การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

ANALYSIS OF CIRCULAR CROSS-SECTION APERTURE ANTENNAS

นางสาวเนริสา แท่งทอง รหัส 51364385

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

ปีการศึกษา 2554

ใบรับรองปริญญานิพนธ์

ชื่อหัวข้อโครงงาน การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

ผู้ดำเนินโครงงาน นางสาวเนริสา แท่งทอง รหัส 51364385

ที่ปรึกษาโครงงาน ดร.ชัยรัตน์ พินทอง

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

ภาควิชา วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์

ปีการศึกษา 2554

คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร อนุมัติให้ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

....ที่ปรึกษาโครงงาน
(ดร. ชัยรัตน์ พินทอง)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา)

....กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อัครพันธ์ วงศ์กังแห)

ชื่อหัวข้อโครงงาน	**การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม**
ผู้ดำเนินโครงงาน	**นางสาวเนริสา แท่งทอง รหัส 51364385**
ที่ปรึกษาโครงงาน	**ดร.ชัยรัตน์ พินทอง**
สาขาวิชา	**วิศวกรรมไฟฟ้า**
ภาควิชา	**วิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์**
ปีการศึกษา	**2554**

บทคัดย่อ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาและวิเคราะห์เกี่ยวกับคุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิดซึ่งจะเน้นการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม โดยศึกษาในตัวอย่างของช่องเปิดบนระนาบดินไม่จำกัด ที่มีการกระจายคงรูปและแบบแผนคลื่น การวิเคราะห์จะใช้หลักการสมมูลและการประมาณในย่านสนามไกล ทำให้ได้สนามที่ครอบคลุมบริเวณด้านหน้าของช่องเปิด ผลลัพธ์ที่ได้แสดงถึง ค่าสภาพเจาะจงทิศทาง ระดับพูข้าง และความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังในกรณีช่องเปิดที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} สภาพเจาะจงทิศทางที่ได้จะมีค่าน้อยกว่ากรณีที่สนามมีการกระจายคงรูปในขนาดช่องเปิดเดียวกัน สำหรับระนาบสนามแม่เหล็กที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} ค่า SLL และค่า HPBW ที่ได้นั้นจะมีค่ามากกว่ากรณีที่มีการกระจายตัวแบบคงรูป โครงงานนี้ได้พัฒนาโปรแกรม MATLAB สำหรับสายอากาศชนิดนี้ซึ่งสามารถลดระยะเวลาในการคำนวณและทำให้การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดสะดวกมากยิ่งขึ้น

Project title	Analysis of circular cross-section aperture antennas
Name	Miss. Naerisa Thangthong ID. 51364385
Project advisor	Dr. Chairat Pinthong
Major	Electrical Engineering
Department	Electrical and Computer Engineering
Academic year	2011

Abstract

This project is the study and analysis of the characteristics of aperture antennas focusing on the antenna with a circular cross-section. The examples under consideration are apertures on an infinite ground plane with uniform and TE_{11} -mode distribution. Equivalence principle and far field approximation are applied to find the fields at the front of the aperture. The results show directivity, side lobe level, and half-power beamwidth are shown for both E and H plane. As the dimension of an aperture is larger, the directivity is higher whereas HPBW is reduced. When comparing at the same size of aperture opening, the directivity for TE_{11} - mode is slightly lower than that of uniform distribution.

กิตติกรรมประกาศ

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับเรื่องการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมซึ่งจะไม่มีทางสำเร็จไปได้ถ้าไม่ได้รับการช่วยเหลือจากบุคคลดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ ดร.ชัยรัตน์ พินทอง อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาโครงงานที่ได้ให้ความรู้ ให้คำแนะนำและให้ความช่วยเหลือแก่ผู้จัดทำเป็นอย่างดีตลอดมา

ขอขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรเชษฐ์ กานต์ประชา และ ดร.อัครพันธ์ วงศ์กังแห อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ผู้เป็นกรรมการคุมสอบโครงงานซึ่งเสียสละเวลาในการคุมสอบโครงงานและให้คำแนะนำเป็นอย่างดี

