สัญญาเลขที่ R2560C186

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการกึ่งกรุปของการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์

คณะผู้วิจัย สังกัดภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ชัยวัฒน์ นามนาค

2. นายนเรศ สวัสดิ์รักษา

3. นายปุญญพัฒน์ คำหมู่

สนับสนุนโดยกองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยนเรศวร

สารบัญ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่องกึ่งกรุปของการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์ นี้ สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี โดยได้รับการสนับสนุนทุนอุดหนุนการวิจัย งบประมาณรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยนเรศวร งบประมาณรายได้ประจำปีงบประมาณ พ. ศ. 2560 โดยมีระยะดำเนินโครงการตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2560 ถึงวันที่ 31 ธันวาคม 2560

คุณค่าและประโยชน์อันพึงได้รับจากงานวิจัยครั้งนี้ ผู้จัดทำขอมอบอุทิศแต่บิดา มารดาที่ให้กำลังใจ และครูอาจารย์ทุกท่าน และประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้มาโดยตลอด

ชัยวัฒน์ นามนาค

กรกฎาคม 2561

บทคัดย่อ

ให้ $T(X)$ แทนกึ่งกรุปการแปลงบนเซต X และ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X เราพิจารณากึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งนิยามโดย

$$T_{SE}(X) = \{ \alpha \in T(X) |\ (x, x\alpha) \in E \text{ สำหรับทุก } x \in X\}$$

และเรียกว่า*กึ่งกรุปของการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัวบน* X จุดประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้ เราจะศึกษาความสัมพันธ์ของ $T_{SE}(X)$ กับบางกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ และหาเงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงของแต่ละสมาชิกใน $T_{SE}(X)$ ที่เป็นสมาชิกปรกติ สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา สมาชิกปรกติสมบูรณ์ นอกจากนี้ เราได้ศึกษาความสัมพันธ์ของกรีนบน $T_{SE}(X)$ และยังให้ลักษณะของสองสมาชิกใดๆ ของ $T_{SE}(X)$ ที่สามารถเปรียบเทียบกันได้ภายใต้อันดับบางส่วนธรรมชาติ

Abstract

Let $T(X)$ denote the full transformation semigroup on a set X and E an arbitrary equivalence on X. We consider a subsemigroup of $T(X)$ define by

$$T_{SE}(X) = \{ \alpha \in T(X) |\ (x, x\alpha) \in E \text{ for each } x \in X\}$$

and call it the *self-E-preserving transformation semigroup on* X. The purpose of this research, we study relationships between $T_{SE}(X)$ and some subsemigroups of $T(X)$ and find the necessary and sufficient conditions for regularity, left regularity, right regularity and complete regularity of elements in $T_{SE}(X)$. Also we study Green's relations on $T_{SE}(X)$ and characterize when two elements of $T_{SE}(X)$ are related under the natural partial order.

บทที่ 1

บทนำ

รายงานการวิจัยเรื่องกึ่งกรุปของการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์ได้รับทุนวิจัยจากทุนอุดหนุนการวิจัยงบประมาณรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยนเรศวร ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560 โดยมีรายละเอียดดังนี้

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) กึ่งกรุปของการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์

(ภาษาอังกฤษ) Semigroups of Transformations that Preserve Relations

ชื่อหัวหน้าโครงการวิจัย นายชัยวัฒน์ นามนาค

ตำแหน่ง รองศาสตราจารย์

ที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก

โทรศัพท์ 055 261000-4 ต่อ 3213 โทรสาร 055 963201

อีเมลล์ chaiwatn@nu.ac.th

ระยะเวลาโครงการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2560 ถึงวันที่ 31 ธันวาคม 2560

งบประมาณ 220,000.00 บาท (สองแสนสองหมื่นบาทถ้วน)

2. **ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย**

ในการศึกษาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ด้านพีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra) สาขาหนึ่งที่สำคัญและน่าสนใจ คือสาขาทฤษฎีกึ่งกรุปเชิงพีชคณิต (Algebraic Semigroup Theory) ซึ่งมีการศึกษามาอย่างต่อเนื่อง การศึกษาหัวข้อหนึ่งในสาขานี้คือ กึ่งกรุปของการแปลง (Semigroups of Transformations) บนเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ด้วยเหตุผลที่ว่า ทุกกึ่งกรุปจะไอโซมอร์ฟิก (isomorphic) กับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปของการแปลง ดังนั้น คณะผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาสมบัติต่างๆ ของกึ่งกรุปย่อยของการแปลงบางชนิด ซึ่งคณะผู้วิจัยได้ศึกษาจากงานวิจัยหลายเรื่องที่มีความเกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงชนิดต่างๆ

เช่น กึ่งกรุปย่อยของการแปลงรักษาอันดับ (semigroup of transformations preserve order) กึ่งกรุปย่อยของการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูล (semigroup of transformations preserving equivalence) กึ่งกรุปย่อยของการแปลงที่รักษาอันดับและความสมมูลสองทาง (semigroup of transformations that preserve order and a double direction equivalence) กึ่งกรุปการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัว (semigroup of transformations self-E-preserving equivalence relation) กึ่งกรุปการแปลงถดถอย (regressive transformation semigroups) เป็นต้น ในการศึกษาครั้งนี้ จะนิยามกึ่งกรุปการแปลงนัยทั่วไปที่รักษาความสัมพันธ์ (Generalized transformation semigroups that preserve relation) และศึกษาความสัมพันธ์ของกึ่งกรุปแต่ละชนิดที่กล่าวมา ยังกล่าวถึงการเป็นสมาชิกปรกติ (regular element) สมาชิกปรกติซ้าย (left regular element) สมาชิกปรกติขวา (right regular element) ของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุป การหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการเป็นกึ่งกรุปปรกติ (regular semigroup) กึ่งกรุปผกผัน (inverse semigroup) ของแต่ละกึ่งกรุป และความสัมพันธ์ของกรีนบนกึ่งกรุปการแปลงนัยทั่วไปที่รักษาความสัมพันธ์ อันจะทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ และเป็นประโยชน์ในการทำวิจัยสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ต่อไป

3. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาหาความสัมพันธ์ของกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงแต่ละชนิด

2. เพื่อศึกษา และหาลักษณะเฉพาะของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุปการแปลงที่เป็นสมาชิกปรกติ สมาชิกปรกติซ้าย สมาชิกปรกติขวา

3. เพื่อศึกษา และให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการเป็นกึ่งกรุปปรกติ กึ่งกรุปผกผันของกึ่งกรุปการแปลงบางชนิด

4. เพื่อศึกษาลักษะความสัมพันธ์ของกรีนบนกึ่งกรุปการแปลงนัยทั่วไปที่รักษาความสัมพันธ์

4. ทฤษฎี สมมุติฐาน (ถ้ามี) และกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

-

5. การทบทวนวรรณกรรม/สารสนเทศ (Information) ที่เกี่ยวข้อง

ให้ S เป็นกึ่งกรุปและ $a \in S$ จะกล่าวว่า a เป็น**สมาชิกปรกติ** (regular element) ของ S ก็ต่อเมื่อ $a = aba$ สำหรับบาง $b \in S$ และจะเรียก S ว่าเป็น**กึ่งกรุปปรกติ** (regular semigroup) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ S เป็นสมาชิกปรกติ

ให้ $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปภายใต้การประกอบของการแปลงบนเซต X เป็นที่ทราบกันแล้วว่า $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปปรกติ และ $T(X)$ เป็นกึ่งกรุปผกผัน ก็ต่อเมื่อ $|X| = 1$ ในการวิจัยในสาขาทฤษฎีกึ่งกรุป ได้มีการนิยามกึ่งกรุปย่อยต่างๆ ของกึ่งกรุปการแปลงขึ้นมา และยังมีการศึกษาความปรกติของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุป และเงื่อนไขการเป็นกึ่งกรุปปรกติ อีกทั้งศึกษาความสัมพันธ์ของกรีนบนกึ่งกรุปที่ถูกนิยามขึ้น โดยมีศึกษาลักษณะดังกล่าวมาอย่างต่อเนื่อง

ต่อไปเราจะกล่าวถึงกึ่งกรุปที่เกี่ยวข้องในงานวิจัยครั้งนี้ ให้ E เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X จะเรียก $\alpha \in T(X)$ ว่า การแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูล (preserves equivalence) บน X ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $x, y \in X$ ถ้า $(x, y) \in E$ แล้ว $(x\alpha, y\alpha) \in E$ และให้ $T_E(X)$ แทนเซตของที่ประกอบไปด้วยสมาชิกทั้งหมดใน $T(X)$ ที่เป็นการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลบน X นั่นคือ

$$T_E(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

จะได้ว่า $T_E(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งเห็นได้ชัดเจนว่า ถ้า $E \in \{\Delta(X), X \times X\}$ เมื่อ $\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}$ แล้ว $T_E(X) = T(X)$ ในปี 2005, Pei ได้ศึกษาเงื่อนไขที่ของสมาชิกของ $T_E(X)$ ที่เป็นสมาชิกปรกติ ยังให้เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงของการเป็นกึ่งกรุปปรกติของ $T_E(X)$ ในเทอมของ E และยังศึกษาความสัมพันธ์ของกรีนบน $T_E(X)$ ด้วย และต่อมา Mendes-Goncalves และ Sullivan ได้นิยามกึ่งกรุปขึ้นมาดังนี้

$$T(X, E) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow x\alpha = y\alpha\}$$

จะได้ว่า $T(X, E)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T_E(X)$ และเขาได้ศึกษาศึกษาความสัมพันธ์ของกรีนบน $T(X, E)$ และหายังกึ่งกรุปย่อยปรกติใหญ่สุดของ $T(X, E)$ ด้วย

ในปี 2010 Deng ได้นิยามกึ่งกรุปย่อยของ $T(X,E)$ ดังนี้

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

โดยผู้วิจัยได้กล่าวถึงความปรกติของแต่ละสมาชิกใน $T_{E^*}(X)$ และความสัมพันธ์ของกรีนบน $T_{E^*}(X)$ Araujo และ Konieczny ได้นิยามกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ดังนี้

$$T(X,E,R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha \subseteq R \text{ และ } \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

เมื่อ R เป็นภาคตัดของผลแบ่งกั้นของ X/E ในปี 2003 ซึ่งคณะผู้วิจัยได้ศึกษาถึงความปรกติ และความสัมพันธ์ของกรีนบน $T(X,E,R)$

สำหรับในงานวิจัยนี้ เรากำหนดให้ E และ F เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X โดยที่ $E \subseteq F$ และให้

$$T_{EF}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in F \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

จะได้ว่า $T_{EF}(X)$ เป็นกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ถ้า $F = \Delta(X)$ และ $E = X \times X$ แล้ว $T_{EF}(X)$ จะบรรจุฟังก์ชันเอกลักษณ์บนซต X และถ้า $E = \Delta(X)$ แล้ว $T_{EF}(X)$ จะเป็นไอดีลขวาของ $T(X)$ ในการวิจัยครั้งนี้จะศึกษาความสัมพันธ์ของกึ่งกรุป $T_{EF}(X)$ และบางกึ่งกรุปย่อยของ $T(X)$ ในงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากนั้นเรายังนิยามกึ่งกรุปอื่นๆ ดังนี้

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

และ

$$T_E(X,R) = \{\alpha \in T_E(X) : R\alpha = R\}$$

เมื่อ R เป็นภาคตัดขวาง (cross-section) ของผลแบ่งกั้น X/E เรายังแสดงว่า $T_{E^*}(X)$ และ $T_E(X,R)$ เป็นกึ่งกรุป E-ผกผัน (E-inversive semigroup) ในเทอมของจำนวนเชิงการนับของ X/E และ E สุดท้ายเรายังหาสมบัติบางประการที่น่าสนใจของกึ่งกรุปที่ถูกนิยามขึ้นมา

6. **วิธีการดำเนินการวิจัย และสถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล**
   1. ศึกษาความรู้งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงแต่ละชนิด
   2. ศึกษาความสัมพันธ์ของแต่ละกึ่งกรุปการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์ต่างๆ ที่ถูกนิยามขึ้น
   3. ให้ลักษณะของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุปที่เป็นสมาชิกปรกติ สมาชิกปรกติ และการเป็นกึ่งกรุป

