน์ และต่อจากนั้น ในส่วนที่สองได้นำเสนอวิธีการทดสอบอนุกรมอนันต์ในวิธีการต่างๆ เพื่อเป็นการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ โดยในที่นี้ได้กล่าวถึง การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ

เทียบ การทดสอบโดยอัตราส่วน การทดสอบโดยราก และการทดสอบโดยปริพันธ์ และสุดท้ายของหัวข้อนี้เราได้กล่าวถึงอนุกรมสลับ รวมทั้งการพิจารณาการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์ของอนุกรมสลับด้วย ซึ่งทั้งหมดที่กล่าวมานี้เพื่อให้ผู้อ่านได้รู้จักอนุกรมอนันต์ และทราบเครื่องมือที่ช่วยในการพิจารณาหรือหาค่าของอนุกรมอนันต์นั้นๆ พร้อมทั้งมีตัวอย่างประกอบ และยิ่งไปกว่านั้นผู้อ่านสามารถค้นคว้าและศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิงท้ายเล่มนี้

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 8.1.1

2. ตรวจสอบว่าอนุกรมในข้อต่อไปนีลู่เข้าหรือลู่ออก พร้อมอธิบายเหตุผล

$$2.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sqrt{2}}$$

$$2.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$$

$$2.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

$$2.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$2.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2.6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$$

$$2.7 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\frac{1}{n}}$$

$$2.8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

3. ตรวจสอบว่าอนุกรมในข้อต่อไปนีลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่ออก พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

$$3.1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

$$3.2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$$

$$3.3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}$$

$$3.4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$$

$$3.5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

$$3.6 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$$

$$3.7 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$3.8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \right)$$

4. กำหนดให้ $a_n > 0$ และ $b_n = 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และถ้า $\frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้วจงพิสูจน์ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

5. กำหนดให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n$$

สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า จงพิสูจน์ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

6. จงพิสูจน์ว่าถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขแล้วอนุกรมของพจน์ที่เป็นบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่ออก

บรรณานุกรม

- [1] จริยา อู่ยะเสถียร, ศจี เพียรสกุล, อารยา วิวัฒน์วานิช. (2552). แคลคูลัส 1. ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นจาก <http://pioneer.chula.ac.th/uchariya/2301113.htm>.
- [2] ดำรงค์ ทิพย์ โยธา. (2560). แคลคูลัส 2. ภาควิชาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. สืบค้นจาก http://pioneer.netserve.chula.ac.th/tdumrong/2301118/ch1_4in1.pdf
- [3] บรรพต สุวรรณประเสริฐ. (2541). ทฤษฎีเซต. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- [4] วินิจ เทือกทอง. (2538). การวิเคราะห์จำนวนจริงเบื้องต้น. ภาควิชาพัฒนมาตรฐานตำราและเอกสารวิชาการ. หน่วยงานพิเศษ สำนักงานสภาสถาบันราชภัฏ.
- [5] สุเทพ ทองอยู่. (2526). การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์. ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- [6] สมยศ พลัทธิง, (2542). การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์. ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร.
- [7] สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. (2559). พจนานุกรมศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา พิมพ์ครั้งที่ 11. กรุงเทพฯ.
- [8] อิศระ อินจันทร์, (2554). การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์. หลักสูตรคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์.
- [9] Berinde, V. (2000). Iterative Approximation of Fixed Points (2nd ed.). Springer. Romania.
- [10] Chang, S. S., Lee, H.W., Chan, C.K. (2009). A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 70(9), 3307--3319.
- [11] Hutchinson, John E. (1995). Introduction to Mathematical Analysis. Department of Mathematics School of Mathematical Sciences ANU.

- [12] Joshi, V., Singh, D., Singh, A. (2020). Applicative approach of fixed point theorems towards various engineering problems. *Fixed Point Theory*, 21(2020) (2), 595--610.
- [13] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. USA.
- [14] Lebl, J. (2009). *Basic Analysis Introduction to Real Analysis*. Retrieved from <https://www.jirka.org/ra/realanal.pdf>.
- [15] Liduka, H. (2012). Fixed point optimization algorithm and its application to network bandwidth allocation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(7), 1733--1742.
- [16] Neil, A. W. (1993). *Mathematical Analysis Explained*. Department of Mathematics University of Canterbury, New Zealand.
- [17] Petrot, N., Tangkhawiwetkul, J. (2018). The dynamical system for system of variational inequality problem in Hilbert spaces. *Communications in Mathematics and Applications*, 9(4), 541--558.
- [18] Petrot, N., Tangkhawiwetkul, J. (2020). The stability of dynamical system for quasi mixed equilibrium problem in Hilbert spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 18(3), 1433--1446.
- [19] Petrot, N., Tangkhawiwetkul, J. (2022). Equilibrium point of supply chain network comprising disaster relief model via variational inequality problem. *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization: Theory & Applications*, 13(2), 85--2022.
- [20] Perko, L. (2000). *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, USA.
- [21] Rudin, W. (1964). *Principle of Mathematical Analysis*. Department of Mathematics University of Wisconsin, United States.
- [22] Schauder, J. (1930). Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. *Studia Math.*, 2, 171--180.
- [23] Schroder, Bernd S.W. (2007). *Mathematical Analysis: A concise introduction*, Jonh Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA.

- [24] Steven, R. Lay (1986). Analysis An Introduction to Proof. Department of Mathematics Aurora University, Aurora, Illinois.
- [25] Takahashi, W. (2009). Introduction to Nonlinear and Convex Analysis. Yokohama, Yokohama Publishers.
- [26] Tangkhawiwetkul, J. (2023). A neural network for solving the generalized inverse mixed variational inequality problem in Hilbert spaces, AIMS Mathematics, 8(3), 7258--7276.
- [27] Tangkhawiwetkul, J., Petrot, N. (2019). Dynamical system for the system of variational inclusion problem, Rajabhat J. Sci. Humanit. Soc. Sci., 20(2), 236--247.
- [28] Trench, William F. (2013). Introduction to real analysis. Department of Mathematics Trinity University San Antonio, Texas, USA.
- [29] Shunmugaraj, P. (2013). Mathematics I MTH 101AA. Department of Mathematics, Indian Institute of Technology, Kanpur. Retrieved from https://home.iitk.ac.in/~psraj/mth101/lecture_notes/lecturer10.pdf