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้กับผู้จัดทำนอกจากนี้ยังต้องขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ สำนักหอสมุด ห้องสมุดคณะวิศวกรรมศาสตร์ และศูนย์บริการเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร (CITCOM) มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ในการสืบค้นเนื้อหาและข้อมูลต่างๆรวมถึงการสืบค้นข้อมูลทางอินเตอร์เน็ตประกอบการทำโครงงาน

เหนือสิ่งอื่นใด ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ผู้มอบความรักความเมตตา สติปัญญา รวมทั้งเป็นผู้ให้ทุกสิ่งทุกอย่างตั้งแต่วัยเยาว์จวบจนถึงปัจจุบัน คอยเป็นกำลังใจทำให้ได้รับความสำเร็จอย่างทุกวันนี้ และขอขอบคุณทุก ๆ คนในครอบครัว ของผู้จัดทำที่ไม่ได้กล่าวไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ท้ายนี้ผู้จัดทำใคร่ขอขอบพระคุณผู้ที่มีส่วนเกี่ยวข้องทุกท่านที่ไม่ได้กล่าวนามมา ณ ที่นี้ที่มีส่วนร่วมในการให้ข้อมูลเป็นที่ปรึกษาในการทำปริญญานิพนธ์ฉบับนี้จนเสร็จสมบูรณ์ ผู้จัดทำจึงขอขอบพระคุณไว้ ณ ที่นี้

นางสาวเนริสา แท่งทอง

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของโครงงาน

สายอากาศช่องเปิดเป็นสายอากาศที่ได้รับความนิยมในย่านความถี่สูงโดยเฉพาะในย่านความถี่ไมโครเวฟ ในการใช้งานเห็นจะ ใช้เป็นตัวป้อนของสายอากาศสะท้อน หรือ ใช้ในอากาศยาน เพราะมีขนาดเล็ก และสามารถติดกับพื้นผิวของตัวยานได้อย่างเหมาะสม สายอากาศประเภทนี้สามารถมีรูปทรงได้หลายลักษณะเช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า วงกลม หรือวงรี รวมถึงสามารถขยายโครงสร้างเป็นสายอากาศปากแตรได้

โครงงานฉบับนี้จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับ คุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิด โดยใช้หลักการสนามสมมูล รวมถึงทฤษฏีแบบแผนคลื่นในท่อนำคลื่น โดยมุ่งเน้นไปที่กลุ่มสายอากาศช่องเปิดรูปวงกลม ซึ่งสามารถประยุกต์กับการใช้งานจริงได้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงงาน

1) เพื่อศึกษาหลักการวิเคราะห์สายอากาศทั่วไป
2) เพื่อศึกษาหลักการสนามสมมูล (Field Equivalence Principle)
3) เพื่อศึกษาคุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

1.3 ขอบเขตของโครงงาน

1) ศึกษาและวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม
2) ศึกษาหลักการสนามสมมูล
3) ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

1.4 ขั้นตอนและแผนการดำเนินงาน

รายละเอียด	ปี 2554							ปี 2555						
	มิ.ย.-ก.ย.				ต.ค.-ธ.ค.			ม.ค.-ก.ค.						
1) ศึกษาหลักการพื้นฐานและวิเคราะห์คุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิด และ หลักการสนามสมมูล														
2) ศึกษาและพัฒนาโปรแกรม MATLAB ที่ใช้ในการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิด														
3) รวบรวมข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิด														
4) สรุปคุณสมบัติและคุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิดและจัดทำเอกสารโครงงาน														

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงงาน

1) สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ มาประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์สายอากาศได้
2) ทราบคุณลักษณะของสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม
3) ได้รับความรู้ในการเขียนโปรแกรม MATLAB สำหรับวิเคราะห์ สายอากาศช่องเปิด