ปรกติ

4. ให้เงื่อนไขที่จำเป็น และเพียงพอของกึ่งกรุปการแปลงที่เป็นกึ่งกรุป E-ผกผัน
5. ศึกษาสมบัติบางประการของกึ่งกรุปการแปลงที่ถูกนิยามขึ้น
6. เขียนงานวิจัยเพื่อนำเสนอ/ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

7. ระยะเวลาทำการวิจัย และแผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย

กิจกรรม	เดือนที่											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. ศึกษาความรู้งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงแต่ละชนิด	✓	✓										
2. หาความสัมพันธ์ของแต่ละกึ่งกรุปการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์ต่างๆ ที่ถูกนิยามขึ้น			✓	✓								
3. หาลักษณะของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุปที่เป็นสมาชิกปรกติ สมาชิกปรกติ และการเป็นกึ่งกรุปปรกติ					✓	✓						
4. หาเงื่อนไขที่จำเป็น และเพียงพอของกึ่งกรุปการแปลงที่เป็นกึ่งกรุป E-ผกผัน							✓	✓				
5. ศึกษาสมบัติบางประการของกึ่งกรุปการแปลงที่ถูกนิยามขึ้น									✓	✓		
6. เขียนงานวิจัยเพื่อนำเสนอ/ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ											✓	✓

8. งบประมาณของโครงการวิจัย

รายละเอียดค่าใช้จ่าย	งบประมาณ
1. **หมวดค่าตอบแทน**	
1.1 ค่าตอบแทนผู้ปฏิบัติงานนอกเวลาราชการ	22,000
1.2 ค่าตอบแทนผู้ช่วยวิจัยที่ไม่มีส่วนร่วมในผลงานวิจัย (3คน x 300 บาท/วัน x 90 วัน)	81,000
2. **หมวดค่าใช้สอย**	
2.1 ค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปราชการ	42,000
2.2 ค่าจ้างพิมพ์รายงานค่าถ่ายเอกสาร ค่าเข้าเล่ม	8,500
3. **หมวด**ค่าวัสดุ	
3.1 ค่าวัสดุสำนักงาน	14,000
3.2 ค่าวัสดุคอมพิวเตอร์	46,000
3.3 ค่าถ่ายเอกสาร ค่าเข้าเล่ม	6,500
รวม	220,000

หมายเหตุ : ถัวเฉลี่ยจ่ายทุกรายการ

9. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ (ระบุ ผู้ใช้ประโยชน์ หน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้**ประโยชน์)**

ประโยชน์ผลของการศึกษาครั้งนี้ สามารถนำไปถ่ายทอดในชั้นเรียนในรายวิชาที่เกี่ยวข้องกับสาขาพีชคณิตก่อให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ และแนวทางการทำวิจัยในสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ในสาขาทฤษฎีกึ่งกรุป ได้กึ่งกรุปการแปลงนัยทั่วไปที่รักษาความสัมพันธ์ซึ่งเป็นนัยทั่วไปของงานวิจัยที่ได้ศึกษา และได้ความสัมพันธ์ของกึ่งกรุปดังกล่าวกับกึ่งกรุปย่อยของการแปลงในงานวิจัยอื่นๆ และยังได้ทฤษฎีบทที่น่าสนใจ เช่น การเป็นกึ่งกรุปปรกติ การเป็นกึ่งกรุปผกผัน เป็นต้น และยังเป็นแนวทาง/ต่อยอด หรือนำไปประยุกต์ใช้ในการทำวิจัยสำหรับผู้สนใจอีกด้วย

10. แผนการถ่ายทอดเทคโนโลยีหรือผลการวิจัยสู่กลุ่มเป้าหมาย

1. ผลของการศึกษาครั้งนี้เป็นองค์ความรู้ใหม่ในสาขาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ สาขาทฤษฎีกึ่งกรุป ซึ่งจะใช้เป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไปในอนาคต

2. ผลของการศึกษาครั้งนี้นำไปใช้ในการเรียนการสอนในรายวิชาที่เกี่ยวข้องกับสาขาทฤษฎีกึ่งกรุปได้

11. ผลสำเร็จและความคุ้มค่าของการวิจัยที่คาดว่าจะได้รับ

ประเภท	ประเภทของผลงาน	จำนวน
ตัวชี้วัดหลัก	1. สิทธิบัตร	.....
	2. อนุสิทธิบัตร	.....
	3. ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่มีค่า Impact Factor (ที่อยู่ในฐานข้อมูล Web of Science (ISI เดิม) หรือ Scopus)	4 เรื่อง
	4. ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ (ไม่มีค่า Impact Factor) (ที่อยู่ในฐานข้อมูล Web of Science (ISI เดิม) หรือ Scopus)	.... เรื่อง
	5. ตีพิมพ์ในวารสารระดับประเทศ (อยู่ในฐานข้อมูล TCI กลุ่มที่ 1)	.... เรื่อง
ตัวชี้วัดรอง	6. นำเสนอในการประชุมวิชาการในระดับนานาชาติ ที่มีการตีพิมพ์บน Proceedings	.... เรื่อง
	7. นำเสนอในการประชุมวิชาการในระดับชาติ ที่มีการตีพิมพ์บน Proceedings	.... เรื่อง
	8. บทความวิชาการ ตำรา หนังสือที่มีการรับรองคุณภาพ	.... เรื่อง
	9. ได้สิ่งประดิษฐ์ อุปกรณ์ เครื่องมือ หรืออื่นๆ เช่น ฐานข้อมูล Software ที่สามารถนำไปใช้ประโยชน์หรือนำไปใช้เชิงพาณิชย์และได้รับการรับรองการใช้ประโยชน์จากหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง	.... ชิ้น
	10. ลิขสิทธิ์	.... เรื่อง
	11. ถ่ายทอดผลงานวิจัย / เทคโนโลยีสู่กลุ่มเป้าหมายและได้รับการรับรองการใช้ประโยชน์จากหน่วยงานที่เกี่ยวข้อง	.... คน/หน่วยงาน

บทที่ 2

แนวคิดหรือทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

เพื่อความสะดวกจะในการศึกษาจะขอสรุปแนวคิด และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยเป็นภาษาอังกฤษ

A subsemigroup Q of a semigroup S is called a *quasi-ideal* of S if $SQ \cap QS \subseteq Q$, and by a *bi-ideal* of S we mean a subsemigroup B of S such that $BSB \subseteq B$. Quasi-ideals are a generalization of left ideals and right ideals and bi-ideals are a generalization of quasi-ideals. A *BQ-semigroup* is a semigroup S whose bi-ideals and quasi-ideals coincide. It is known that regular semigroups [17], left [right] simple semigroups [13], left [right] 0-simple semigroups [13] are BQ-semigroups.

For a nonempty subset A of a semigroup S, $(A)_q$ and $(A)_b$ denote respectively the quasi-ideal and the bi-ideal of S generated by A, that is, $(A)_q$ is the intersection of all quasi-ideals of S containing A and $(A)_b$ is the intersection of all bi-ideals of S containing A [15]. We have the following proposition.

Proposition 1. [1] *For a nonempty subset A of a semigroup S,*

$$(A)_q = A \cup (SA \cap AS) \text{ and } (A)_b = A \cup A^2 \cup ASA.$$

Calais [10] gave a characterization of BQ-semigroups as follows.

Proposition 2. [10] *A semigroup S is a BQ-semigroup if and only if $(x, y)_b = (x, y)_q$ for all x, $y \in S$.*

An element a of a semigroup S is called *E-inversive* if there exists x in S such that ax is idempotent of S. A semigroup S is called an *E-inversive semigroup* if every element of S is E-inversive. Clearly, regular semigroups, finite semigroups and eventually regular semigroups are E-inversives. Basic properties of E-inversive semigroups were given by Catino and Miccoli [3], Mitsch [4] and Mitsch and Petrich [5, 6].

For a nonempty set X, let $T(X)$ be the full transformations semigroup on X, i.e., $T(X)$ is the semigroup under composition of all mappings $\alpha : X \to X$. As far back in 1995, Miller and Doss [2] proved that $T(X)$ is a regular semigroup and described its Green's relations. Hence, $T(X)$ is also a BQ-semigroup and an $E-$inversive semigroup. It is well known that every semigroup is isomorphic to a subsemigroup of some full transformation semigroups. Hence in order to study structure of semigroups, it suffices to consider in subsemigroups of $T(X)$.

Let Y be a fixed nonempty subset of X. In 1975, Symons [12] considered the subsemigroup of $T(X)$ defined by

$$T(X,Y) = \{\alpha \in T(X) : X\alpha \subseteq Y\}$$

and described all the automorphisms of this semigroup. Moreover, he determined when the two semigroups of this type are isomorphic. In 2005, Nenthein, Youngkhong and Kemprasit [19] characterized regular elements of $T(X,Y)$ and determined the numbers of regular elements in $T(X,Y)$ for a finite set X. Moreover, Nenthein and Kemprasit [18] proved that $T(X,Y)$ is a BQ-semigroup. In 2008, Sanwong and Sommanee [11] described $T(X,Y)$ to be regular and determined the Green's relations on $T(X,Y)$. Also, a class of maximal inverse subsemigroups of $T(X,Y)$ is obtained.

Let σ be an equivalence relation on a nonempty set X. Pei [7] has studied a family of subsemigroups of $T(X)$ determined by σ, namely

$$T(X,\sigma) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \text{ implies } (x\alpha, y\alpha) \in \sigma\}$$

which is called the *semigroup of transformations that preserve an equivalence* on X. It is clear that if $\sigma \in \{\triangle(X), X \times X\}$, where $\triangle(X)$ is the identity relation on X, then $T(X,\sigma) = T(X)$. He has studied Green's relations and regularity on $T(X,\sigma)$. Recently, Deng, Zeng and Xu

[14] introduced the subsemigroup of $T(X.\sigma)$ as follows:

$$T_{\sigma^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \Leftrightarrow (x\alpha. y\alpha) \in \sigma\}.$$

The authors considered regularity of elements and Green's relations for $T_{\sigma^*}(X)$.

Let R be a cross-section of the partition X/σ induced by σ. In [8], Araújo and Konieczny defined a subsemigroup of $T(X)$ as follows:

$$T(X, \sigma, R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha \subseteq R \text{ and } \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma\}.$$

Clearly, $T(X, \sigma, R) \subseteq T(X, \sigma)$. They have been proved that the semigroups $T(X, \sigma, R)$ are precisely the centralizers of idempotents of $T(X)$. After year, they discussed regularity of elements and Green's relations for $T(X, \sigma, R)$ in [9]. Now, we consider the following subset of (X, σ):

$$T_\sigma(X, R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha = R \text{ and } \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in \sigma\}.$$

Then $T_\sigma(X, R)$ is a subsemigroup of $T(X, \sigma, R)$.

He discussed regularlity of elements and Green's relations for $T(X, \sigma)$. Recently, Mendes-Gonçalves and Sullivan [16] introduced a subsemigroup of $T(X)$ defined by

$$E(X, \sigma) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \text{ implies } x\alpha = y\alpha\}$$

and call it the *semigroup of transformations restricted by an equivalence* σ. We observe that $E(X, \sigma)$ is a subsemigroup of $T(X, \sigma)$. The authors also characterized Green's relations on the largest regular subsemigroup of $E(X, \sigma)$. They also showed that if $|X| \geq 2$ and $\sigma \neq \triangle(X)$, then $E(X, \sigma)$ is not isomorphic to $T(Z)$ for any set Z.

Next, suppose that σ and ρ are equivalence relations on a set X with $\rho \subseteq \sigma$. We define a generalization of $T(X, \sigma)$ as follows:

$$T(X, \sigma, \rho) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in \sigma \text{ implies } (x\alpha, y\alpha) \in \rho\}.$$

It is easy to see that $T(X, \sigma, \rho)$ is a subsemigroup of $T(X)$. Notice that the identity mapping need not in $T(X, \sigma, \rho)$. If $\sigma = \triangle(X)$ or $\rho = X \times X$, then $T(X, \sigma, \rho)$ contains the identity mapping on X. And if $\rho = \triangle(X)$, then $T(X, \sigma, \rho)$ is a right ideal of $T(X)$.

The relationships between $T(X, \sigma, \rho)$ and $E(X, \sigma), T(X, \sigma)$ and $T(X)$ are described.

Proposition 3. *The following statements hold.*

(i) $E(X, \sigma) \subseteq T(X, \sigma, \rho) \subseteq T(X, \sigma)$.

(ii) $T(X, \sigma, \rho) = E(X, \sigma)$ *if and only if* $\rho = \triangle(X)$.