เฉลยแบบฝึกหัด

บทที่ 1

1.1) (1.1) กำหนดให้ $a > 0$ และ $b > 0$ จะได้ว่า $a - 0 \in P$ และ $b - 0 \in P$

ดังนั้น $(a - 0) + (b - 0) = a + b \in P$ นั่นคือ $(a + b) - 0 \in P$

จึงสรุปได้ว่า $a + b > 0$

(1.2) จะเห็นว่า $a = a - 0 \in P$ และ $b = b - 0 \in P$ โดยข้อ 3) จาก**สัจพจน์ 2** จึงได้ว่า $ab \in P$
จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.3) เนื่องจาก $a - b \in P$ และ $b - c \in P$ จะได้ว่า $a - c \in P$ จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.4) แสดงวิธีทำในทำนองเดียวกับข้อ (1.3)

(1.5) เนื่องจาก $b - a \in P$ ทำให้ได้ว่า $b - c + c - a \in P$ โดยสมบัติการจัดหมู่การบวก จึง
ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.6) เนื่องจาก $b - a \in P$ และใช้ทฤษฎีบท 1.1.1 ข้อ 4) จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.7) เนื่องจาก $b - a \in P$ และ $c - 0 \in P$ โดยข้อ 3) จาก**สัจพจน์ 2** และโดยสมบัติการกระจาย จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.8) แสดงวิธีทำในทำนองเดียวกับข้อ (1.7)

(1.9) เนื่องจาก $a - b \in \mathbb{R}$ โดยข้อ 1) จาก**สัจพจน์ 2** จะได้ว่า

$$a - b \in P \text{ หรือ } a - b = 0 \text{ หรือ } -(a - b) \in P$$

จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.10) ใช้ข้อ 8) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ ในส่วนของบทกลับนั้นใช้ข้อ 7) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.11) แยกคิดเป็น 2 กรณี กรณีที่ $x > 0$ และกรณีที่ $x < 0$ โดยข้อ 3) จาก**สัจพจน์ 2** ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(1.12) เนื่องจาก $0 < x < y$ จะได้ว่า จะมี $x^{-1} > 0$ และ $y^{-1} > 0$ ใช้ข้อ 7) โดยนำ $x^{-1}y^{-1}$ คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ $x < y$ ทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

1.2) (3) เนื่องจาก $c > 0$ และ $m = \inf A$ จะได้ว่า cm เป็นขอบเขตล่างของ cA

ต่อไปจะแสดงว่า $cm = \inf(cA)$

กำหนดให้ l เป็นขอบเขตล่างของเซต cA ทำให้ได้ว่า $\frac{l}{c}$ เป็นขอบเขตล่างของเซต A และ
เนื่องจาก $m = \inf A$ ทำให้ได้ว่า $cm = \inf(cA)$ จึงได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

(4) แสดงวิธีทำเช่นเดียวกับข้อ (3) เนื่องจาก $c < 0$ และ $m = \inf A$ จะได้ว่า cm เป็นขอบเขตบนของเซต cA

ต่อไปจะแสดงว่า $cm = \sup(cA)$

ให้ u เป็นขอบเขตบนของเซต cA ทำให้ได้ว่า $\frac{u}{c}$ เป็นขอบเขตบนของเซต A และจาก $M = \sup A$ จะได้ว่า $cM \leq u$ จึงได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

1.3) เนื่องจาก $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ จะได้ว่า จะมี $x^{-1}, y^{-1} \in \mathbb{R}$ จึงได้ว่า

$$1 = (xy)(xy)^{-1}$$

นำ $y^{-1}x^{-1}$ คูณเข้าทั้งสองข้างของสมการ แล้วจะได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

1.4) การพิสูจน์ข้อนี้ใช้ทฤษฎีบท 1.1.3 ข้อ (5) โดยแทน $x = 1 = y$ จะได้รับผลลัพธ์ที่ต้องการ

1.5) ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $xy = 0$ จะแสดงว่า $x = 0$ หรือ $y = 0$ นั่นคือ สมมติให้ $x \neq 0$ ต้องแสดงให้ได้ว่า $y = 0$ จาก $x \neq 0$ จะได้ว่า จะมี $x^{-1} \in \mathbb{R}$ จากนั้นนำ x^{-1} คูณตลอดสมการ $xy = 0$ จะทำให้ได้ว่า $y = 0$

($\Leftarrow$) สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงโดยการแทนค่าของ x และ y ที่กำหนดให้

1.6) เนื่องจาก $0 \leq x \leq \epsilon$ จะแสดงว่า $x = 0$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $x \neq 0$ จึงได้ว่า $0 < x \leq \epsilon$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จึงเกิดข้อขัดแย้ง เพราะ ถ้า $0 < x$ เราจะสามารถหาจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 และ x ได้เสมอจากทฤษฎีบทความหนาแน่นของจำนวนจริง ดังนั้น $x = 0$

1.7) พิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 1.3.3 กำหนดให้ $\inf A = a$ และ $\inf B = b$ จะได้ว่า

$$x \geq a \text{ และ } y \geq b$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ และทุกๆ $y \in B$ จึงทำให้ได้ว่า

$$x + y \geq a + b$$

สำหรับทุกๆ $x \in A$ และทุกๆ $y \in B$ และเนื่องจาก $C = \{x + y | x \in A \text{ และ } y \in B\}$ จะได้ว่า

$$c \geq a + b$$

สำหรับทุกๆ $c \in C$ ดังนั้น C เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง ต่อไปจะแสดงว่า $\inf C = \inf A + \inf B$ จะแยกพิจารณา 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 $\inf C \geq \inf A + \inf B$ และกรณีที่ 2 $\inf C \leq \inf A + \inf B$

กรณีที่ 1 ให้ $\epsilon > 0$ จะเห็นว่า $\frac{\epsilon}{2} > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมี $x, y \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$x < a + \frac{\epsilon}{2} \text{ และ } y < b + \frac{\epsilon}{2}$$

ดังนั้น

$$\inf C \leq x + y < (a + \frac{\epsilon}{2}) + (b + \frac{\epsilon}{2}) = (a + b) + \epsilon$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 1.1.5 เราจะได้ว่า $\inf C \leq a + b$ นั่นคือ $\inf C \leq \inf A + \inf B$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $\epsilon > 0$ และ $\inf C = c$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมี $z \in C$ ซึ่งทำให้

$$z < c + \epsilon$$

เนื่องจาก $z \in C$ จะได้ว่า จะมี $x \in A$ และ $y \in B$ ซึ่งทำให้ $z = x + y$ ดังนั้น

$$a + b \leq x + y = z < c + \epsilon$$

ทำให้ได้ว่า

$$a + b < c + \epsilon = \inf C + \epsilon$$

โดยทฤษฎีบท 1.1.5 จะได้ว่า

$$\inf A + \inf B = a + b \leq \inf C$$

จากทั้งสองกรณี จึงทำให้ได้รับข้อสรุปว่า

$$\inf C = \inf A + \inf B$$

บทที่ 2

2.1) เนื่องจาก $m' = \inf S$ โดยทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $y \in S$ ที่ทำให้

$$m' \leq y < m' + \epsilon$$

ดังนั้น $y \in N(m', \epsilon)$ ทำให้ได้ว่า

$$N(m', \epsilon) \cap S \neq \emptyset$$

ทำนองเดียวกับบทตั้ง 2.3.1 จึงได้รับผลลัพธ์ที่เราต้องการ

2.2) จาก (m4) จากบทนิยามของปริภูมิอิงระยะทาง จะได้ว่า

$$d(z, y) \leq d(x, z) + d(x, y)$$

และ

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

โดยทฤษฎีบท 1.2.2 ข้อ (1) จะทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ต้องการ