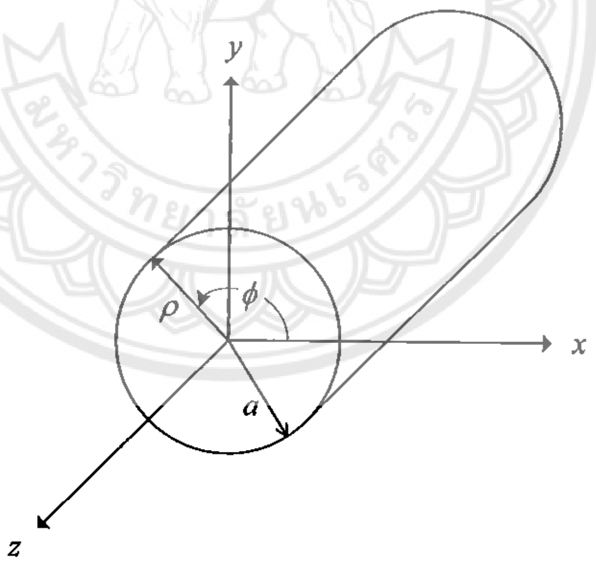
1.6 งบประมาณ

ค่าจัดทำเอกสารและเข้ารูปเล่มโครงงาน	700 บาท
ค่าวัสดุ อุปกรณ์สำนักงาน	200 บาท
อื่นๆ	100 บาท
รวมเป็นเงินทั้งสิ้น (หนึ่งพันบาทถ้วน)	1,000 บาท

หมายเหตุ: ถัวเฉลี่ยทุกรายการ

บทที่ 2
ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

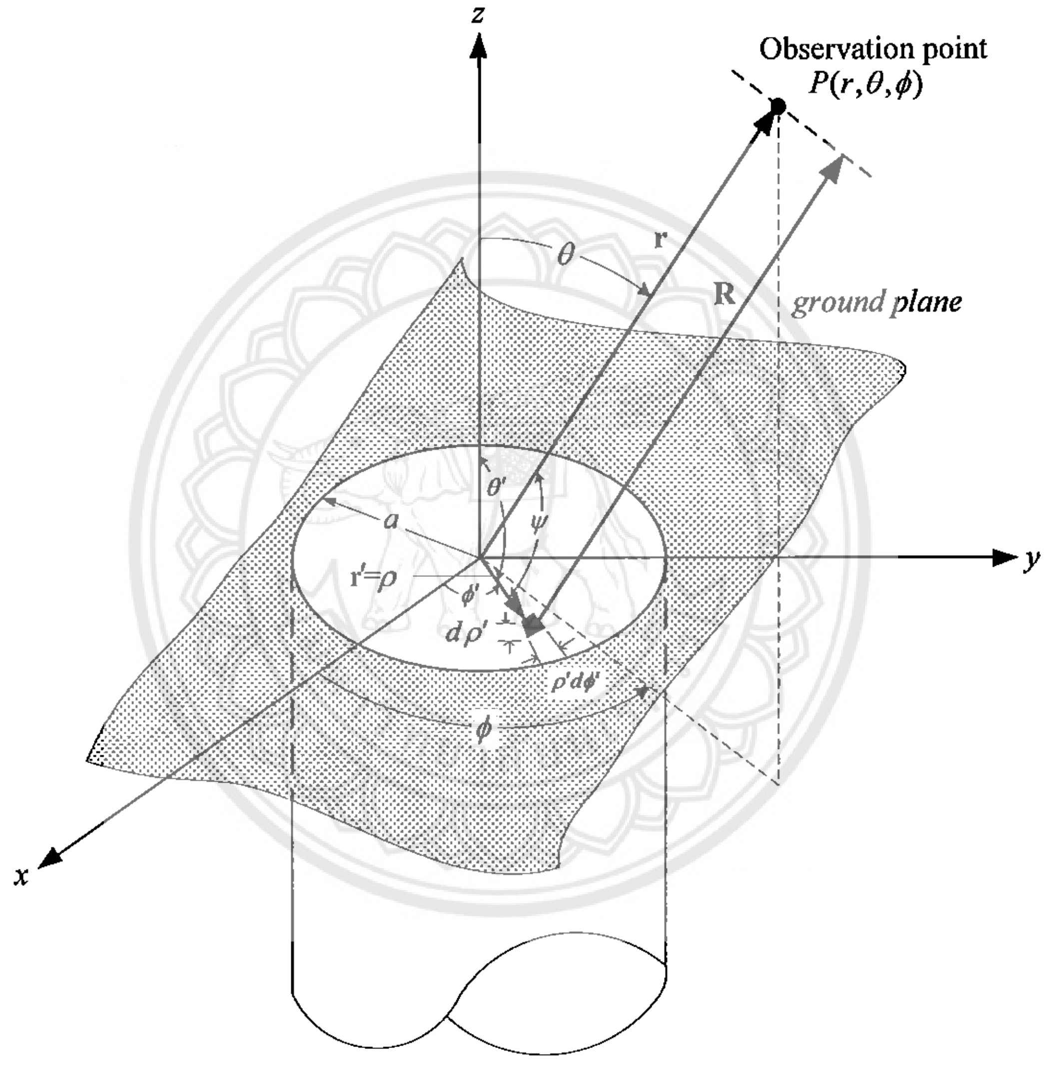
สายอากาศช่องเปิดเป็นสายอากาศที่ติดตั้งได้รับความนิยมใช้งานในย่านความถี่สูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งย่านความถี่ไมโครเวฟ ตัวอย่างการใช้งานในสายอากาศกลุ่มนี้ได้แก่ ใช้เป็นตัวป้อนของสายอากาศสะท้อน หรือ ใช้ในอากาศยาน เพราะมีขนาดเล็ก และสามารถติดกับพื้นผิวของตัวยานได้อย่างกลมกลืน สายอากาศประเภทนี้สามารถมีรูปทรงได้หลายลักษณะเช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัส สี่เหลี่ยมผืนผ้า วงกลม หรือวงรี รวมถึงสามารถขยายโครงสร้างเป็นสายอากาศปากแตรได้ สายอากาศที่จะวิเคราะห์ในที่นี้คือ สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลมที่แสดงในรูปที่ 2.1 แสดงสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม ตามโครงสร้างนี้ปลายข้างหนึ่งจะต่อเข้ากับตัวกำเนิดสัญญาณ ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งจะทำหน้าเป็นสายอากาศ