(iii) $T(X, \sigma, \rho) = T(X, \sigma)$ *if and only if* $\sigma = \rho$.

(iv) $T(X, \sigma, \rho) = T(X)$ *if and only if* $\sigma = \triangle(X)$ *or* $\rho = X \times X$.

Our aims of this research are to give necessary and sufficient condition for the elements of $T_{\sigma^*}(X)$ and $T_\sigma(X, R)$ are E-inversives. Moreover, a necessary and sufficient condition for $T_{\sigma^*}(X)$ and $T_\sigma(X, R)$ to be an E-inversive semigroup is given in terms of $|X/\sigma|$ and $|R|$, respectively. We show that $Reg(T_\sigma(X, R))$ is a regular semigroup and $T_{\sigma^*}(X) = T_\sigma(X, R)$ if and only if R is finite and σ is the identity relation. Next, we prove that $T(X, \sigma, \rho)$ is a BQ-semigroup in terms of equivalence relations and also prove that the semigroup $T(X, \sigma, \rho)$ can be embeddable in $T(Y, Z)$ for some sets Y, Z with $Z \subseteq Y$ and if $\sigma = \triangle(X)$ or $\rho = X \times X$, then $T(X, \sigma, \rho) \cong T(Y, Z)$ for some sets Y, Z with $Z \subseteq Y$. Finally, we study relationships between $E(X, \sigma)$ and $T(X, \sigma)$.

References

[1] A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Math. Surveys of the American Mathematical Society, Rhode Island, 1961.

[2] C. Doss, Certain Equivalence Relations in Transformation Semigroups. *Master's Thesis, M.S., University of Tennessee, Knoxville*, 1995.

[3] F. Catino and M. M. Miccoli, On semidirect product of semigroups*, Note di Mathematica 9 (1989), 189–194.

[4] H. Mitsch, Subdirect product of E-inversive semigroups, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990), 66–78.

[5] H. Mitsch and M. Petrich, Basic properties of E-inversive semigroups, Comm. Algebra 28 (2000), 5169–5182.

[6] H. Mitsch and M. Petrich, Restricting idempotents in E-inversive semigroups, Acta. Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 555–570.

[7] H. Pei, Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence. *Comm Algebra* 33 (2005), 109–118.

[8] J. Araújo and J. Konieczny, Automorphism groups of centralizers of idempotents, J. Algebra 269 (2003), 227–239.

[9] J. Araújo and J. Konieczny, Semigroups of transformations preserving an equivalence relation and a cross-section, Comm. Algebra 32 (2004), 1917–1935.

[10] J. Calais, Demigroupes dans lesquels tout bi-idéal est un quasi-idéal. *Semigroup Symposium, Smolenice*, 1968.

[11] J. Sangwong and W. Sommanee, Regularity and Green's relations on a semigroup of transformations with restricted range. *Int J Math Math Sci* **2008** (2008), 1–11.

[12] J. S. V. Symons, Some results concerning a transformation semigroup. *J Austral Math Soc* **19** (1975), 413–425.

[13] K. M. Kapp, On bi-ideals and quasi-ideals in semigroups. *Publ Math Debrecen* **16** (1969), 179–185.

[14] L. Deng, J. Zeng and B. Xu, Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence, Semigroup Forum 80 (2010), 416–425.

[15] O. Steinfeld, *Quasi-ideals in Rings and Semigroups.* Akadémiai Kiadó Budapest, 1978.

[16] R. P. Sullivan and S. Mendes-Gonçalves, Semigroups of transformations restricted by an equivalence. *Cent Eur J Math* 8 (2010), 1120–1131.

[17] S. Lajos, Generalized ideals in semigroups. *Acta Sci Math* **22** (1961), 217–222.

[18] S. Nenthein S and Y. Kemprasit, On transformation semigroups which are *BQ*-semigroups. *Int J Math Math Sci* **2006** (2006), 1–10.

[19] S. Nenthein, P. Youngkhong and Y. Kemprasit,Regular elements of some transformation semigroups. *PU M A* **16** (2005), 307–314.

บทที่ 3

วิธีดำเนินงาน

วิธีการดำเนินงานวิจัยครั้งนี้ มีขั้นตอนวิธีดังนี้

3.1 ศึกษาความรู้งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงแต่ละชนิด

3.2 หาความสัมพันธ์ของแต่ละกึ่งกรุปการแปลงที่รักษาความสัมพันธ์ต่างๆ ที่ถูกนิยามขึ้น

3.3 หาลักษณะของแต่ละสมาชิกในกึ่งกรุปที่เป็นสมาชิกปรกติ สมาชิกปรกติ และการเป็นกึ่งกรุปปรกติ

3.4 หาเงื่อนไขที่จำเป็น และเพียงพอของกึ่งกรุปการแปลงที่เป็นกึ่งกรุป E-ผกผัน

3.5 ศึกษาสมบัติบางประการของกึ่งกรุปการแปลงที่ถูกนิยามขึ้น

3.6 เขียนงานวิจัยเพื่อนำเสนอ/ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

บทที่ 4

สรุปผลการดำเนินงาน

สรุปผลการดำเนินงานวิจัยได้ผลที่เกิดจากการทำวิจัยในครั้งนี้ ดังต่อไปนี้

1. งานวิจัยครั้งนี้ ได้นิยามกึ่งกรุปย่อยใหม่ "กึ่งกรุปการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัว" ของกึ่งกรุปการแปลง และความสัมพันธ์ระหว่างกึ่งกรุปการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัว กับกึ่งกรุปย่อยของกึ่งกรุปการแปลงบางชนิด
2. งานวิจัยครั้งนี้ ได้ทฤษฎีบทที่เป็นสมบัติของกึ่งกรุปการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลที่ถูกนิยามขึ้นมา
3. งานวิจัยครั้งนี้ ได้ทฤษฎีบทที่ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการสมสัณฐานกันระหว่างกึ่งกรุปรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัว
4. งานวิจัยครั้งนี้ ได้ทฤษฎีบทที่บอกถึงเงื่อนไขของการเป็นกึ่งกรุป อี-ผกผัน ในเทอมของจำนวนเชิงการนับ

บรรณานุกรม

1. A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Math. Surveys of the American Mathematical Society, Rhode Island, 1961.
2. C. Doss, Certain Equivalence Relations in Transformation Semigroups. Master's Thesis, M.S., University of Tennessee, Knoxville, 1995.
3. F. Catino and M. M. Miccoli, On semidirect product of semigroups*, Note di Mathematica 9 (1989), 189--194.
4. H. Mitsch, Subdirect product of E -inversive semigroups, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990), 66--78.
5. H. Mitsch and M. Petrich, Basic properties of E -inversive semigroups, Comm. Algebra 28 (2000), 5169--5182.
6. H. Mitsch and M. Petrich, Restricting idempotents in E -inversive semigroups, Acta. Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 555--570.
7. H. Pei, Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence. Comm Algebra 33 (2005), 109--118.
8. J. Araujo and J. Konieczny, Automorphism groups of centralizers of idempotents, Journal of Algebra 269 (2003), 227--239.
9. J. Araujo and J. Konieczny, Semigroups of transformations preserving an equivalence relation and a cross-section, Comm. Algebra 32 (2004), 1917--1935.
10. J. Calais, Demigroupes dans lesquels tout bi-ideal al est un quasi-ideal. Semigroup Symposium, Smolenice, 1968.
11. J. Sangwong and W. Sommanee, Regularity and Green's relations on a semigroup of transformations with restricted range. Int J Math Math Sci 2008 (2008), 1--11.
12. J. S. V. Symons, Some results concerning a transformation semigroup. Journal of Austral Math Soc (1975), 413--425.
13. K. M. Kapp, On bi-ideals and quasi-ideals in semigroups. Publ Math

Debrecen 16 (1969), 179--185.

14. L. Deng, J. Zeng and B. Xu, Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence, Semigroup Forum 80 (2010), 416--425.
15. O. Steinfeld, Quasi-ideals in Rings and Semigroups. Akade miai Kiado Budapest, 1978.
16. R. P. Sullivan and S. Mendes-Goncalves, Semigroups of transformations restricted by an equivalence. Cent Eur J Math 8 (2010), 1120--1131.
17. S. Lajos, Generalized ideals in semigroups. Acta Sci Math 22 (1961), 217--222.
18. S. Nenthein S and Y. Kemprasit, On transformation semigroups which are BQ - semigroups. Int J Math Math Sci 2006 (2006), 1--10.
19. S. Nenthein, P. Youngkhong and Y. Kemprasit, Regular elements of some transformation semigroups. PU M A 16 (2005), 307--314.

ภาคผนวก

การเผยแพร่ผลงานวิจัย จำนวนทั้งหมด 4 ผลงาน ดังนี้

1. ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติชื่อเรื่อง

" On regularity of transformation semigroups preserving equivalence with restricted cross-section "

วารสาร Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), Vol. 102, Number 11, 2017, pp 2659-2666. (IF: 0.227)

2. ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติชื่อเรื่อง

" E-inversive elements in Some semigroups of transformation that preserve equivalence"

วารสาร Thai Journal of Mathematics, 127-132, Special Issue: Annual Meeting in Mathematics 2017. **(IF: 0.235)**

3. ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติชื่อเรื่อง

" Remarks on Isomorphisms of transformation semigroups restricted by an equivalence relation "

วารสาร Communications of the Korean Mathematical Society 33 (2018) N0.3, pp 705-710. **(IF: 0.208)**

4. ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติชื่อเรื่อง

" On a generalization of transformation semigroups that preserve equivalences"

วารสาร Science Asia (accepted) **(IF: 0.179)**

OUR PUBLICATIONS

This title is indexed in Scopus

ISSN 0972-0871

Reprinted from the

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)
Volume 102, Number 11, 2017, pp 2659-2666

ON REGULARITY OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS PRESERVING EQUIVALENCE WITH RESTRICTED CROSS-SECTION

by

Nares Sawatraksa and Chaiwat Namnak

Pushpa Publishing House
Vijaya Niwas, 198 Mumfordganj
Allahabad 211002, INDIA

Information for Authors

Aims and Scope: The *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)* is aimed at to provide an outlet to original research papers and review articles of current interest in all areas of Pure and Applied Mathematics, Statistics, Theoretical Mechanics, Mathematical Physics, Theoretical Computer Science, Mathematical Biology and Financial Mathematics. Application oriented work for users of Mathematics is also encouraged. *The FJMS is published in two volumes annually and each volume comprises of twelve issues. It is a fortnightly journal.*

Abstracting, Indexing and Reviews: SCOPUS, CrossRef DOIs databases, AMS Digital Mathematics Registry, ProQuest, IndexCopernicus, EBSCOhost, Zentralblatt MATH, Ulrichsweb, Indian Science Abstracts, OCLC, Excellence in Research for Australia (ERA), Google Scholar.

Submission of Manuscripts: Authors may submit their papers for consideration in the Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS) by the following modes:

1. **Online submission:** Please visit journal's homepage at http://www.pphmj.com/journals/fjms.htm

2. **Electronically:** At the e-mail address: fjms@pphmj.com or kkazad@pphmj.com

An effort is made to publish a paper duly recommended by a referee within a period of three months. One set of galley proofs of a paper will be sent to the author submitting the paper, unless requested otherwise, without the original manuscript, for corrections.

Abstract and References: Authors are requested to provide an abstract of not more than 250 words and latest Mathematics Subject Classification. Statements of Lemmas, Propositions and Theorems should be set in *italics* and references should be arranged in alphabetical order by the surname of the first author.

Page Charges and Reprints: Authors are requested to arrange page charges of their papers @ USD 25.00 per page from their institutions/research grants, if any. However, for authors in India this charge is Rs. 800.00 per page. Twenty five reprints in print version and a copy in soft version are provided to the corresponding author ex-gratis. Additional sets of reprints may be ordered at the time of proof correction.

Subscription Information for 2017

Institutional Price for all countries except India

Electronic Subscription	€ 905.00	US$ 1195.00
Print Subscription includes Online Access	€ 1295.00	US$ 1735.00

For Institutions: On seeking a license for volume(s) of the Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS), the facility to download and print the articles will be available through the institutional 9 digits IP address to be provided by the appropriate authority. The facility to download will continue till the end of the next calendar year from the last issue of the volume subscribed. For having continued facility to keep the download of the same subscribed volume for another two calendar years may be had on a considerable discounted rate.