2.3) จะต้องแสดงว่า d สอดคล้อง (m1) - (m4)

(m1) จากการนิยามของ d จะเห็นว่า (m1) เป็นจริง

(m2) ถ้า $d(x, y) = 0$ จากการนิยามของ d จะได้ว่า $x = y$ แล้วบทกลับเป็นจริง

(m3) แยกพิจารณา 2 กรณี คือ $x = y$ และ $x \neq y$ จะได้ว่า

ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x, y) = 0$ และ $d(y, x) = 0$ ด้วย จะได้ว่า $d(x, y) = d(y, x)$

ถ้า $x \neq y$ แล้ว $d(x, y) = 1$ และ $d(y, x) = 1$ ด้วย จะได้ว่า $d(x, y) = d(y, x)$ ด้วย

(m4) ต้องแยกพิจารณาดังกรณีต่อไปนี้

1. ถ้า $x = y$ และ $y = z$

2. ถ้า $x = y$ และ $y \neq z$

3. ถ้า $x \neq y$ และ $y = z$

4. ถ้า $x \neq y$ และ $y \neq z$

จะเห็นว่าทุกกรณีสอดคล้อง (m4)

2.4) 1. กำหนดให้ G_i สำหรับทุก $i \in J$ เป็นเซตปิดบนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ ทำให้ได้ว่า $\mathbb{R} \setminus G_i$ สำหรับทุก $i \in J$ เป็นเซตเปิด โดยทฤษฎีบท 2.1.2 จะได้ว่า $\bigcup_{i \in J} (\mathbb{R} \setminus G_i)$ เป็นเซตเปิด ใช้การวางนัยทั่วไปของเดอมอร์แกนเราจะได้ว่า $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in J} G_i$ เป็นเซตเปิด ดังนั้น $\bigcap_{i \in J} G_i$ เป็นเซตปิด

2. แสดงทำนองเดียวกับข้อ 1.

ข้อเสนอแนะ การวางนัยทั่วไปของเดอมอร์แกน (*generalized de Morgan's law*) คือ ถ้า I เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง แล้ว $(\bigcup_{i \in I} A_i)^C = \bigcap_{i \in I} A_i^C$ และ $(\bigcap_{i \in I} A_i)^C = \bigcup_{i \in I} A_i^C$

2.5) ให้ $\epsilon > 0$ และ $\lambda \notin S$ และ $\lambda = \sup S$ หมายความว่า $s < \lambda$ สำหรับทุกๆ $s \in S$ ดังนั้น $\lambda - s > 0$ และจาก $\lambda = \sup S$ จะได้ว่า จะมีบาง $s^* > \lambda - \epsilon$ จึงทำให้ได้ว่า

$$0 < |s - \lambda| < \epsilon$$

จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

2.6) เนื่องจาก λ เป็นขอบเขตบนของ S จะได้ว่า

$$s \leq \lambda$$

สำหรับทุกๆ $s \in S$ และจาก λ เป็นจุดสะสมของ S จะได้ว่า จะมี $s^* \in S$ ซึ่งทำให้

$$0 < |s^* - \lambda| < \epsilon$$

นั่นคือจะมี $s^* \in S$ ซึ่งทำให้ $s \leq \lambda + \epsilon$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะเห็นว่า λ และ $\lambda + \epsilon$ เป็นขอบเขตบนของเซต S แต่ $\lambda < \lambda + \epsilon$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

บทที่ 3

3.1) กำหนดให้ $\epsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คิมิดีส ข้อ 4) จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$0 < \frac{1}{N} < \epsilon$$

และจาก $k \in I^+$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$$

และสำหรับทุกๆ $n > N$ จะได้ว่า $\frac{1}{N} > \frac{1}{n}$ ดังนั้น

$$\left| \frac{1}{n^k} - 0 \right| = \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

3.2) สำหรับทุกๆ $n, k \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$0 < \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n}$$

พิจารณาทำนองเดียวกับตัวอย่าง 3.1.6 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

3.3) ใช้ทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 7}{2n^3 - 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 7}{2n^3 - 5} \cdot \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} - \frac{7}{n^3}}{2 - \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^3}} \\ &= \frac{0 - 0}{2 - 0} \\ &= \frac{0}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

3.4) สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$\frac{(-1)^n}{n^2} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

จากตัวอย่าง 3.1.10 จะเห็นว่า $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และจากแบบฝึกหัดท้ายบท

ข้อ 1. จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ โดยทฤษฎีบท 3.1.7 ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0$$

3.5) สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n+1}{n+2} - 3 \right| &= \left| \frac{(3n+1) - 3(n+2)}{n+2} \right| \\ &= \left| \frac{1-6}{n+2} \right| \\ &= 5 \left| \frac{1}{n+2} \right| \\ &< 5 \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

โดยตัวอย่าง 3.1.3 เราทราบว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 3.1.8 ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$$

3.6) กำหนดให้ $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \div \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.1.10 สรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

3.7) สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เนื่องจาก

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n!}$$

โดยทฤษฎีบท 3.1.5 จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$$

โดยดำเนินการพิจารณา $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ตามตัวอย่าง 3.1.15 จะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ และจากนั้น

พิจารณา $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \div \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} \\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \\ &= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \end{aligned}$$

จึงได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1$$

ใช้ทฤษฎีบท 3.1.10 สรุปได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n!} = 0$$

3.8) เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$\frac{1}{x_n} = \left| \frac{1}{x_n} - 0 \right| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงจะเห็นได้ว่า ถ้า $M = \frac{1}{\epsilon} \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $M < x_n$ สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

3.9) กำหนดให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ เนื่องจากสำหรับทุกๆ $M \in \mathbb{R}$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $n > N$ แล้ว $y_n < M$ และจากสมมติฐาน $x_n \leq y_n$ จะทำให้ได้ว่า $x_n < M$ จึงได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

3.10) พิจารณา $|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n y_n - x_n y_m + x_n y_m - x_m y_m|$ และใช้ทฤษฎีบท 3.2.3

3.11) ใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ กำหนดให้ $P(n)$ คือ $(1+r)^n \geq 1+nr$