รูปที่ 2.1 สายอากาศช่องเปิดที่มีหน้าตัดวงกลม

2.1 โครงสร้างของสายอากาศ

โครงสร้างของสายอากาศที่นำมาพิจารณาคือ ช่องเปิดรูปวงกลมติดตั้งบนระนาบดินไม่จำกัด ที่มีรัศมีเท่ากับ a ระนาบช่องเปิดจะทอดตัวไปบนระนาบ x-y โดยที่ จุดสังเกต $P(r, \theta, \phi)$ จะอยู่ในย่านสนามไกล **r** คือเวกเตอร์จากแหล่งกำเนิดไปยังจุดสังเกต และ **R** คือเวกเตอร์สำหรับการประมาณด้วยรังสีขนาน ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ช่องเปิดรูปวงกลมบนระนาบดินไม่จำกัด

2.2 ขั้นตอนในการวิเคราะห์

การวิเคราะห์หาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในย่านสนามไกล สำหรับปัญหาสายอากาศช่องเปิดภาคตัดขวางรูปวงกลม สามารถสรุปเป็นขั้นตอนได้ดังนี้ 1. เลือกพื้นผิวปิดที่ซึ่งมีการปรากฏของความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s$ หรือความหนาแน่นกระแสสมมูล $\mathbf{J}_s$และ $\mathbf{M}_s$ ซึ่งความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s$ เป็นความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าเชิงพื้นผิว (surface current density) ที่มีอยู่ (exist) ตามธรรมชาติ สำหรับความหนาแน่นกระแสสมมูล $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ จะเป็นกระแสที่ไม่ได้มีอยู่ตามธรรมชาติ แต่เป็นกระแสสร้างขึ้นจากทฤษฎีบทคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า กระแสสมมูลเป็นกระแสในทางทฤษฎีซึ่งสร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ และการคำนวณเท่านั้น

2. กำหนดความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s$หรือกระแสสมมูล $\mathbf{J}_s$และ $\mathbf{M}_s$ บนพื้นผิว S โดยอาศัยหลักการสมมูลของเลิฟ ดังที่แสดงในภาคผนวก (ก) ทำให้ได้สมการต่อไปนี้

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 \tag{2.1ก}$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 \tag{2.1ข}$$

โดยที่ $\hat{\mathbf{n}}$ คือ เวคเตอร์หนึ่งหน่วยที่พุ่งเข้าพื้นผิว S

$\mathbf{E}_1$ คือ สนามไฟฟ้าบนพื้นผิว S

$\mathbf{H}_1$ คือ สนามแม่เหล็กบนพื้นผิว S

3. หาค่า $\mathbf{N}_\theta, \mathbf{N}_\phi$, $\mathbf{L}_\theta$ และ $\mathbf{L}_\phi$ โดยใช้สมการ (2.11ก) ถึง (2.11ง)