Price in Indian Rs. (For Indian Institutions in India only)

Print Subscription Only	Rs. 19500.00

The subscription year runs from January 1, 2017 through December 31, 2017.

Information: The journals published by the "Pushpa Publishing House" are solely distributed by the **"Vijaya Books and Journals Distributors".**

Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)
© 2017 Pushpa Publishing House, Allahabad, India
http://www.pphmj.com
http://dx.doi.org/10.17654/MS102112659
Volume 102, Number 11, 2017, Pages 2659-2666 ISSN: 0972-0871

ON REGULARITY OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS PRESERVING EQUIVALENCE WITH RESTRICTED CROSS-SECTION

Nares Sawatraksa and Chaiwat Namnak

Department of Mathematics
Faculty of Science
Naresuan University
Phitsanulok, 65000, Thailand
e-mail: naress58@nu.ac.th
chaiwatn@nu.ac.th

Abstract

Let X be a nonempty set and $T(X)$ be the full transformation semigroup on a set X. For an equivalence relation E on X and a cross-section R of the partition X/E induced by E, let

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

and

$$T_E(X, R)$$

$$= \{\alpha \in T(X) : R\alpha = R, \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

Received: July 3, 2017; Accepted: October 5, 2017
2010 Mathematics Subject Classification: 20M20.
Keywords and phrases: transformation semigroup, equivalence relation, regular element

Then $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ are subsemigroups of $T(X)$. In this paper, we show that the set of all regular elements of $T_E(X, R)$ becomes a regular semigroup. Also, we give a necessary and sufficient condition when semigroups $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ coincide.

1. Introduction and Preliminaries

An element x of a semigroup S is called *regular* if there exists y in S such that $x = xyx$. A semigroup S is called a *regular semigroup* if every element of S is regular. The set of all regular elements of S is denoted by $Reg(S)$.

The full transformation semigroup on a nonempty set X is denoted by $T(X)$, that is, $T(X)$ is the semigroup of all mappings $\alpha : X \to X$ under composition. The semigroup $T(X)$ is known to be regular in [5].

Let E be an equivalence relation on X. Pei [7] has introduced a family of subsemigroups of $T(X)$ defined by

$$T_E(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

and call it the *semigroup of transformations that preserve an equivalence on* X. He has studied Green's relations and regularity on $T_E(X)$. Recently, Deng et al. [4] introduced the subsemigroup of $T_E(X)$ as follows:

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

The authors considered regularity of elements and Green's relations for $T_{E^*}(X)$.

Let R be a cross-section of the partition X/E induced by E. In [1], Araújo and Konieczny defined a subsemigroup of $T(X)$ as follows:

$$T(X, E, R)$$
$$= \{\alpha \in T(X) : R\alpha \subseteq R \text{ and } \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

Clearly, $T(X, E, R) \subseteq T_E(X)$. They have proved that the semigroups $T(X, E, R)$ are precisely the centralizers of idempotents of $T(X)$. After a year, they studied the structure and regularity of the semigroups $T(X, E, R)$. Moreover, they determined Green's relations in $T(X, E, R)$ in [2]. In this research, we examine a related subsemigroup of $T(X, E, R)$: namely, the *transformation semigroups that preserve an equivalence with restricted cross-section on* X defined by

$$T_E(X, R)$$
$$= \{\alpha \in T(X) : R\alpha = R \text{ and } \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

The aim of this paper is to prove that $Reg(T_E(X, R))$ is a regular semigroup. Also, we show that $T_{E^*}(X) = T_E(X, R)$ if and only if R is finite and E is the identity relation.

In the remainder, let E be an equivalence relation on a set X and R be a cross-section of the partition X/E. Denote by X/E the quotient set and E_r the E-class containing r for all $r \in R$.

2. Main Results

A characterization of the regularity for elements in $T_{E^*}(X)$ as follows [4]:

Theorem 2.1 [4]. *Let* $\alpha \in T_{E^*}(X)$. *Then* $\alpha \in Reg(T_{E^*}(X))$ *if and only if* $A \cap X\alpha \neq \varnothing$ *for all* $A \in X/E$.

The nature of regular elements in $T_E(X, R)$ was considered in [6].

Theorem 2.2 [6]. *Let* $\alpha \in T_E(X, R)$. *Then* $\alpha \in Reg(T_E(X, R))$ *if and only if* $\alpha|_R$ *is an injection.*

Proposition 2.3. $Reg(T_E(X, R)) \subseteq Reg(T_{E^*}(X))$.

Proof. Let $\alpha \in Reg(T_E(X, R))$. Then $\alpha \in T_E(X)$. Let $x, y \in X$ be such that $(x\alpha, y\alpha) \in E$. Then there exist $r, s \in R$ such that $x \in E_r$ and $y \in E_s$. Since $(x\alpha, y\alpha) \in E$ and $\alpha \in T_E(X)$, we deduce that $r\alpha = s\alpha$. Since α is regular in $T_E(X, R)$, it follows from Theorem 2.2 that $r = s$. Hence, $(x, y) \in E$, so $\alpha \in T_{E^*}(X)$. Since $R\alpha = R$, we then have $E_r \cap X\alpha \neq \varnothing$ for all $r \in R$. By Theorem 2.1, $\alpha \in Reg(T_{E^*}(X))$. Hence, $Reg(T_E(X, R)) \subseteq Reg(T_{E^*}(X))$, as desired. □

The following example shows that $Reg(T_E(X, R))$ may not be equal to $Reg(T_{E^*}(X))$.

Example 2.4. Let $X = \mathbb{N}$, $X/E = \{\{x, x+1\} : x \text{ is odd}\}$ and $R = \{x \in X : x \text{ is odd}\}$. Let $\alpha \in T(X)$ be defined by

$$x\alpha = \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 2, \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\alpha \in T_{E^*}(X)$. By Theorem 2.1, we have that α is a regular element of $T_{E^*}(X)$. Since $r\alpha \neq 1$ for all $r \in R$ and $1 \in R$, we have $R\alpha \neq R$. This implies that $\alpha \notin T_E(X, R)$, hence $\alpha \notin Reg(T_E(X, R))$.

We first prove lemma needed to determine if $Reg(T_E(X, R))$ is regular.

Lemma 2.5. *Let $\alpha \in Reg(T_E(X, R))$. If $r \in R$, then $E_r \cap X\alpha = E_{r'}\alpha$ for some $r' \in R$.*

Proof. Assume that $r \in R$. Since $R\alpha = R$, there exists $r' \in R$ such that $r = r'\alpha$. Since $\alpha \in T_E(X)$, it then follows that $E_{r'}\alpha \subseteq E_r \cap X\alpha$. For the reverse inclusion, if $y \in E_r \cap X\alpha$, then $y = x\alpha$ for some $x \in X$. This implies that $x \in E_s$ for some $s \in R$ and so $s\alpha = r$. Since $\alpha \in Reg(T_E(X, R))$ by Theorem 2.2, $\alpha|_R$ is injective. Since $s\alpha = r'\alpha$, we have $s = r'$. Hence, $y \in E_{r'}\alpha$. This shows that $E_r \cap X\alpha \subseteq E_{r'}\alpha$ and so equality holds. □

Theorem 2.6. *$Reg(T_E(X, R))$ is a regular semigroup.*

Proof. It is easy to see that $Reg(T_E(X, R))$ contains the identity mapping on X, hence $Reg(T_E(X, R)) \neq \varnothing$. Let $\alpha, \beta \in Reg(T_E(X, R))$. To show that $\alpha\beta$ is regular, let $r, s \in R$ be such that $r\alpha\beta = s\alpha\beta$. Since $r\alpha, s\alpha \in R$ and $\beta \in Reg(T_E(X, R))$, we get $r\alpha = s\alpha$ by Theorem 2.2. Similarly, we have $r = s$. This verifies that $\alpha\beta|_R$ is injective. From Theorem 2.2, $\alpha\beta \in Reg(T_E(X, R))$. Hence, $Reg(T_E(X, R))$ is a subsemigroup of $T_E(X, R)$.

Let $\alpha \in Reg(T_E(X, R))$. We construct $\beta \in Reg(T_E(X, R))$ such that $\alpha = \alpha\beta\alpha$. For each $r \in R$, we choose $r' \in R$ such that $E_r \cap X\alpha = E_{r'}\alpha$ by Lemma 2.5. It follows that $r = r'\alpha$. Let $a_r = r'$. For each $y \in (E_r \cap X\alpha)\setminus\{r\}$, we choose $a_y \in E_{r'}$ such that $a_y\alpha = y$. Define $\beta_r : E_r \to E_{r'}$ by

$$x\beta_r = \begin{cases} a_x & \text{if } x \in X\alpha, \\ r' & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then β_r is well-defined, $E_r\beta_r \subseteq E_{r'}$ and $r\beta_r = a_r = r' \in R$. Let $\beta \in T(X)$ be defined by $\beta|_{E_r} = \beta_r$ for all $r \in R$. Since R is a cross-section of the partition X/E induced by E, β is well-defined. Obviously, $\beta \in T_E(X)$ and $R\beta \subseteq R$. Let $r \in R$. Then $r\alpha = s$ for some $s \in R$. Thus, $s\beta_s = a_s = s'$ for some $s' \in R$ with $s'\alpha = s$. Therefore, $s'\alpha = r\alpha$. By assumption, we have that $s' = r$ and thus $s\beta = s\beta|_{E_s} = s\beta_s = a_s = s' = r$. It follows that $R\beta = R$ and therefore $\beta \in T_E(X, R)$. If $x \in X$, then $x\alpha \in E_r$ for some $r \in R$. Thus,

$$x\alpha\beta\alpha = (x\alpha)\beta|_{E_r}\alpha = (x\alpha)\beta_r\alpha = a_{x\alpha}\alpha = x\alpha$$

and therefore $\alpha = \alpha\beta\alpha$. It remains to show that $\beta \in Reg(T_E(X, R))$. To do this, let $r, s \in R$ be such that $r\beta = s\beta$. Then $r\beta = a_r = r'$ and $s\beta = a_s = s'$ for some $r', s' \in R$ with $r = r'\alpha$ and $s = s'\alpha$. Thus, $r = r'\alpha = s'\alpha = s$. By Theorem 2.2, $\beta \in Reg(T_E(X, R))$.

Hence, the theorem is completely proved. □

Next, we describe the complement of $Reg(T_E(X, R))$ in $T_E(X, R)$.

Theorem 2.7. *If $T_E(X, R)\setminus Reg(T_E(X, R))$ is a nonempty set, then it is an ideal of $T_E(X, R)$.*

Proof. Suppose that $T_E(X, R)\setminus Reg(T_E(X, R)) \neq \varnothing$. Let $\alpha \in T_E(X, R)\setminus Reg(T_E(X, R))$ and $\beta, \gamma \in T_E(X, R)$. Suppose that $\beta\alpha\gamma \in Reg(T_E(X, R))$. Claim that $\alpha\gamma|_R$ is injective. Let $r, s \in R$ be such that $r\alpha\gamma = s\alpha\gamma$. Since $R\beta = R$, $r'\beta = r$ and $s'\beta = s$ for some $r', s' \in R$. Thus, $r'\beta\alpha\gamma = s'\beta\alpha\gamma$. By the regularity of $\beta\alpha\gamma$, we get that $r' = s'$ and hence $r = r'\beta = s'\beta = s$. So we have the claim. From Theorem 2.2, $\alpha\gamma \in Reg(T_E(X, R))$. Since $\alpha \notin Reg(T_E(X, R))$, there are distinct elements $r, s \in R$ such that $r\alpha = s\alpha$. Thus, $r\alpha\gamma = s\alpha\gamma$. But $\alpha\gamma \in Reg(T_E(X, R))$, we have that r and s must be equal, contradicting the supposition. Hence, $\beta\alpha\gamma \notin Reg(T_E(X, R))$. Consequently, $T_E(X, R)\setminus Reg(T_E(X, R))$ is an ideal of $T_E(X, R)$, as required. □

The next theorems provide conditions under which semigroups $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ are regular [4, 6].

Theorem 2.8 [4]. *$T_{E^*}(X)$ is a regular semigroup if and only if X/E is finite.*

Theorem 2.9 [6]. *$T_E(X, R)$ is a regular semigroup if and only if R is finite.*

Finally, we investigate the equality of the semigroups $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$.