(1) จะเห็นได้ชัดว่า $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $(1+r)^k \geq 1+kr$ เมื่อ $r > 0$ จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือ จะเห็นได้ชัดว่า $(1+r)^{k+1} \geq 1+(k+1)r$

ดังนั้น $P(n)$ เป็นจริงทุกๆ n ที่เป็นจำนวนนับ

3.12) กำหนดให้ $\{x_n\}$ ลำดับโคชีของจำนวนจริง จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และจากทฤษฎีบท 3.3.5 จะได้ว่า จะมีลำดับย่อยที่ลู่เข้า จึงขอสมมติให้ $\{x_{n_k}\}$ เป็นลำดับย่อยที่ลู่เข้าไปที่บาง $x \in \mathbb{R}$ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชี จะได้ว่า จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $m, n > N_1$

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

และจาก $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ จะได้ว่า จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ ทุกๆ $n_k > N_2$

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$ จะได้ว่า สำหรับ $n, n_0 > N$

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0} - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้า

3.13) สมมติให้ $|x| < 1$ จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \neq 0$ จะได้ว่า ไม่มี $\epsilon > 0$ ซึ่งทำให้ จะมี $N \in \mathbb{N}$

$$|x^n - 0| < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ แต่เนื่องจาก $|x| < 1$ จะเห็นว่า

$$|x^n - 0| = |x^n| = |x|^n < 1$$

สำหรับทุก n จึงเกิดข้อขัดแย้ง ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

3.14) กำหนดให้ $b_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$ จะเห็นว่า เมื่อ $n \rightarrow \infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} (n^{\frac{1}{n}})^n &= (b_n + 1)^n \\ &= (b_n)^n + c_1(b_n)^{n-1} + \dots + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $(n^{\frac{1}{n}})^n - 1 = (b_n)^n + c_1(b_n)^{n-1} + \dots + c_{n-1}b_n$ จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^{\frac{1}{n}})^n - 1) = 0$ นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}})^n = 1$ ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

3.15) กำหนดให้ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียวและมีขอบเขตล่าง และให้

$$B = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$$

เนื่องจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง ดังนั้น B เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง โดยทฤษฎีบท 1.3.1 จะได้ว่า จะมี $l \in \mathbb{R}$ ซึ่งทำให้ $l = \inf B$ ให้ $\epsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.2 จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x_N \in B$ และ

$$l < x_N \leq l + \epsilon$$

เนื่องจาก $l = \inf B$ จะได้ว่า $x_n \geq l$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ และจาก $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับลดทางเดียว จะได้ว่า ถ้า $n > N$ แล้ว

$$l - \epsilon < l < x_n \leq x_N < l + \epsilon$$

จึงได้ว่า

$$|x_n - l| < \epsilon$$

สำหรับทุก $n > N$ โดยบทนิยาม 3.1.2 ทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l = \inf\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$

บทที่ 4

4.1) 4. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + R$

สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ จะได้ว่า จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

และจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ จะได้ว่า จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว

$$|g(x) - R| < \frac{\epsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะเห็นว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$|(f(x) + g(x)) - (L + R)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - R| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

6. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{R}$ เมื่อ $R \neq 0$

สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ และจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ จะได้ว่า จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_1$ แล้ว

$$|g(x) - R| < \frac{|R|}{2}$$

เนื่องจาก

$$|R| - |g(x)| \leq |R - g(x)| = |g(x) - R| < \frac{|R|}{2}$$

ดังนั้น $|g(x)| > \frac{|R|}{2}$ และจาก $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = R$ จะได้ว่า จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta_2$ แล้ว

$$|g(x) - R| < \frac{\epsilon |R|^2}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะเห็นว่า ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{R} \right| &= \left| \frac{g(x) - R}{g(x)R} \right| \\ &= \frac{|g(x) - R|}{|g(x)||R|} \\ &< \frac{2|g(x) - R|}{|R||R|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

7. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$ สมมติให้ $h(x) = f(x) - L$ จะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 3.1.5 ข้อ 9. จึงได้ว่า

$$(f(x))^k - L^k = (h(x))^k + c_1^k(h(x))^{k-1}L + c_2^k(h(x))^{k-2}L^2 + \dots + c_{k-1}^k h(x)L^{k-1}$$

แต่เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow a} ((f(x))^k - L^k) = 0$$

จบการพิสูจน์

4.2) 1. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = L - R$

เนื่องจาก $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)(g(x))$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-1)(g(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} (-1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= L + (-1)R \\ &= L - R \end{aligned}$$

2. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= L \cdot \frac{1}{R} \\ &= \frac{L}{R} \end{aligned}$$

4.3) สำหรับทุกๆ ลำดับ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ เนื่องจากสมมติฐาน ถ้า $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L$ นั่นคือ ให้ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า ทุกๆ จำนวนจริง $M \in \mathbb{R}$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$x_n > M$$

แล้ว

$$|f(x_n) - L| < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้นจะเห็นว่า ถ้าเลือก $M > 0$ ซึ่ง $x > M$ จะได้ว่า $|f(x) - L| < \epsilon$ จึงได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

4.4) ($\Leftarrow$) จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ให้ $M > 0$ และจากสมมติฐาน ถ้า $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ จึงได้ว่า สำหรับ $K > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $x_n > K$ แล้ว $f(x_n) > M$ สำหรับทุกๆ $n > N$ ดังนั้น ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) > M$

($\Rightarrow$) จะแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $M > 0$ จะมี $K > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) > M$ และเนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$x_n > K$$

สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงทำให้ได้ว่า $f(x_n) > M$ สำหรับทุกๆ $n > N$ จึงได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

- 4.5) ($\Rightarrow$) สมมติให้ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = -\infty$ จาก $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $M > 0$ จะมี $K > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $x > K$ แล้ว $f(x) < -M$ เลือก $\delta = \frac{1}{K}$ จะได้ว่า ถ้า $0 < t < \frac{1}{K}$ แล้ว $\frac{1}{t} > K$ จึงได้ว่า $f(\frac{1}{t}) < -M$
 ($\Leftarrow$) สมมติให้ $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = -\infty$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ให้ $M > 0$ และเนื่องจาก $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(\frac{1}{t}) = -\infty$ จะได้ว่าจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < t < \delta$ แล้ว $f(\frac{1}{t}) < -M$ เลือก $K = \frac{1}{\delta}$ จะเห็นว่า ถ้า $x > \frac{1}{\delta}$ แล้วจะเห็นว่า $0 < \frac{1}{x} < \delta$ ดังนั้น $f(x) < -M$ จึงได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