4. หาค่าสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ ในย่านสนามไกล ณ ตำแหน่ง $P(r,\theta,\phi)$ โดยใช้สมการ (2.22ก) ถึง (2.22ฉ)

โดยขั้นตอน 1- 4 สามารถเขียนเป็นแผนภูมิ ได้ดังนี้

1. เลือกพื้นผิวปิดบนความหนาแน่น กระแส $\mathbf{J}_s$ หรือความหนาแน่นกระแสสมมูล $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$

$\Downarrow$

2. กำหนดความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s$ หรือรูปแบบกระแสสมมูล $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ บนพื้นผิว S

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1$$

$\Downarrow$

3. หาค่า $\mathbf{N}_\theta$, $\mathbf{N}_\phi$, $\mathbf{L}_\theta$ และ $\mathbf{L}_\phi$

$\Downarrow$

4. หาค่าสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$

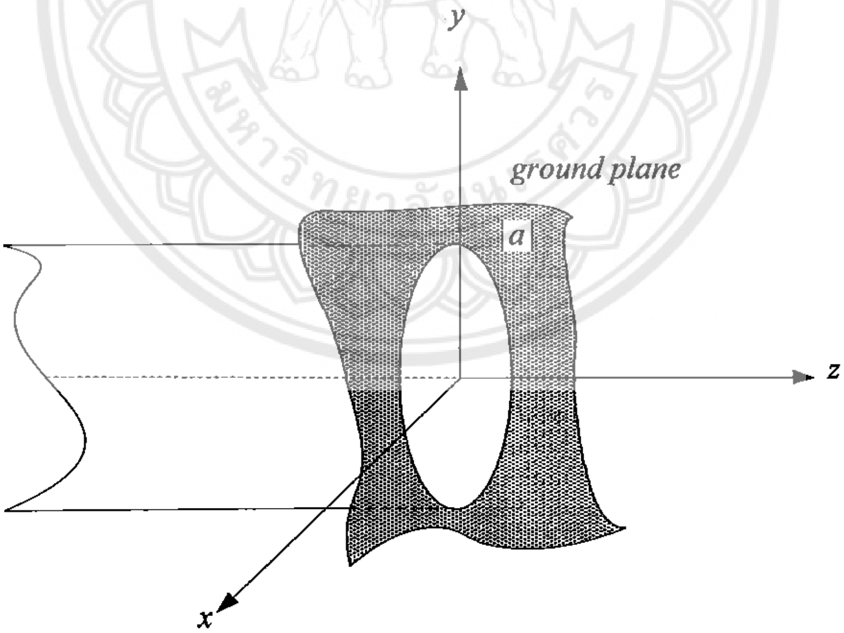
2.3 หลักการสมมูล (Equivalence Principle)

แหล่งกำเนิดพลังงานของสายอากาศซึ่งได้แก่ กระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก จะได้รับการสร้างขึ้นโดยอาศัยหลักการสมมูลดังแสดงรายละเอียดในภาคผนวก (ข) รูป 2.3 แสดงสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมทอดตัวไปตามแนวแกน z ระนาบช่องเปิดอยู่บนระนาบดิน วางตัวบนระนาบ x-y และภาพตัดขวางตามแนวแกนท่อนำคลื่น (axial component) แสดงได้ดังรูป 2.4 (ก)