Theorem 2.10. $T_E(X, R) = T_{E^*}(X)$ *if and only if R is finite and E is the identity relation.*

Proof. Suppose that $T_E(X, R) = T_{E^*}(X)$. To show that $T_{E^*}(X)$ is regular, let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. Then $\alpha \in T_E(X, R)$ and hence $R\alpha = R$. It follows that $E_r \cap X\alpha \neq \varnothing$ for all $r \in R$. From Theorem 2.1, we have $\alpha \in Reg(T_{E^*}(X))$. Hence, $T_{E^*}(X)$ is regular. By Theorem 2.8, X/E is finite and this implies that R is finite. Next, to show that E is the identity relation on X, let $a, b \in X$ be such that $(a, b) \in E$. Then there exists $r \in R$ such that $a, b \in E_r$. Let $\alpha, \beta \in T(X)$ be defined by

$$x\alpha = \begin{cases} a & \text{if } x \in E_r, \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$x\beta = \begin{cases} b & \text{if } x \in E_r, \\ x & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Obviously, $\alpha, \beta \in T_{E^*}(X)$. By assumption, $\alpha, \beta \in T_E(X, R)$. It then follows that $a = r\alpha = r = r\beta = b$. Hence, E is the identity relation, as desired.

Conversely, assume that R is finite and E is the identity relation. Since R is finite, X/E is also finite. Then Theorems 2.8, 2.9 and Proposition 2.3 imply that $T_E(X, R) \subseteq T_{E^*}(X)$. For the reverse inclusion, let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. It suffices to show that $R\alpha = R$. Let $r \in R$. Then $r\alpha \in E_s$ for some $s \in R$. Since E is the identity relation, $r\alpha = s$ and hence $R\alpha \subseteq R$. On the other hand, let $r \in R$. Since X/E is finite, by Theorem 2.8, we have α is a regular element of $T_{E^*}(X)$. By Theorem 2.1, $E_r \cap X\alpha \neq \varnothing$. Then there exists

$r' \in R$ such that $E_{r'}\alpha \subseteq E_r$. Consequently, $(r'\alpha, r) \in E$. By assumption, we have $r'\alpha = r$. Thus, $R \subseteq R\alpha$, the equality holds. Thus, $\alpha \in T_E(X, R)$ and hence $T_E(X, R) = T_{E^*}(X)$.

Therefore, the proof is complete. □

Acknowledgment

The authors would like to express gratitude to Science Achievement Scholarship of Thailand (SAST) for full scholarship to the first author and support in academic activities.

References

[1] J. Araújo and J. Konieczny, Automorphism groups of centralizers of idempotents, J. Algebra 269 (2003), 227-239.

[2] J. Araújo and J. Konieczny, Semigroups of transformations preserving an equivalence relation and a cross-section, Comm. Algebra 32 (2004), 1917-1935.

[3] A. H. Clifford and G. B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I, Mathematical Surveys, American Mathematical Society, Rhode Island, 1961.

[4] L. Deng, J. Zeng and B. Xu, Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence, Semigroup Forum 80 (2010), 416-425.

[5] C. Doss, Certain equivalence relations in transformation semigroups, M. A. Master's Thesis, University of Tennessee, Knoxville, 1955.

[6] C. Namnak, P. Kammoo and N. Sawatraksa, E-inversive elements in some semigroups of transformations that preserve equivalence, Thai J. Math. (to appear).

[7] H. Pei, Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence, Comm. Algebra 33 (2005), 109-118.

Thai Journal of Mathematics : 127–132
Special Issue: Annual Meeting in Mathematics 2017
http://thaijmath.in.cmu.ac.th
ISSN 1686-0209

E-Inversive Elements in Some Semigroups of Transformations that Preserve Equivalence

Nares Sawatraksa, Punyapat Kammoo and Chaiwat Namnak[1]

Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University
Phitsanulok 65000, Thailand
e-mail : naress58@nu.ac.th (N. Sawatraksa)
punyapatk59@nu.ac.th (P. Kammoo)
chaiwatn@nu.ac.th (C. Namnak)

Abstract : Let X be a nonempty set and $T(X)$ the full transformation semigroup on a set X. For an equivalence relation E on X and a cross-section R of the partition X/E induced by E, let

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\} \text{ and}$$

$$T_E(X, R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha = R \text{ and } \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

Then $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ are subsemigroups of $T(X)$. In this paper, we describe the E-inversive elements of $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$. We also show that $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ are E-inversive semigroups in terms of the cardinality of X/E and R, respectively.

Keywords : transformation semigroup; equivalence relation; E-inversive element; E-inversive semigroup.
2010 Mathematics Subject Classification : 20M20.

1 Introduction

An element a of a semigroup S is called *E-inversive* if there exists x in S such that ax is idempotent of S. A semigroup S is called an *E-inversive semigroup* if

[1] Corresponding author.

every element of S is E-inversive. Clearly, regular semigroups, finite semigroups and eventually regular semigroups are E-inversives. Basic properties of E-inversive semigroups were given by Catino and Miccoli [1], Mitsch [2] and Mitsch and Petrich [3,4] and Gigoń [5].

The full transformation semigroup on a nonempty set X is denoted by $T(X)$, that is, $T(X)$ is the semigroup of all mappings $\alpha : X \to X$ under composition. The semigroup $T(X)$ is known to be regular [6]. Hence $T(X)$ is an E-inversive semigroup.

Let E be an equivalence relation on X. Pei [7] has introduced a family of subsemigroups of $T(X)$ defined by

$$T_E(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}$$

and call it the *semigroup of transformations that preserve an equivalence* on X. He has studied Green's relations and regularity on $T_E(X)$. Recently, Deng, Zeng and Xu [8] introduced the subsemigroup of $T_E(X)$ as follows:

$$T_{E^*}(X) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Leftrightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

The authors considered regularity of elements and Green's relations for $T_{E^*}(X)$.

Let R be a cross-section of the partition X/E induced by E. In [9], Araújo and Konieczny defined a subsemigroup of $T(X)$ as follows:

$$T(X, E, R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha \subseteq R \text{ and } \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

Clearly, $T(X, E, R) \subseteq T_E(X)$. They have been proved that the semigroups $T(X, E, R)$ are precisely the centralizers of idempotents of $T(X)$. After year, they discussed regularity of elements and Green's relations for $T(X, E, R)$ in [10]. Now, we consider the following subset of $T_E(X)$:

$$T_E(X, R) = \{\alpha \in T(X) : R\alpha = R \text{ and } \forall x, y \in X, (x, y) \in E \Rightarrow (x\alpha, y\alpha) \in E\}.$$

Then $T_E(X, R)$ is a subsemigroup of $T(X, E, R)$.

The aim of this paper is to give necessary and sufficient condition for the elements of $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ are E-inversives. Moreover, a necessary and sufficient condition for $T_{E^*}(X)$ and $T_E(X, R)$ to be an E-inversive semigroup is given in terms of $|X/E|$ and $|R|$, respectively.

In the remainder, let E be an equivalence relation on a set X and R a cross-section of the partition X/E. Denote by X/E the quotient set.

2 Main Results

We denote composition of two mappings obtained by performing first α and then β. We first provide that $T_E(X)$ and $T(X, E, R)$ are E-inversive semigroups. We remark that in view of this fact, if S is any one of $T_E(X)$ and $T(X, E, R)$, then S contains a constant mapping. It thus follows that every $\alpha \in S$ and a constant mapping β of S, $\alpha\beta$ is also constant and hence $\alpha\beta$ is an idempotent element of S. We immediately obtain:

Proposition 2.1. *The semigroups $T_E(X)$ and $T(X,E,R)$ are E-inversive semigroups.*

We have mentioned that every regular element is E-inversive. But there exists an E-inversive element of a semigroup S which is not regular as shown in the following example.

Example 2.2. Let $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ and $X/E = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6,7\}\}$. Define $\alpha \in T(X)$ by

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then $\alpha \in T_E(X)$, hence α is E-inversive. Suppose that α is regular. Then $\alpha = \alpha\beta\alpha$ for some $\beta \in T_E(X)$. Since $1 = 7\alpha = 7\alpha\beta\alpha = 1\beta\alpha$ and $3 = 4\alpha = 4\alpha\beta\alpha = 3\beta\alpha$, we obtain that $1\beta = 7$ and $3\beta \in \{4,5\}$. Since $(1,3) \in E$ and $\beta \in T_E(X)$, $(1\beta, 3\beta) \in E$ which is a contradiction. Hence α is not a regular element of $T_E(X)$.

To prove the main theorem, the following lemma is needed.

Lemma 2.3. *Let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. If α is idempotent, then $A\alpha \subseteq A$ for all $A \in X/E$.*

Proof. Suppose that α is idempotent. Then $\alpha^2 = \alpha$. Let $A \in X/E$ and $a \in A$. Then $a\alpha^2 = a\alpha$ and hence $(a\alpha, (a\alpha)\alpha) \in E$. Since $\alpha \in T_{E^*}(X)$, it follows that $(a, a\alpha) \in E$. From $a \in A$, we deduce that $a\alpha \in A$. Therefore, $A\alpha \subseteq A$. □

The nature of regular elements in $T_{E^*}(X)$ and condition under which $T_{E^*}(X)$ is regular were considered in [8].

Theorem 2.4. [8, Theorem 3.1] *Let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. Then α is regular if and only if $A \cap X\alpha \neq \emptyset$ for all $A \in X/E$.*

Theorem 2.5. [8, Theorem 3.2] *$T_{E^*}(X)$ is a regular semigroup if and only if $|X/E|$ is finite.*

Theorem 2.6. *Let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. Then α is E-inversive if and only if $A \cap X\alpha \neq \emptyset$ for all $A \in X/E$.*

Proof. Suppose that α is E-inversive. Then there exists $\beta \in T_{E^*}(X)$ such that $\alpha\beta$ is idempotent. Let $A \in X/E$. Then $A\beta \subseteq B$ for some $B \in X/E$. By Lemma 2.3, we deduce that $B\alpha\beta \subseteq B$. Let $b \in B$. Then $b\alpha\beta \in B$. If $a \in A$, then $a\beta \in B$ and so $(b\alpha\beta, a\beta) \in E$. Since $\beta \in T_{E^*}(X)$, it follows that $(b\alpha, a) \in E$. Thus $b\alpha \in A$. Hence $B\alpha \subseteq A$. Consequently, $A \cap X\alpha \neq \emptyset$.

Conversely, it follows from Theorem 2.4 and the fact that every regular element is E-inversive. □

The next result follows immediately from Theorem 2.4 and Theorem 2.6.

Corollary 2.7. *Let $\alpha \in T_{E^*}(X)$. Then the following statements are equivalent.*

(1) *α is a regular element.*

(2) *α is an E-inversive element.*

(3) *$A \cap X\alpha \neq \emptyset$ for all $A \in X/E$.*

Corollary 2.7 and Theorem 2.5 can be summarized as follows:

Corollary 2.8. *The following statements are equivalent.*

(1) *$T_{E^*}(X)$ is a regular semigroup.*

(2) *$T_{E^*}(X)$ is an E-inversive semigroup.*

(3) *$|X/E|$ is finite.*

The following theorem characterizes the regular elements of $T_E(X, R)$. Denote E_r the $E-$class containing r for all $r \in R$.

Theorem 2.9. *Let $\alpha \in T_E(X, R)$. Then α is regular if and only if $\alpha|_R$ is an injection.*

Proof. Suppose that α is regular. Then there exists $\beta \in T_E(X, R)$ such that $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Let $r, s \in R$ be such that $r\alpha = s\alpha$. Since $\beta \in T_E(X, R)$, $R\beta = R$ and hence $r = r'\beta$ and $s = s'\beta$ for some $r', s' \in R$. Since $R\alpha = R$, there exist $r'', s'' \in R$ such that $r' = r''\alpha$ and $s' = s''\alpha$. We have that

$$r' = r''\alpha = r''\alpha\beta\alpha = r'\beta\alpha = r\alpha = s\alpha = s'\beta\alpha = s''\alpha\beta\alpha = s''\alpha = s'.$$

This implies that $r = r'\beta = s'\beta = s$. Hence $\alpha|_R$ is an injection, as required.

Conversely, assume that $\alpha|_R$ is an injection. Claim that for every $r \in R$, there exists $r' \in R$ such that $E_r \cap X\alpha = E_{r'}\alpha$. Let $r \in R$. Since $R\alpha = R$, there is $r' \in R$ such that $r = r'\alpha$. Since $\alpha \in T_E(X)$, it then follows that $E_{r'}\alpha \subseteq E_r \cap X\alpha$. For the reverse inclusion, if $y \in E_r \cap X\alpha$, then $y = x\alpha$ for some $x \in X$. This implies that $x \in E_s$ for some $s \in R$ and so $s\alpha = r$. By assumption and $s\alpha = r'\alpha$, we have $s = r'$. Hence $y \in E_{r'}\alpha$. This shows that $E_r \cap X\alpha = E_{r'}\alpha$. So we have the claim.