- 4.6) 1. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$
 ให้ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - 2| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |(3x - 1) - 5| &= |3x - 6| \\ &= 3|x - 2| \\ &< 3\delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

2. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 3$
 ให้ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta = \epsilon$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - 2| < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} - 3 \right| &= \left| \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} - 3 \right| \\ &= |x - 2| \\ &< \delta \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

- 4.7) สมมติให้ $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ แล้ว $||f(x)| - 0| < \epsilon$ แต่เนื่องจาก

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)|| = ||f(x)| - 0| < \epsilon$$

ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

- 4.8) กำหนดให้ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = M$

1. จะแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x) + g(x)] = L + M$
 เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า

$a < x < a + \delta_1$ แล้ว $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ และในทำนองเดียวกัน จาก $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = M$ จะได้ว่า จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $a < x < a + \delta_2$ แล้ว $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ ดังนั้น เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ซึ่ง ถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

2. ใช้บทนิยามเดียวกับข้อ 1. และแสดงบทพิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 4.1.3 ข้อ 5.
3. ใช้บทนิยามเดียวกับข้อ 1. และแสดงบทพิสูจน์ทำนองเดียวกับบทตั้ง 4.1.1

บทที่ 5

5.1) จะพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง สมมติให้ $f + g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 นั่นคือ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = (f + g)(x_0)$$

ซึ่งจากสมมติฐาน g ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x_0 นั่นคือ g ต้องสอดคล้องข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $g(x_0)$ หาค่าไม่ได้
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq g(x_0)$

จะเห็นว่า ถ้า g สอดคล้องข้อ 1. แล้ว $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า g สอดคล้องข้อ 2. แล้ว $(f + g)(x_0)$ หาค่าไม่ได้ และถ้า g สอดคล้องข้อ 3. แล้ว $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) \neq (f + g)(x_0)$ จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้งจึงได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ

5.2) ($\Rightarrow$) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางขวาที่จุด x_0 โดยบทนิยาม 5.1.3 จะทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $x_0 < x < x_0 + \delta$ แล้ว

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

และเนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ จะได้ว่า จะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $|x_n - x_0| < \delta$ และจากสมมติฐาน $x_0 < x_n$ จึงทำให้ได้ว่า $x_0 < x_n < x_0 + \delta$ ดังนั้น

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$$

โดยบทนิยาม 4.1.1 จึงทำให้ได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$

($\Leftarrow$) เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\delta > 0$ จะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้ $|x_n -$

$|x_0| < \delta$ สำหรับทุกๆ $n > N_2$ และ $x_0 < x_n$ นั่นคือ

$$x_0 < x_n < x_0 + \delta$$

แล้วจะได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ นั่นคือ สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ซึ่งทำให้

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon, \forall n > N_1$$

จึงทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $x_0 < x < x_0 + \delta$ แล้ว

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

5.3) พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 5.2)

5.4) จะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด 0 ให้ $\epsilon > 0$ จากสมมติฐานให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด 0 จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $0 < |x - 0| < \delta$ แล้ว $|g(x) - g(0)| < \epsilon$ จากกำหนดให้ $g(0) = 0$ จึงจะได้ว่า $|g(x)| < \epsilon$ จึงทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq |f(x)| + |f(0)| \\ &\leq |g(x)| + |g(0)| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

5.5) 1) $f(4) = -5 = m$ และ $f(1) = 4 = M$

2) $f(1) = 0 = m$ และ $f(-2) = 3 = M$

3) $M = 1$ และ $m = 0$ แต่ไม่สามารถหา $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ ที่ทำให้ได้ค่า m และ M ได้

4) $m = -3$ และ $M = 1$ แต่ไม่สามารถหา $x_1, x_2 \in (-2, 1)$ ที่ทำให้ได้ค่า m และ M ได้

5.6) เนื่องจาก $(f - g)(a) = f(a) - g(a) \leq 0$ และ $(f - g)(b) \geq 0$ โดยทฤษฎีบท 5.1.6 จะได้ว่า จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่งทำให้ $(f - g)(c) = 0$ ดังนั้น $f(c) = g(c)$ จบการพิสูจน์

5.7) เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน I ให้ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า จะมีจำนวนจริง $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ $x, y \in I$ ถ้า $0 < |x - y| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

และจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูปบน I จะมีจำนวนจริง $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้ สำหรับทุกๆ $x, y \in I$ ถ้า $0 < |x - y| < \delta_2$ แล้ว

$$|g(x) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ จะเห็นว่าสำหรับทุกๆ $x, y \in I$ ถ้า $0 < |x - y| < \delta$ แล้ว

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

5.8) พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ 5.7) โดยพิจารณาว่า

$$|kf(x) - kf(y)| = |k||f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\text{เมื่อ } |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{|k|}$$

บทที่ 6

6.1) พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 6.1.1 โดยมีสมมติฐานว่า f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ทางขวาได้ที่จุด a นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ หาค่าได้ แล้วดำเนินวิธีการพิสูจน์ตามแนวทางเดียวกับทฤษฎีบท 6.1.1 จึงทำให้ได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ กรณีของ f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์ทางซ้ายได้ที่จุด a ก็แสดงเช่นเดียวกัน

6.2) กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

1. ให้ $k \in \mathbb{R}$ และจาก f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c พิจารณา

$$\begin{aligned} (kf)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(kf)(x) - (kf)(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{k(f(x)) - k(f(c))}{x - c} \\ &= k \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= kf'(c) \end{aligned}$$

2. เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} (f+g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] + \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right] \\ &= f'(c) + g'(c) \end{aligned}$$

6.3) กำหนดให้ $f(x) = mx + b$ และให้ $c \in \mathbb{R}$ พิจารณา

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{[mx + b] - [mc + b]}{x - c} \\ &= m \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{x - c}{x - c} \right] \\ &= m \end{aligned}$$

6.4) กำหนดให้ $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$ พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 6.2.4
จะได้ว่า จะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่ง $h'(c) = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$0 = h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)]$$

ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

6.5) พิสูจน์ทำนองเดียวกับ 6.2.7 โดยจากกำหนดให้ $f'(x) \leq 0$ และจาก $x_2 - x_1 > 0$ ดังนั้น
 $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

6.6) เนื่องจาก f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ทุกๆ จุดบน I และ f' มีขอบเขตบนช่วง I ดังนั้น จะมีจำนวนจริง
 $M > 0$ ที่ทำให้

$$|f'(c)| = \left| \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = \lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| \leq M$$

ซึ่งเป็นจริงทุกๆ $c \in I$ จึงทำให้ได้ว่า สำหรับทุกๆ $x_1, x_2 \in I$ จะได้ว่า

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq M$$

จึงได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ

6.7) พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 6.3.3 โดยให้ $x = a - \frac{1}{u}$ หรือ $u = \frac{1}{a-x}$ และแสดงการพิสูจน์ตาม
ทฤษฎีบท 6.3.3 จะได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ

6.8) จะพิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 6.3.2 เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$ จะ
ได้ว่า จะมีจำนวนจริง $N_2 > N_1$ ที่ทำให้ $f(x) < 0$ และ $g(x) < 0$ สำหรับทุกๆ $x > N_2$
จึงทำให้ได้ว่า $f(x) > f(N_2)$ และ $g(x) > g(N_2)$ ทำให้ได้รับว่า $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 1$ ด้วย
พิจารณาเช่นเดียวกับทฤษฎีบท 6.3.2 จึงได้รับผลลัพธ์ตามต้องการ

บทที่ 7

7.1) จะแสดงว่า $U(Q, f) \leq U(P, f)$

กำหนดให้ $s_1 = \sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x^*]\}$ และ $s_2 = \sup\{f(x)|[x^*, x_k]\}$ และ P กับ P^* เหมือนในทฤษฎีบท 7.1.1 จะเห็นว่า $s_1 \leq M_k$ และ $s_2 \leq M_k$ เมื่อ $M_k = \sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ ดังนั้น

$$U(P, f) - U(P^*, f) = M_k(x_k - x_{k-1}) - (s_1(x^* - x_{k-1}) + s_2(x_k - x^*)) \geq 0$$

จึงได้ว่า $U(P, f) \geq U(P^*, f)$ นั่นคือ $U(P, f) \geq U(Q, f)$

7.2) เนื่องจาก $P \cup Q$ เป็นผลแบ่งกันละเอียดขึ้นของทั้ง P และ Q ใช้ทฤษฎีบท 7.1.1 ทำให้ได้ว่า

$$L(P, f) \leq L(P \cup Q, f) \leq U(P \cup Q, f) \leq U(P, f)$$

และ

$$L(Q, f) \leq L(P \cup Q, f) \leq U(P \cup Q, f) \leq U(Q, f)$$

จึงทำให้ได้ว่า $L(Q, f) \leq L(P \cup Q, f) \leq U(P \cup Q, f) \leq U(P, f)$ ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

7.3) กำหนดให้ $f(x) = c$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ ถ้า $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกันบนช่วง $[a, b]$ ซึ่งจะเห็นว่า $M_i(f) = c = m_i(f)$ ดังนั้น

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a) = U(f)$$

และ

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n \Delta x_i = c(b-a) = L(f)$$

ทำให้ได้ว่า $U(f) = L(f) = c(b-a)$ จึงได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

7.4) กำหนดให้ $k < 0$ โดยทฤษฎีบท 1.3.4 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} M_i(kf) &= \sup\{kf|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= k \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= km_i(f) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} m_i(kf) &= \inf\{kf(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= k \sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ &= kM_i(f) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$U(P, kf) = \sum_{i=1}^n M_i(kf) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n k m_i(f) \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i = kL(P, f)$$

และ

$$L(P, kf) = \sum_{i=1}^n m_i(kf) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n k M_i(f) \Delta x_i = k \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i = kU(P, f)$$

เนื่องจาก f หาปริพันธ์ได้ จึงทำให้ได้ว่า

$$U(kf) = kL(f) = kU(f) = L(kf)$$

- 7.5) เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a, b]$ จะได้ว่า $U(f) = L(f)$ และ $U(g) = L(g)$ แต่เนื่องจาก $f(x) \leq g(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$ จึงทำให้ได้ว่า $M_i(f) \leq M_i(g)$ และ $m_i(f) \leq m_i(g)$ ดังนั้น $U(f) \leq U(g)$ และ $L(f) \leq L(g)$ ทำให้ได้รับว่า

$$\int_a^b f = U(f) \leq U(g) = \int_a^b g$$

- 7.6) จากกำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2U(P, f)}$$

พิจารณา $\sup\{f^2(x) | x \in [a, b]\} = (\sup\{f(x) | x \in [a, b]\})^2$ ทำให้ได้ว่า $M_i(f^2) = (M_i(f))^2$ จึงทำให้ได้รับ $U(P, f^2) = (U(P, f))^2$ และในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $L(P, f^2) = (L(P, f))^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} U(P, f^2) - L(P, f^2) &= (U(P, f))^2 - (L(P, f))^2 \\ &= (U(P, f) - L(P, f))(U(P, f) + L(P, f)) \\ &< \frac{\epsilon}{2U(P, f)} (2U(P, f)) \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

- 7.7) เนื่องจาก $(f + g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$ จึงทำให้ได้ว่า

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}$$

ใช้ทฤษฎีบท 7.2.3 และแบบฝึกหัดท้ายบท ข้อ 6 จึงทำให้ได้ว่า $\frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2}$ หาปริพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

7.8) กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด $[a, b]$ จะได้ว่า $U(f) = L(f)$ และเนื่องจาก $m \leq f(x) \leq M$ จะได้ว่า $M_i(f) = M$ และ $m_i(f) = m$ ดังนั้น

$$L(f) \geq L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \Delta x_i = m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a)$$

และ

$$U(f) \leq U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i(f) \Delta x_i = M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a)$$

จึงทำให้ได้ว่า

$$m(b-a) \leq L(f) = \int_a^b f = U(f) \leq M(b-a)$$

บทที่ 8

8.1) พิจารณา

$$\begin{aligned} s + t &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} ks &= k \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \end{aligned}$$

- 8.2)
1. ลู่ออก โดยใช้การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ
 2. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
 3. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
 4. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยราก
 5. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
 6. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
 7. ลู่ออก โดยใช้หลักการของอนุกรมพี
 8. ลู่ออกแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน

- 8.3)
1. ลู่ออก โดยใช้หลักการพิจารณาของอนุกรมสลับ
 2. ลู่ออก โดยใช้หลักการพิจารณาของอนุกรมสลับ

3. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
4. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ โดยใช้หลักการพิจารณาของอนุกรมสลับ
5. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
6. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ โดยใช้การทดสอบโดยอัตราส่วน
7. ลู่เข้า โดยใช้หลักการพิจารณาของอนุกรมสลับ

8.4) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า จะได้ว่า สำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะมี $k_0 \geq n_0$ ซึ่งทำให้

$$\sum_{n=m+1}^k a_n < \epsilon$$

สำหรับทุกๆ $k > m \geq k_0$ จะเห็นว่า $\frac{a_n}{a_{n-1}} < an$ ทำให้ได้ว่า $\sum_{n=m}^k \frac{a_n}{a_{n-1}} < \epsilon$ โดยเกณฑ์โคชี
สำหรับอนุกรม จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