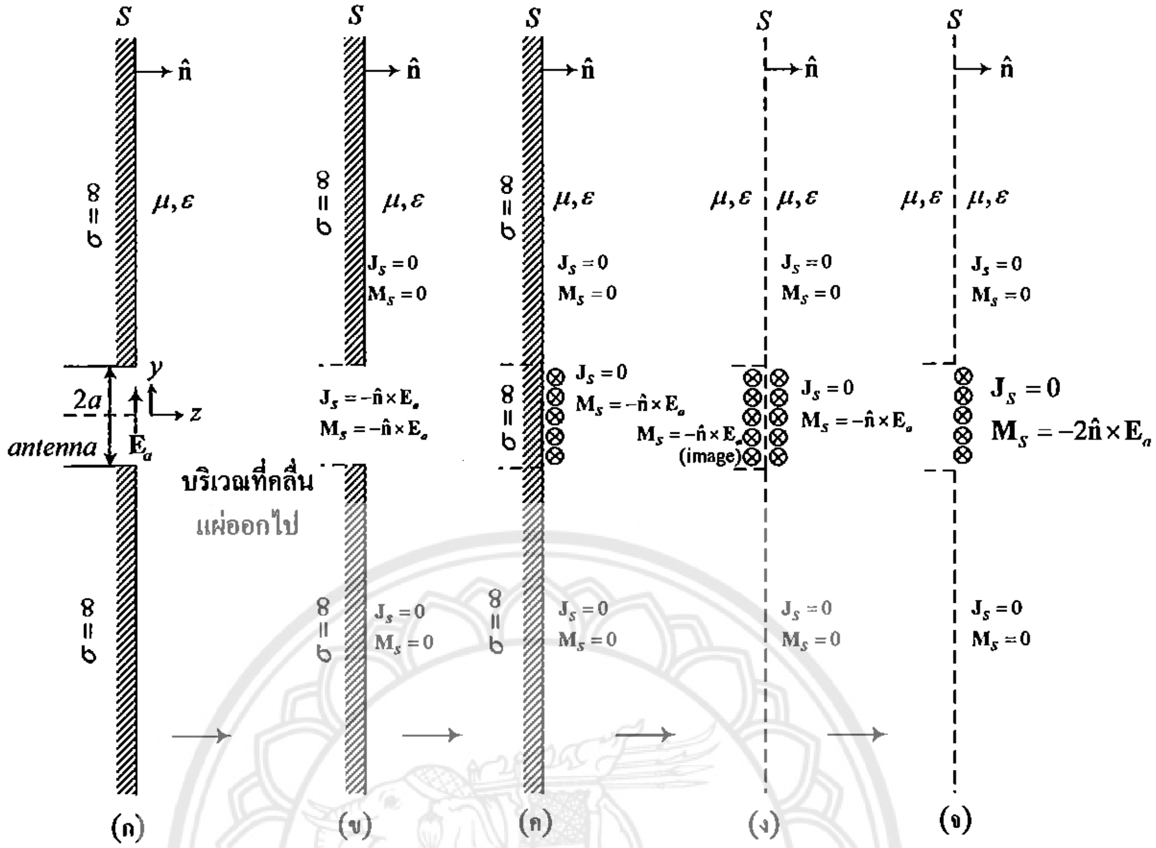
โดยอาศัยหลักการสมมูลพื้นที่ผิวปิดจะได้รับการเลือกให้วางตัวบนระนาบ x-y ที่สอดคล้องกับระนาบของช่องเปิดพื้นผิวปิดจะขยายตัวตั้งแต่ $-\infty$ จนถึง ∞ ทำให้ได้ ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กเป็น

$$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{a}}_x 2E_0 & \rho' \le a \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\mathbf{J}_s = 0 \qquad \text{everywhere}$$



รูปที่ 2.3 สายอากาศช่องเปิดรูปวงกลมวางแกนตามแนวแกน z



รูปที่ 2.4 แบบรูปสมมูลสำหรับสายอากาศช่องเปิดที่ติดตั้งบนระนาบดินไม่จำกัด

2.4 สมการการแผ่พลังงาน (Radiation Equation)

วิธีหนึ่งในการวิเคราะห์ก็คือสนามไฟฟ้า (**E**) และสนามแม่เหล็ก (**H**) จะไม่ได้รับการหาคำตอบโดยตรงจากแหล่งกำเนิด แต่จะหาจากศักย์เชิงเวกเตอร์คู่หนึ่งคือ **A** และ **F** ก่อนโดยอาศัยการอินทิเกรต จากนั้นจึงนำมาหา **E** และ **H** เป็นลำดับถัดไป ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** และ **F** สามารถหาได้จากสมการทั่วไปดังต่อไปนี้

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iint_S \mathbf{J}_s(r')\frac{e^{-jkR}}{R}ds' \tag{2.3}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_S \mathbf{M}_s(r')\frac{e^{-jkR}}{R}ds' \tag{2.4}$$