For each $r \in R$, we choose $a_r \in R$ such that $E_r \cap X\alpha = E_{a_r}\alpha$. Thus $r = a_r\alpha$. For each $y \in (E_r \cap X\alpha) \setminus \{r\}$, we choose $a_y \in E_{a_r}$ such that $a_y\alpha = y$. Define $\beta_r : E_r \to E_{a_r}$ by

$$x\beta_r = \begin{cases} a_x & \text{if } x \in X\alpha, \\ a_r & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then β_r is well-defined, $E_r\beta_r \subseteq E_{a_r}$ and $r\beta_r = a_r \in R$. Let $\beta : X \to X$ be defined by $\beta|_{E_r} = \beta_r$ for all $r \in R$. Since R is a cross-section of the partition X/E induced by E, β is well-defined. Obviously, $\beta \in T_E(X)$ and $R\beta \subseteq R$. Let $r \in R$. Then $r\alpha = s$ for some $s \in R$. Thus $s\beta_s = a_s$ for some $a_s \in R$ with $a_s\alpha = s$. Therefore, $a_s\alpha = r\alpha$. By assumption, we have that $a_s = r$ and thus

$s\beta = s\beta|_{E_s} = s\beta_s = a_s = r$. It follows that $R\beta = R$ and therefore $\beta \in T_E(X, R)$. Let $x \in X$. Then $x\alpha \in E_r$ for some $r \in R$. Thus

$$x\alpha\beta\alpha = (x\alpha)\beta|_{E_r}\alpha = (x\alpha)\beta_r\alpha = a_{x\alpha}\alpha = x\alpha$$

and therefore $\alpha = \alpha\beta\alpha$. Hence α is regular. □

We also have the following theorem for which characterizes when $T_E(X, R)$ is a regular semigroup.

Theorem 2.10. *$T_E(X, R)$ is a regular semigroup if and only if $|R|$ is finite.*

Proof. Suppose that R is an infinite set. Let $r \in R$. Then $R \setminus \{r\}$ is also infinite and $|R \setminus \{r\}| = |R|$. Thus there exists a bijection $\varphi : R \setminus \{r\} \to R$. Choose and fix $r' \in R \setminus \{r\}$. Define $\alpha : X \to X$ by

$$x\alpha = \begin{cases} r' & \text{if } x \in E_r, \\ s\varphi & \text{if } x \in E_s. \end{cases}$$

Then $\alpha \in T_E(X)$. Since $r\alpha = r'$ and $\varphi : R \setminus \{r\} \to R$, we get that $R\alpha \subseteq R$. Let $s \in R$. Since φ is surjective, $s = t\varphi$ for some $t \in R \setminus \{r\}$. Since $t \neq r$, it follows that $t\alpha = t\varphi = s$. Therefore $R \subseteq R\alpha$. Hence $\alpha \in T_E(X, R)$. Since $r' \in R$, $r' = r''\varphi$ for some $r'' \in R \setminus \{r\}$. This implies that $r'' \neq r$ and $r''\alpha = r''\varphi = r' = r\alpha$. Consequently, $\alpha|_R$ is not injective. By Theorem 2.9, we have that α is not regular. Hence $T_E(X)$ is not a regular semigroup.

Conversely, suppose that R is finite. Let $\alpha \in T_E(X, R)$. Then $R\alpha = R$ and so $\alpha|_R : R \to R$ is a surjection. By the finiteness of R, $\alpha|_R$ is injective. From Theorem 2.9, α is regular. We conclude that $T_E(X, R)$ is a regular semigroup. □

The next thorem use [6, page 4] that if $\alpha \in T(X)$ and $\alpha^2 = \alpha$, then $x\alpha = x$ for all $x \in X\alpha$.

Theorem 2.11. *Let $\alpha \in T_E(X, R)$. Then α is E-inversive if and only if $\alpha|_R$ is an injection.*

Proof. Suppose that α is E-inversive. Then there exists $\beta \in T_E(X, R)$ such that $\alpha\beta$ is idempotent. Let $r, s \in R$ be such that $r\alpha = s\alpha$. Since $\alpha\beta \in T_E(X, R)$, we have $R\alpha\beta = R$. Thus $r, s \in X\alpha\beta$. Since $\alpha\beta$ is idempotent and $r\alpha = s\alpha$, we deduce that $r = r\alpha\beta = s\alpha\beta = s$. Thereby $\alpha|_R$ is an injection.

Conversely, if $\alpha|_R$ is injective, then α is regular by Theorem 2.9. Therefore α is E-inversive. □

As a consequence of Theorems 2.9 and 2.11 are useful to obtain this result.

Corollary 2.12. *Let $\alpha \in T_E(X, R)$. Then the following statements are equivalent.*

(1) *α is a regular element.*

(2) *α is an E-inversive element.*

(3) $\alpha|_R$ *is an injection.*

As a consequence of Corollary 2.12 and Theorem 2.10, the following result follows readily.

Corollary 2.13. *The following statements are equivalent.*

(1) $T_E(X,R)$ *is a regular semigroup.*

(2) $T_E(X,R)$ *is an E-inversive semigroup.*

(3) $|R|$ *is finite.*

Acknowledgements : The authors are grateful to the referees for their careful reading of the manuscript and their useful comments.

References

[1] F. Catino, M.M. Miccoli, On semidirect product of semigroups*, Note di Mathematica 9 (1989) 189-194.

[2] H. Mitsch, Subdirect product of E-inversive semigroups, J. Austral. Math. Soc. 48 (1990) 66-78.

[3] H. Mitsch, M. Petrich, Basic properties of E-inversive semigroups, Comm. Algebra 28 (2000) 5169-5182.

[4] H. Mitsch, M. Petrich, Restricting idempotents in E-inversive semigroups, Acta. Sci. Math. (Szeged) 67 (2001) 555-570.

[5] R.S. Gigoń, Some results on E-inversive semigroups, Quasigroup and Related Systems 20 (2012) 53-60.

[6] A.H. Clifford, G.B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups, Math. Surveys of the American Mathematical Society, Rhode Island, 1961.

[7] H. Pei, Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence, Comm. Algebra 33 (2005) 109-118.

[8] L. Deng, J. Zeng, B. Xu, Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence, Semigroup Forum 80 (2010) 416-425.

[9] J. Araújo, J. Konieczny, Automorphism groups of centralizers of idempotents, J. Algebra 269 (2003) 227-239.

[10] J. Araújo, J. Konieczny, Semigroups of transformations preserving an equivalence relation and a cross-section, Comm. Algebra 32 (2004) 1917-1935.

(Received 2 March 2017)
(Accepted 16 June 2017)

Commun. Korean Math. Soc. 33 (2018), No. 3, pp. 705–710
https://doi.org/10.4134/CKMS.c170254
pISSN: 1225-1763 / eISSN: 2234-3024

REMARKS ON ISOMORPHISMS OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS RESTRICTED BY AN EQUIVALENCE RELATION

Chaiwat Namnak and Nares Sawatraksa

Reprinted from the
Communications of the Korean Mathematical Society
Vol. 33, No. 3, July 2018

Commun. Korean Math. Soc. 33 (2018), No. 3, pp. 705–710
https://doi.org/10.4134/CKMS.c170254
pISSN: 1225-1763 / eISSN: 2234-3024

REMARKS ON ISOMORPHISMS OF TRANSFORMATION SEMIGROUPS RESTRICTED BY AN EQUIVALENCE RELATION

Chaiwat Namnak and Nares Sawatraksa

Abstract. Let $T(X)$ be the full transformation semigroup on a set X and σ be an equivalence relation on X. Denote

$$E(X,\sigma) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \text{ implies } x\alpha = y\alpha\}.$$

Then $E(X,\sigma)$ is a subsemigroup of $T(X)$. In this paper, we characterize two semigroups of type $E(X,\sigma)$ when they are isomorphic.

1. Introduction and preliminaries

Let X be an arbitrary nonempty set. The semigroup $T(X)$ of all transformations on X consists of the mappings from X into itself with composition as the semigroup operation. In [4], H. Pei studied subsemigroups of $T(X)$ determined by an equivalence relation σ on X, defined by:

$$T(X,\sigma) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \text{ implies } (x\alpha, y\alpha) \in \sigma\}.$$

It is clear that if $\sigma \in \{\Delta(X), X \times X\}$, where $\Delta(X)$ is the identity relation on X, then $T(X,\sigma) = T(X)$. He also discussed regularity of elements and Green's relations for $T(X,\sigma)$. Recently, R. P. Sullivan and S. Mendes-Gonçalves introduced a subsemigroup of $T(X)$ defined by

$$E(X,\sigma) = \{\alpha \in T(X) : \forall x, y \in X, (x,y) \in \sigma \text{ implies } x\alpha = y\alpha\}$$

and called it the *semigroup of transformations restricted by the equivalence* σ in [3]. Then $E(X,\sigma)$ is a subsemigroup of $T(X,\sigma)$. The authors characterized Green's relations on the largest regular subsemigroup of $E(X,\sigma)$. They also showed that if $|X| \geq 2$ and $\sigma \neq \Delta(X)$, then $E(X,\sigma)$ is not isomorphic to $T(Z)$ for any set Z.

We easily get the following proposition which is a characterization of $E(X,\sigma)$.

Received June 16, 2017; Revised October 17, 2017; Accepted December 28, 2017.
2010 *Mathematics Subject Classification*. 20M20.
Key words and phrases. transformation semigroup, isomorphism theorem, equivalence.
This work was financially supported by Naresuan University Grant number R2560C186.

Proposition 1.1. *Let σ be an equivalence relation on a set X. Then the following statements hold.*

(1) *$id_X \in E(X,\sigma)$ if and only if $\sigma = \triangle(X)$ where id_X is the identity mapping on X.*
(2) *If σ and ρ are equivalence relations on X with $\rho \subseteq \sigma$, then $E(X,\sigma) \subseteq E(X,\rho)$.*
(3) *$E(X,\sigma) = T(X,\sigma)$ if and only if $\sigma = \triangle(X)$. If this is the case, then $E(X,\sigma) = T(X)$.*

J. Sanwong and W. Sommanee [6] introduced and studied the subsemigroup

$$T(X,Y) = \{\alpha \in T(X) : X\alpha \subseteq Y\}$$

of $T(X)$ where $\emptyset \neq Y \subseteq X$. We establish an embedding theorem for the semigroup $E(X,\sigma)$ into the semigroup $T(Y,Z)$.

Proposition 1.2. *Let σ be an equivalence relation on a set X. Every semigroup $E(X,\sigma)$ is embeddable in a semigroup $T(Y,Z)$ for some sets Y and Z with $Z \subseteq Y$.*

Proof. Let $Y = \sigma$ and $Z = \triangle(X)$. Then $Z \subseteq Y$. For each $\alpha \in E(X,\sigma)$, we define $\beta_\alpha \in T(Y)$ by

$$(x,y)\beta_\alpha = (x\alpha, y\alpha) \text{ for all } (x,y) \in Y.$$

Since $\alpha \in E(X,\sigma)$, it then follows that $Y\beta_\alpha \subseteq Z$. Hence $\beta_\alpha \in T(Y,Z)$. Define $\phi : E(X,\sigma) \to T(Y,Z)$ by

$$\alpha\phi = \beta_\alpha \text{ for all } \alpha \in E(X,\sigma).$$

Let $\alpha_1, \alpha_2 \in E(X,\sigma)$. To show that $\beta_{\alpha_1\alpha_2} = \beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2}$, let $(x,y) \in Y$. Then

$$(x,y)\beta_{\alpha_1\alpha_2} = (x\alpha_1\alpha_2, y\alpha_1\alpha_2) = (x\alpha_1, y\alpha_1)\beta_{\alpha_2} = (x,y)\beta_{\alpha_1}\beta_{\alpha_2}.$$

Hence ϕ is a homomorphism. Suppose that $\alpha_1\phi = \alpha_2\phi$. Then $\beta_{\alpha_1} = \beta_{\alpha_2}$. If $x \in X$, then $(x,x) \in Y$ and

$$(x\alpha_1, x\alpha_1) = (x,x)\beta_{\alpha_1} = (x,x)\beta_{\alpha_2} = (x\alpha_2, x\alpha_2).$$

Hence $x\alpha_1 = x\alpha_2$ for all $x \in X$ which implies that ϕ is injective.
Therefore the theorem is proved. □

Over the past, isomorphism theorems for semigroups have been widely considered, see [1,2,5,7]. The purpose of this paper is to find necessary and sufficient conditions for two transformation semigroups restricted by a equivalence in order to be isomorphic.