8.5) จากกำหนดให้ $|a_{n+1} - a_n| \leq b_n$ จะได้ว่า

$$a_{n-1} - a_n \leq b_n$$

และ เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} - a_n)$ ลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
ลู่เข้า จึงทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

8.6) เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ทำให้ได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก
พิจารณา $a_n > 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน
พิจารณา $a_n < 0$ สำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน
พิจารณา $a_i > 0$ สำหรับบาง $i \in \mathbb{N}$ จะเห็นว่า

$$\sum_{\exists i; a_i > 0}^{\infty} a_i = \sum_{\exists i; a_i > 0}^{\infty} |a_i|$$

เนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่ออก ทำให้ได้ผลลัพธ์ตามต้องการ

ดัชนี

- absolute extrem, 143
- absolute maximum, 142
- absolute minimum, 143
- absolute value, 9
- absolutely convergent series, 197
- accumulation point, 29
- alternating series, 204
- Archimedean property, 20
- Bolzano-Weierstrass Theorem, 35
- Bolzano-Weierstrass theorem for sequences, 78
- boundary, 29
- boundary point, 29
- bounded above, 15
- bounded below, 15
- bounded function, 88
- bounded sequence, 52
- bounded set, 15
- Cauchy criterion for series, 194
- Cauchy mean-value theorem, 149
- Cauchy sequence, 68
- center of neighborhood, 26
- chain rule, 140
- closed ball, 42
- closed set, 26
- closed set on metric space, 42
- closure, 30
- cluster point, 29
- compact set, 32
- comparison test, 195
- completeness axiom, 15
- composite function, 115
- conditionally convergent series, 197
- continuous function, 111
- continuous function on closed interval, 117
- convergent sequence, 48
- critical point, 145
- critical value, 145
- deleted neighborhood, 26
- density of real numbers, 22
- derivative, 134
- differentiable on interval, 136
- divergent sequence, 48
- divergent series, 189
- dynamical system, 148
- Euclidian space, 36
- exterior, 29
- exterior point, 29
- extrem point, 143
- extreme point, 118
- extreme problem, 117
- extreme value, 118
- extreme value theorem, 118
- field, 1
- field axioms, 1
- finite subcover, 32
- fixed point, 123
- fundamental theorem of calculus 1, 178

- fundamental theorem of calculus 2, 182
- geometric series, 194
- Harmonic series, 191
- Heine - Borel theorem, 34
- infimum, 15
- infinite series, 189
- initial value, 74
- initial value problem, 148
- integral, 163
- integral test, 203
- integration by parts formula, 185
- interior, 29
- interior point, 29
- intermediate value theorem, 121
- iterative sequence, 74
- jump discontinuous function, 112
- L'Hôpital's rule, 150
- left continuous function, 117
- left differentiable, 136
- left-hand limit, 99
- limit inferior, 80
- limit of function, 85
- limit point, 29
- limit superior, 80
- limit value, 48
- Lipschitz's condition, 148
- local extrem, 142
- local extrem point, 142
- local maximum, 142
- local maximum point, 142
- local minimum, 142
- local minimum point, 142
- lower bound, 15
- lower integral, 163
- lower sum, 162
- maximum point, 143
- mean value theorem for integrals, 184
- mean-value theorem, 146
- metric function, 38
- metric space, 38
- minimum point, 143
- monotone decreasing function, 128
- monotone decreasing sequence, 73
- monotone function, 128
- monotone increasing function, 128
- monotone increasing sequence, 73
- monotone sequence, 73
- negative real number, 7
- neighborhood, 26
- one to one function, 129
- open ball, 42
- open cover, 32
- open set, 26
- open set on metric space, 42
- order axioms, 7
- p-series, 203
- partial sum, 189
- partition, 161
- positive real number, 7
- radius of neighborhood, 26
- ratio test, 198
- refinement partition, 162
- removable discontinuous function, 112

- Riemann integral, 163
 right continuous function, 117
 right differentiable, 136
 right-hand limit, 99
 Rolle's theorem, 145
 root test, 200

 sandwich theorem, 95
 sequence of real number, 47
 series, 189
 sphere, 42
 strictly decreasing function, 129
 strictly decreasing sequence, 73
 strictly increasing function, 128
 strictly increasing sequence, 73
 strictly monotone function, 129
 subsequence, 76
 sum of series, 189
 supremum, 15

 Taylor's Theorem, 156
 the n th derivative, 156
 triangle inequality, 13

 uniformly continuous function, 125
 upper bound, 15
 upper integral, 163
 upper sum, 162

 well ordering principle, 22

 กฎลูกโซ่, 140
 การทดสอบโดยการเปรียบเทียบ, 195
 การทดสอบโดยปริพันธ์, 203
 การทดสอบโดยราก, 200
 การทดสอบโดยอัตราส่วน, 198
 ขอบ, 29
 ขอบเขตบน, 15
 ขอบเขตล่าง, 15
 ความหนาแน่นของจำนวนจริง, 22
 ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์, 143
 ค่าต่ำสุดเฉพาะที่, 142
 ค่าลิมิต, 48
 ค่าลิมิตของฟังก์ชัน, 85
 ค่าวิกฤต, 145
 ค่าสัมบูรณ์, 9
 ค่าสุดขีด, 118
 ค่าสุดขีดสัมบูรณ์, 143
 ค่าสุดขีดเฉพาะที่, 142
 ค่าสูงสุดสัมบูรณ์, 142
 ค่าสูงสุดเฉพาะที่, 142
 ค่าเริ่มต้น, 74
 จำนวนจริงลบ, 7
 จุดขอบ, 29
 จุดตรึง, 123
 จุดต่ำสุด, 143
 จุดต่ำสุดเฉพาะที่, 142
 จุดภายนอก, 29
 จุดภายใน, 29
 จุดลิมิต, 29
 จุดวิกฤต, 145
 จุดศูนย์กลางของย่านใกล้เคียง, 26
 จุดสะสม, 29
 จุดสุดขีด, 118, 143
 จุดสุดขีดเฉพาะที่, 142
 จุดสูงสุด, 143
 จุดสูงสุดเฉพาะที่, 142
 จุดเกาะกลุ่ม, 29
 ชุดปกติกลุ่มย่อยจำกัด, 32
 ชุดปกติกลุ่มเปิด, 32
 ซูพรีมัม, 15