โดยที่ $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าและการแสแม่เหล็กซึ่งสามารถหาได้จากหลักการสมมูล

ds' คือ พื้นที่ปริมาณน้อยๆบนสายอากาศ

R คือ เวกเตอร์ที่มีทิศจากแหล่งกำเนิดไปยังจุดสังเกต

r' คือ เวกเตอร์ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดพลังงานดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของ R และ r จากรูปที่ 2.5(ก) สามารถเขียนได้

$$R = \left[r^2 + (r')^2 - 2r\hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}' \right]^{1/2} \tag{2.5}$$

สำหรับกรณีที่จุดสังเกต อยู่ในย่านสนามไกล ซึ่งบริเวณนี้เป็นบริเวณที่นิยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาสายอากาศ และเป็นบริเวณที่ได้รับการสนใจ ค่าของ R จะได้รับการประมาณดังนี้

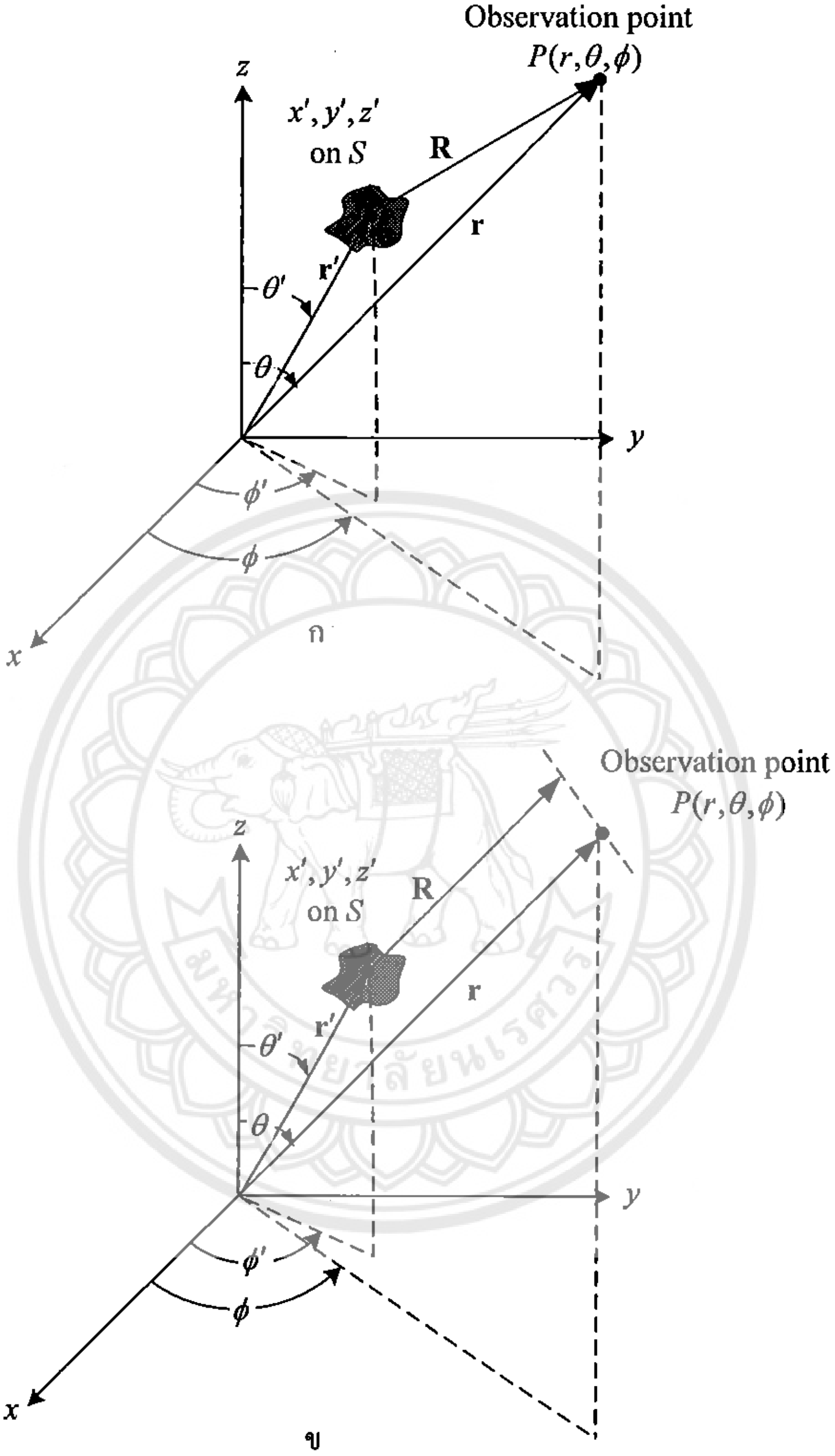
$$R = r - \hat{\mathbf{a}}_{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{r}' \qquad \text{for phase terms} \qquad (2.6ก)$$