2. Main results

For the fixed equivalence relation σ on a set X and $a \in X$, we write $a\sigma$ for the set of all elements of X that are equivalent to a, that is, $a\sigma = \{x \in X : (a, x) \in \sigma\}$.

To obtain the main result, the following two lemmas are needed.

Lemma 2.1. *Let $\alpha \in E(X,\sigma)$. Then α is a right zero element of $E(X,\sigma)$ if and only if α is constant.*

Proof. It is clear that if α is constant, then $\beta\alpha = \alpha$ for all $\beta \in E(X,\sigma)$.

Suppose that α is nonconstant. Then there exist distinct elements $a, b \in X\alpha$. Thus $a'\alpha = a$ and $b'\alpha = b$ for some $a', b' \in X$. Since $\alpha \in E(X,\sigma)$ and $a'\alpha \neq b'\alpha$, we deduce that $(a', b') \notin \sigma$. Define $\beta \in T(X)$ by

$$x\beta = \begin{cases} a', & \text{if } x \in b'\sigma, \\ b', & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $x \in X$. It is clear that $\beta \in E(X,\sigma)$. Since $b'\beta\alpha = a'\alpha = a$ and $b'\alpha = b$, it follows that $\beta\alpha \neq \alpha$. Consequently, α is not a right zero element of $E(X,\sigma)$. □

Hence the corollary is an immediate consequence of Lemma 2.1.

Corollary 2.2. *$E(X,\sigma)$ is a right zero semigroup if and only if $\sigma = X \times X$.*

Proof. Suppose that $\sigma \neq X \times X$. Then there exist $a, b \in X$ such that $(a, b) \notin \sigma$. Thus $a \neq b$. Define $\alpha \in E(X,\sigma)$ by

$$x\alpha = \begin{cases} a, & \text{if } x \in a\sigma, \\ b, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $x \in X$. Then α is nonconstant in $E(X,\sigma)$. By Lemma 2.1, α is not a right zero element of $E(X,\sigma)$.

Conversely, assume that $\sigma = X \times X$. Then the semigroup $E(X,\sigma)$ consists of all constant mappings in $T(X)$. By Lemma 2.1, $E(X,\sigma)$ is a right zero semigroup. □

Lemma 2.3. *Let $\alpha_1, \alpha_2 \in E(X,\sigma)$ and $a \in X$. If $a\alpha_1\beta = a\alpha_2\beta$ for all $\beta \in E(X,\sigma)$, then $(a\alpha_1, a\alpha_2) \in \sigma$.*

Proof. Suppose that $(a\alpha_1, a\alpha_2) \notin \sigma$. Then $a\alpha_1 \neq a\alpha_2$. Define $\beta \in T(X)$ by

$$x\beta = \begin{cases} a\alpha_1, & \text{if } x \in (a\alpha_1)\sigma, \\ a\alpha_2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $x \in X$. It is easy to see that $\beta \in E(X,\sigma)$ and $a\alpha_1\beta \neq a\alpha_2\beta$. □

From now on, suppose that σ_1 and σ_2 are equivalence relations on sets X and Y, respectively. In what follows, $|A|$ means the cardinality of the set A.

Theorem 2.4. *$E(X,\sigma_1)$ and $E(Y,\sigma_2)$ are isomorphic as semigroups if and only if there exists a bijection $\theta : X \to Y$ such that $(x\sigma_1)\theta = (x\theta)\sigma_2$ for all $x \in X$.*

Proof. Assume that $E(X,\sigma_1)$ and $E(Y,\sigma_2)$ are isomorphic. Let $\varphi : E(X.\sigma_1) \to E(Y,\sigma_2)$ be an isomorphism.

For each $a \in X$, we define $\alpha_a \in E(X,\sigma_1)$ by $x\alpha_a = a$ for all $x \in X$. By Lemma 2.1, α_a is a right zero element of $E(X,\sigma_1)$ and hence

$$\alpha_a\varphi = (\beta\alpha_a)\varphi = (\beta\varphi)(\alpha_a\varphi) \text{ for all } \beta \in E(X,\sigma_1).$$

Since φ is a bijection, we deduce that $\alpha_a\varphi$ is a right zero element of $E(Y,\sigma_2)$. Then from Lemma 2.1, there exists a unique $y_a \in Y$ such that $y(\alpha_a\varphi) = y_a$ for all $y \in Y$.

Define $\theta : X \to Y$ by

$$x\theta = y_x \quad \text{for all } x \in X.$$

Clearly, θ is well-defined. Let $x_1, x_2 \in X$ be such that $x_1\theta = x_2\theta$. Then $y_{x_1} = y_{x_2}$ which implies that $\alpha_{x_1}\varphi = \alpha_{x_2}\varphi$. Since φ is injective, it follows that $\alpha_{x_1} = \alpha_{x_2}$ and hence $x_1 = x_2$. This shows that α is injective.

To show that θ is surjective, let $y \in Y$. Then there exists $\beta_y \in E(Y,\sigma_2)$ such that $z\beta_y = y$ for all $z \in Y$. Since φ^{-1} is an isomorphism and β_y is a right zero of $E(Y,\sigma_2)$, it follows that $\beta_y\varphi^{-1}$ is a right zero of $E(X,\sigma_1)$. Then there exists an element $x' \in X$ such that $w(\beta_y\varphi^{-1}) = x' = w\alpha_{x'}$ for all $w \in X$. Since $\alpha_{x'}\varphi = \beta_y\varphi^{-1}\varphi = \beta_y$, we have $y_{x'} = y$. Therefore $x'\theta = y$ and whence θ is surjective.

Finally, we will show that $(x\sigma_1)\theta = (x\theta)\sigma_2$ for all $x \in X$. Let $x \in X$ and $a \in (x\sigma_1)\theta$. Then $a = b\theta$ for some $b \in x\sigma_1$ and thus $(x,b) \in \sigma_1$. It follows that $\alpha_x\beta = \alpha_b\beta$ for all $\beta \in E(X,\sigma_1)$. Since φ is a homomorphism,

$$(\alpha_x\varphi)(\beta\varphi) = (\alpha_x\beta)\varphi = (\alpha_b\beta)\varphi = (\alpha_b\varphi)(\beta\varphi)$$

for all $\beta \in E(X,\sigma_1)$. Since φ is a bijection, it follows that

$$(\alpha_x\varphi)\gamma = (\alpha_b\varphi)\gamma \text{ for all } \gamma \in E(Y,\sigma_2).$$

We note here that if $y \in Y$, then $y(\alpha_x\varphi)\gamma = y(\alpha_b\varphi)\gamma$ for all $\gamma \in E(Y,\sigma_2)$. By Lemma 2.3, we obtain that $(y(\alpha_x\varphi), y(\alpha_b\varphi)) \in \sigma_2$. Since $(y(\alpha_x\varphi), y(\alpha_b\varphi)) = (y_x, y_b) = (x\theta, b\theta) = (x\theta, a)$, we deduce $a \in (x\theta)\sigma_2$. This proves that $(x\sigma_1)\theta \subseteq (x\theta)\sigma_2$. For the reverse inclusion, let $c \in (x\theta)\sigma_2$. Then $(c, x\theta) \in \sigma_2$. Since θ is surjective, $c = d\theta$ for some $d \in X$. It follows that $(\alpha_x\varphi)\beta = (\alpha_d\varphi)\beta$ for all $\beta \in E(Y,\sigma_2)$. Since φ^{-1} is a homomorphism,

$$((\alpha_x\varphi)\varphi^{-1})(\beta\varphi^{-1}) = (\alpha_x\varphi\beta)\varphi^{-1} = (\alpha_d\varphi\beta)\varphi^{-1} = ((\alpha_d\varphi)\varphi^{-1})(\beta\varphi^{-1})$$

for all $\beta \in E(Y,\sigma_2)$. It follows from the bijection of φ^{-1} that

$$d\alpha_x\gamma = d(\alpha_x\varphi)\varphi^{-1}\gamma = d(\alpha_d\varphi)\varphi^{-1}\gamma = d\alpha_d\gamma$$

for all $\gamma \in E(X,\sigma_1)$. By Lemma 2.3, we deduce that $(x,d) = (d\alpha_x, d\alpha_d) \in \sigma_1$, thus $d \in x\sigma_1$. This means that $c = d\theta \in (x\sigma_1)\theta$. Hence $(x\theta)\sigma_2 \subseteq (x\sigma_1)\theta$ and the equality holds.

Conversely, suppose that $\theta : X \to Y$ is a bijection such that $(x\sigma_1)\theta = (x\theta)\sigma_2$ for all $x \in X$. Define $\varphi : E(X,\sigma_1) \to E(Y,\sigma_2)$ by

$$\alpha\varphi = \theta^{-1}\alpha\theta \text{ for all } \alpha \in E(X,\sigma_1).$$

Let $\alpha \in E(X,\sigma_1)$. To show that $\alpha\varphi \in E(Y,\sigma_2)$, let $(x,y) \in \sigma_2$. Since θ is surjective, we have $x'\theta = x$ and $y'\theta = y$ for some $x', y' \in X$. By assumption, we then have $y'\theta \in (x'\theta)\sigma_2 = (x'\sigma_1)\theta$ which implies that $(y',x') \in \sigma_1$. Since $\alpha \in E(X,\sigma_1)$, it follows that $y'\alpha = x'\alpha$. Therefore

$$x\alpha\varphi = x\theta^{-1}\alpha\theta = x'\alpha\theta = y'\alpha\theta = y\theta^{-1}\alpha\theta = y\alpha\varphi.$$

This shows that $\alpha\varphi \in E(Y,\sigma_2)$, whence φ is well-defined. Let $\alpha_1, \alpha_2 \in E(X,\sigma_1)$. We see that

$$\begin{aligned}(\alpha_1\alpha_2)\varphi &= \theta^{-1}(\alpha_1\alpha_2)\theta \\ &= (\theta^{-1}\alpha_1\theta)(\theta^{-1}\alpha_2\theta) \\ &= (\alpha_1\varphi)(\alpha_2\varphi).\end{aligned}$$

Therefore φ is a homomorphism. It is easy to verify that φ is bijective. □

The theorem is thereby proven.

Corollary 2.5. *For positive integers m and n, let X and Y be sets such that $|X| = |Y| = n$ and $|X/\sigma_1| = |Y/\sigma_2| = m$. If $m \in \{1, n-1, n\}$, then $E(X,\sigma_1) \cong E(Y,\sigma_2)$.*

Proof. Suppose that $m \in \{1, n-1, n\}$. Since $|X| = |Y|$, there exists a bijection $\theta : X \to Y$.

Case 1. $m = 1$. Then $\sigma_1 = X \times X$ and $\sigma_2 = Y \times Y$. Thus $(x\sigma_1)\theta = X\theta = Y = (x\theta)\sigma_2$ for all $x \in X$.

Case 2. $m = n$. Then $\sigma_1 = \triangle(X)$ and $\sigma_2 = \triangle(Y)$. Thus $(x\sigma_1)\theta = (x\theta)\sigma_2$ for all $x \in X$.

Case 3. $m = n-1$. Then there exists a unique $a_1\sigma_1 \in X/\sigma_1$ such that $|a_1\sigma_1| = 2$ for some $a_1 \in X$, say that $a_1\sigma_1 = \{a_1, a_2\}$ for some $a_2 \in X$. Similarly, $\{b_1, b_2\} \in Y/\sigma_2$ for some $b_1, b_2 \in Y$. Thus

$$x\sigma_1 = \{x\} \text{ for all } x \in X \setminus \{a_1, a_2\}$$

and

$$y\sigma_2 = \{y\} \text{ for all } y \in Y \setminus \{b_1, b_2\}.$$

Since $|X \setminus \{a_1,a_2\}| = |Y \setminus \{b_1,b_2\}|$, there exists $\varphi : X \setminus \{a_1,a_2\} \to Y \setminus \{b_1,b_2\}$ is a bijection. Define $\theta : X \to Y$ by

$$x\theta = \begin{cases} b_i, & \text{if } x = a_i, \\ x\varphi, & \text{otherwise} \end{cases}$$

for all $x \in X$. It is clear that θ is a bijection and each element x in X, $(x\sigma_1)\theta = (x\theta)\sigma_2$.