- ทรงกลม, 42
- ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์, 156
- ทฤษฎีบทของโรลล์, 145
- ทฤษฎีบทค่ามัธยิม, 146
- ทฤษฎีบทค่ามัธยิมของโคชี, 149
- ทฤษฎีบทค่ามัธยิมสำหรับปริพันธ์, 184
- ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง, 121
- ทฤษฎีบทค่าสุดขีด, 118
- ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 1, 178
- ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส 2, 182
- ทฤษฎีบทโบชาโน-ไวแยร์สตราสส์, 35
- ทฤษฎีบทโบชาโน-ไวแยร์สตราสส์สำหรับ
ลำดับ, 78
- ทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล, 34
- บอลปิด, 42
- บอลเปิด, 42
- ปริพันธ์, 163
- ปริพันธ์บน, 163
- ปริพันธ์รีมันน์, 163
- ปริพันธ์ล่าง, 163
- ปริภูมิยูคลิด, 36
- ปริภูมิอิงระยะทาง, 38
- ปัญหาค่าสุดขีด, 117
- ปัญหาค่าเริ่มต้น, 148
- ผลบวกของอนุกรม, 189
- ผลบวกบน, 162
- ผลบวกย่อย, 189
- ผลบวกล่าง, 162
- ผลแบ่งกัน, 161
- ผลแบ่งกันละเอียดขึ้น, 162
- ฟังก์ชันต่อเนื่อง, 111
- ฟังก์ชันต่อเนื่องทางด้านขวา, 117
- ฟังก์ชันต่อเนื่องทางด้านซ้าย, 117
- ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด, 117
- ฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเอกรูป, 125
- ฟังก์ชันทางเดียว, 128
- ฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้, 129
- ฟังก์ชันที่มีขอบเขต, 88
- ฟังก์ชันประกอบ, 115
- ฟังก์ชันลดทางเดียว, 128
- ฟังก์ชันลดโดยแท้, 129
- ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง, 129
- ฟังก์ชันอิงระยะทาง, 38
- ฟังก์ชันเพิ่มทางเดียว, 128
- ฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้, 128
- ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบกระโดด, 112
- ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้, 112
- ภายนอก, 29
- ภายใน, 29
- ย่านใกล้เคียง, 26
- ย่านใกล้เคียงลบออก, 26
- ระบบพลวัต, 148
- รัศมีของย่านใกล้เคียง, 26
- ลำดับของจำนวนจริง, 47
- ลำดับทางเดียว, 73
- ลำดับทำซ้ำ, 74
- ลำดับที่มีขอบเขต, 52
- ลำดับย่อย, 76
- ลำดับลดทางเดียว, 73
- ลำดับลดโดยแท้, 73
- ลำดับลู่ออก, 48
- ลำดับลู่อเข้า, 48
- ลำดับเพิ่มทางเดียว, 73
- ลำดับเพิ่มโดยแท้, 73
- ลำดับโคชี, 68
- ลิมิตซูพีเรียร์, 80
- ลิมิตทางขวา, 99
- ลิมิตทางซ้าย, 99

- ลิมิตอินฟินิตี้, 80
ลู่ออกแบบมีเงื่อนไข, 197
สนาม, 1
สมบัติอาร์คมีเดีย, 20
สัจพจน์ความสมบูรณ์, 15
สัจพจน์สนาม, 1
สัจพจน์อันดับ, 7
สูตรการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน, 185
ส่วนปิดคลุมของเซต, 30
หลักการจัดอันดับอย่างดี, 22
หลักเกณฑ์ของโลปีตาล, 150
หาอนุพันธ์ได้บนช่วงปิด, 136
อนุกรม, 189
อนุกรมพี, 203
อนุกรมลู่ออก, 189
อนุกรมลู่ออกแบบสมบูรณ์, 197
อนุกรมสลับ, 204
อนุกรมอนันต์, 189
อนุกรมฮาร์มอนิก, 191
อนุกรมเรขาคณิต, 194
อนุพันธ์, 134
อนุพันธ์ทางขวา, 136
อนุพันธ์ทางซ้าย, 136
อนุพันธ์อันดับที่ n , 156
อสมการสามเหลี่ยม, 13
อินทิกรัล, 15
เกณฑ์โคชีสำหรับอนุกรม, 194
เงื่อนไขลิมิต, 148
เซตกระชับ, 32
เซตของจำนวนจริงบวก, 7
เซตที่มีขอบเขต, 15
เซตที่มีขอบเขตบน, 15
เซตที่มีขอบเขตล่าง, 15
เซตปิด, 26
เซตปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง, 42
เซตเปิด, 26
เซตเปิดบนปริภูมิอิงระยะทาง, 42

L-001116



สำนักงานวิทยพัฒน์
เลขที่รับ 6620406
วันที่ 3 เม.ย. 2566 เวลา

L. 001116

ที่ อว ๐๖๑๓.๗ / ว ๒๑๒

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม
อำเภอเมืองฯ จังหวัดพิษณุโลก ๖๕๐๐๐

๒๓ มีนาคม ๒๕๖๖

① เรื่อง ขอเผยแพร่ผลงานทางวิชาการเพื่อให้พิจารณาแต่งตั้งให้ดำรงตำแหน่งทางวิชาการ

เรียน ผู้อำนวยการสำนักหอสมุด มหาวิทยาลัยนเรศวร

- สิ่งที่ส่งมาด้วย ๑. ตำรา เรื่อง การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ จำนวน ๑ เล่ม
๒. แบบตอบรับการเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ จำนวน ๑ ฉบับ

6.1032764

ด้วยผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพร ตั้งควิเวชกุล อาจารย์ประจำหลักสูตรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม ขอเผยแพร่ตำรา เพื่อใช้ประกอบการ กำหนดตำแหน่งทางวิชาการ ระดับ รองศาสตราจารย์ จำนวน ๑ เล่ม คือ การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ นั้น

ในการนี้ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ขอความอนุเคราะห์จากท่านในการเผยแพร่และ ประชาสัมพันธ์ ให้นักศึกษา คณาจารย์ และบุคลากรทั่วไป เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการเรียน การสอน และใช้ประกอบการ ศึกษาค้นคว้าของนักศึกษา คณาจารย์ และบุคลากรทั่วไป

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณา ให้ความอนุเคราะห์ และขอบคุณ มา ณ โอกาสนี้

②

เรียน ผู้อำนวยการสำนักหอสมุด

ขอแสดงความนับถือ

ขอไปตรวจฉบับจริง

ขอทราบผลพิจารณา วันที่ ๑๑ มีนาคม
นางอรรณพพร รอดคุณ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เอกภพ จันท์สุคนธ์)
รองคณบดี รักษาการแทน
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

จิตร วัฒนา

- 3 เม.ย. 2566

③ - ทบทวน (เก็บ E-book)
- ดำเนินการตามขั้นตอนการเผยแพร่ OPA e
3 เม.ย. ๖๖

สำนักงานคณบดีฯ

โทรศัพท์มือถือผู้ประสานงาน ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จิตติพร ตั้งควิเวชกุล ๐๘๔-๐๕๐๔๑๒๙

18 เม.ย. 2566