From the three cases above, $E(X,\sigma_1) \cong E(Y,\sigma_2)$ by Theorem 2.4. □

Note that if $|X| \leq 3$ and σ is an equivalence on X, then $|X/\sigma| \in \{1,2,3\}$. The following corollary is a direct consequence of Corollary 2.5 and Theorem 2.4.

Corollary 2.6. *Let X and Y be sets such that $|X| = |Y| \leq 3$. Then $E(X,\sigma_1) \cong E(Y,\sigma_2)$ if and only if $|X/\sigma_1| = |Y/\sigma_2|$.*

References

[1] P. Jitjankarn and T. Rungratgasame, *A note on isomorphism theorems for semigroups of order-preserving transformations with restricted range*, Int. J. Math. Math. Sci. **2015** (2015), Art. ID 187026, 6 pp.

[2] Y. Kemprasit, W. Mora, and T. Rungratgasame, *Isomorphism theorems for semigroups of order-preserving partial transformations*, Int. J. Algebra 4 (2010), no. 17-20, 799–808.

[3] S. Mendes-Gonçalves and R. P. Sullivan, *Semigroups of transformations restricted by an equivalence*, Cent. Eur. J. Math. 8 (2010), no. 6, 1120–1131.

[4] H. Pei, *Regularity and Green's relations for semigroups of transformations that preserve an equivalence*, Comm. Algebra 33 (2005), no. 1, 109–118.

[5] T. Saitô, K. Aoki, and K. Kajitori, *Remarks on isomorphisms of regressive transformation semigroups*, Semigroup Forum 53 (1996), no. 1, 129–134.

[6] J. Sanwong and W. Sommanee, *Regularity and Green's relations on a semigroup of transformations with restricted range*, Int. J. Math. Math. Sci. 2008 (2008), Art. ID 794013, 11 pp.

[7] A. Umar, *Semigroups of order-decreasing transformations: the isomorphism theorem*, Semigroup Forum 53 (1996), no. 2, 220–224.

Chaiwat Namnak
Department of Mathematics
Faculty of Science
Naresuan University
Phitsanulok 65000, Thailand
Email address: chaiwatn@nu.ac.th

Nares Sawatraksa
Department of Mathematics
Faculty of Science
Naresuan University
Phitsanulok 65000, Thailand
Email address: naress58@nu.ac.th

If you can not read the page properly please visit http://www.scienceasia.org/manuscript/letter/index.php?ms=&topic_ms=28

ScienceAsia

NRCT

July 24, 2018

Mr. Nares Sawatraksa
Department of Mathematics, Faculty of Science, Naresuan University, Phitsanulok 65000
Thailand
naress58@nu.ac.th, naress58@nu.ac.th

Re: Acceptance for MS 2017-0050

Dear Mr. Nares Sawatraksa,

I am pleased to inform you that your manuscript (code 2017-0050) entitled **On a generalization of transformation semigroups that preserve equivalences** by Nares Sawatraksa,Chaiwat Namnak, submitted on January 25, 2017 has been considered to be accepted for publication in *ScienceAsia*. However, this letter is not an ACCEPTANCE LETTER. Prior to issuing a formal ACCEPTANCE LETTER, we would like to remind you that papers recommended to be published in ScienceAsia are required to pay for publication fee of 10,000 baht. Life-time members of the Science Society of Thailand (proof required) are eligible for a 50% discount (5,000 baht). The charges exclude printing of graphics or figures in full colour which will cost an additional of 15,000 baht per paper. Printing of graphics in full colour is optional and is at the author's discretion. In all cases, the payment must be settled soon after the authors have been notified that the paper is recommended to be published. Delay in receiving the publication fee from you may mean that the journal will have to postpone the publication of your article.

Please also be informed that the publication fee excludes tax or bank charge which has to be borne by the payee. Kindly transfer the publication charge to the following account:

Account Name: SCIENCEASIA
Account No. 026-432206-6
Bank: THE SIAM COMMERCIAL BANK PLC.
Branch: RAMATHIBODI BRANCH
Address: 270 RAMA 6 RD., PHAYATHAI, RATCHATHEWI, BANGKOK, THAILAND 10400.
TEL. +66-2-644 7400-18
SWIFT CODE: SICOTHBK

and return the completed form of pay-in slip to:

Ms. Rachada Sirawaraporn
ScienceAsia Office,
Centre of Excellence for Vectors and Vector-Borne Diseases, 2nd Floor, Science Building 2,
Faculty of Science, Mahidol University, Salaya Campus
999 Phuttamonthon 4 Road, Nakhon Pathom 73170, Thailand.
Tel:+662 441 9816-20 Ext.1185 Fax: +662 441 0227
E-mail: editor@scienceasia.org

In the meantime, you can download the copyright form from http://www.scienceasia.org/copyrightform1.pdf, print it out, sign it, and send it to us by post as soon as possible. If you fax or email the form to us, we still need you to mail the original to us as well.

It is possible that we will contact you again with minor queries about your manuscript before we send you the proof version. Please inform us promptly if there are any changes in your contact details.

Thank you for choosing to publish with *ScienceAsia*.

Yours sincerely,
Prof. Worachart Sirawaraporn
Editor, *ScienceAsia*

EDITORIAL OFFICE: c/o Centre of Excellence for Vectors and Vector-Borne Diseases, 2nd Floor, Science Building 2,
Faculty of Science, Mahidol University, Salaya Campus
999 Phuttamonthon 4 Road, Nakhon Pathom 73170 Thailand
Tel:+662 441 9816-20 Ext.1185 Fax: +662 441 0227
E-mail: editor@scienceasia.org, worachart.sir@mahidol.ac.th

ประวัติผู้วิจัย

ประวัติคณะผู้วิจัย

1. **ชื่อ – นามสกุล** (ภาษาไทย) นาย ชัยวัฒน์ นามนาค
   (ภาษาอังกฤษ) Mr. Chaiwat Namnak

หมายเลขบัตรประจำตัวประชาชน 3 6599 00173 537

ตำแหน่งปัจจุบัน รองศาสตราจารย์ อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

สถานที่ติดต่อ

ที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

โทรศัพท์ 055-963201 ต่อ 3213 โทรสาร 055-963201

โทรศัพท์เคลื่อนที่ 081-374-2008 E – mail : chaiwatn@nu.ac.th

ประวัติการศึกษา

ปีการศึกษา	คุณวุฒิ	สถาบันการศึกษา
2545	วิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประเทศไทย
2540	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประเทศไทย
2536	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ (วท.บ. เกียรตินิยมอันดับหนึ่ง)	มหาวิทยาลัยนเรศวร ประเทศไทย

ประสบการณ์การทำวิจัย (ในตำแหน่งหัวหน้าโครงการ)

ปีงบประมาณ	โครงการ	แหล่งทุน	สถานะการดำเนินงาน
2555	โครงการวิจัยเรื่อง “ความปรกติและความสัมพันธ์ของกรีนบนกึ่งกรุปการแปลงถดถอย”	ทุนอุดหนุนการวิจัยจากเงินรายได้มหาวิทยาลัย ประจำปี 2555	ปิดโครงการ
2555	โครงการทุนวิจัยพัฒนาการเรียนการสอน และนวัตกรรมทางการศึกษา ประจำปีการศึกษา ๒๕๕๕ เรื่อง “วัตถุการเรียนรู้ด้วยตนเองในรายวิชา ๒๕๒๒๒๓ ทฤษฎีจำนวน”	ทุนวิจัยพัฒนาการเรียนการสอน และนวัตกรรมทางการศึกษา ประจำปีการศึกษา ๒๕๕๕ ของคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร	ปิดโครงการ
2556	โครงการวิจัยเรื่อง “ความสัมพันธ์ของกรีนและอันดับบางส่วนธรรมชาติบนกึ่งกรุปของการแปลงรักษาความสัมพันธ์สมมูลในตัว”	ทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณรายได้มหาวิทยาลัย ประจำปี 2556	ปิดโครงการ

สาขาวิชาที่เชี่ยวชาญ คณิตศาสตร์บริสุทธิ์ สาขาวิชาทฤษฎีกึ่งกรุป

ภาระงานในปัจจุบัน อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารระดับชาติ

1. C. Namnak and C. Thuankhuntod, 2005, Regularity conditions on generalized transformation semigroups, Thai Journal of Mathematics Special Issue (2005), pp. 21-31

2. C. Namnak and P. Preechasilp, 2006, Natural partial orders on the semigroup of binary relations, Thai Journal of Mathematics Special Issue (Annual Meeting in Mathematics, 2006), pp. 39-50

3. E. Laysirikul and C. Namnak, 2012, Regularity conditions for

semigroups of transformations that preserve double direction equivalence, Proceedings of the AMM 2012, pp. 155-160.

4. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Right regular and left regular elements of order preserving transformation semigroups, Proceedings of the 5th Science Research Conference, pp. MS 50-53.

5. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Right regular and left regular elements of order preserving transformation semigroups, Proceedings of the 5th Science Research Conference, pp. MS 50-53.

6. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Right regular and left regular elements of order preserving transformation semigroups, Proceedings of the 5th Science Research Conference, pp. MS 50-53.

7. C. Namnak and N. Sawatraksa, 2015, Natural partial order for semigroups of transformations that preserve order and a contraction, Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2015, pp. 125-130.

8. E. Laysirikul, C. Namnak and P. Tangtong, 2016, Separativity Conditions on Partial Transformation Semigroups, Proceedings of the 38th National Graduate Research Conference, STP-104, pp. 366-371.

ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

1. E. Laysirikul and C. Namnak, 2012, A note on the regularity for semigroups of self-E-preserving transformations, Proceedings: 1st ASEAN Plus Three Graduate Research Congress 2012, pp. ST 164-167.

2. C. Namnak, 2012, A note on the natural partial order of the multiplicative semigroup of Zn, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol.7 No.32, pp. 1569 – 1577.

3. C. Namnak and E. Laysirikul, 2012, Regularity and Green's relations for the full regressive transformation semigroups, International Journal of Algebra Vol.6 No.19, pp. 919 – 924

4. C. Namnak and E. Laysirikul, 2012, Remarks on E-order-preserving transformation semigroups, International Mathematical Forum, Vol.7 No. 47, pp. 2302 – 2307.

5. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Regularity for semigroups of transformations that preserve equivalence, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, Vol.28, Number 1, 2013, pp. 97 - 105

6. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Right regular and left regular elements of E-order-preserving transformation semigroups, International Journal of Algebra, Vol. 7 No. 6, pp. 289 – 296.

7. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Natural partial order on a semi group of self-E-preserving transformations, Scientific Research and Essays, Vol. 8(1), pp. 39–42

8. C. Namnak and E. Laysirikul, 2013, Some subsemigroups of the full transformation semigroups, ScienceAsia 39, No. 3, pp. 316–318

2. ชื่อ – นามสกุล (ภาษาไทย) นาย นเรศ สวัสดิ์รักษา

(ภาษาอังกฤษ) Mr. Nares Sawatraksa

หมายเลขบัตรประจำตัวประชาชน 1640600166701

ตำแหน่งปัจจุบัน นิสิตปริญญาเอก สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

สถานที่ติดต่อ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : naress58@nu.ac.th

ประวัติการศึกษา

ปีการศึกษา	คุณวุฒิ	สถาบันการศึกษา
2557	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยนเรศวร ประเทศไทย
2555	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยนเรศวร ประเทศไทย

ผลงานวิจัย

ก. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารระดับชาติ

C. Namnak and N. Sawatraksa, 2015, Natural partial order for semigroups of transformations that preserve order and a contraction, Annual Pure and Applied Mathematics Conference 2015, pp. 125-130.

C. Namnak, E. Laysirikul and N. Sawatraksa, 2017, Natural partial order on the semigroups of partial Isometries of a finite chain, Thai Journal of Mathematics: 97-108 Special Issue: Annual Meeting in Mathematics 2017

3. **ชื่อ – นามสกุล** (ภาษาไทย) นายปุญญพัฒน์ คำหมู่
(ภาษาอังกฤษ) Mr. Punyapat Kammoo

หมายเลขบัตรประจำตัวประชาชน 1659900849038

ตำแหน่งปัจจุบัน นิสิตปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

สถานที่ติดต่อ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

E-mail : Poon_yapat@hotmail.com