$$R = r \qquad \text{for amplitude terms} \qquad (2.6ข)$$

ในการประมาณค่า R สำหรับพจน์เฟสตามสมการ (2.6ก) จะส่งผลให้ $\mathbf{R}$ ขนานกับเวกเตอร์ $\mathbf{r}$ ดังรูปที่ 2.5(ข) การประมาณพจน์เฟสตามสมการ (2.6ก) นี้จึงมีชื่อเรียกว่า การประมาณด้วยรังสีขนาน (parallel ray approximation) เพื่อที่จะให้ความผิดพลาดไม่เกิน 22.5 องศา ระยะการสังเกต r ต้องมีค่าเท่ากับ

$$r \geq \frac{2D^2}{\lambda} \tag{2.7}$$

โดยที่ D คือมิติที่ใหญ่ที่สุดของสายอากาศ



รูปที่ 2.5 ระบบพิกัดสำหรับการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิด (ก) เวกเตอร์ **R** และ **r** ในปัญหาจริง (ข) เวกเตอร์ **R** และ **r** สำหรับการประมาณย่านสนามไกล

การประมาณในข่านสนามไกลตามสมการ (2.7) ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** และ **F** สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iint_{S}\mathbf{J}_{s}\frac{e^{-j\beta R}}{R}ds'\cong\frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}\mathbf{N} \tag{2.8ก}$$

$$\mathbf{F}=\frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_{S}\mathbf{M}_{s}\frac{e^{-j\beta R}}{R}ds'\cong\frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r}\mathbf{L} \tag{2.8ข}$$

สามารถหาเวกเตอร์ **N** และ **L** สามารถหาได้จากความหนาแน่นกระแสเชิงพื้นผิว $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ ดังสมการที่ (2.8ค) และ (2.8ง) ตามลำดับดังนี้

$$\mathbf{N}=\iint_{S}\mathbf{J}_{s}e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds' \tag{2.8ค}$$

$$\mathbf{L}=\iint_{S}\mathbf{M}_{s}e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds' \tag{2.8ง}$$

ถ้าแหล่งกำเนิดได้รับการบ่งในระบบพิกัดฉาก **N** และ **L** สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{N}&=\iint_{S}\mathbf{J}_{s}e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds'\\&=\iint_{S}\left(\hat{\mathbf{a}}_{x}J_{x}+\hat{\mathbf{a}}_{y}J_{y}+\hat{\mathbf{a}}_{z}J_{z}\right)e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds'\end{aligned} \tag{2.9ก}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\iint_{S}\mathbf{M}_{s}e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds'\\&=\iint_{S}\left(\hat{\mathbf{a}}_{x}M_{x}+\hat{\mathbf{a}}_{y}M_{y}+\hat{\mathbf{a}}_{z}M_{z}\right)e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_{r}\cdot\mathbf{r}'}ds'\end{aligned} \tag{2.9ข}$$

องค์ประกอบของกระแสสำหรับปัญหานี้เพื่อให้สอดคล้องกับโครงสร้าง จะได้รับการเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนั้นจึงจำเป็นต้องแปลงกระแสจากในระบบพิกัดทรงกระบอกไปเป็นระบบพิกัดฉากเสียก่อน โดยอาศัยความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}J_x\\J_y\\J_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi' & -\sin\phi' & 0\\ \sin\phi' & \cos\phi' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_\rho\\J_\phi\\J_z\end{bmatrix} \tag{2.10ก}$$

เนื่องจากการแผ่พลังงานในย่านสนามไกลจะให้หน้าคลื่นที่มีลักษณะเป็นทรงกลม จึงจำเป็นต้องเปลี่ยนระบบพิกัดสำหรับการวิเคราะห์หา **N** และ **L** จากระบบพิกัดฉากแต่เดิมไปเป็นระบบพิกัดทรงกลมโดยอาศัยสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad (2.10ข)$$

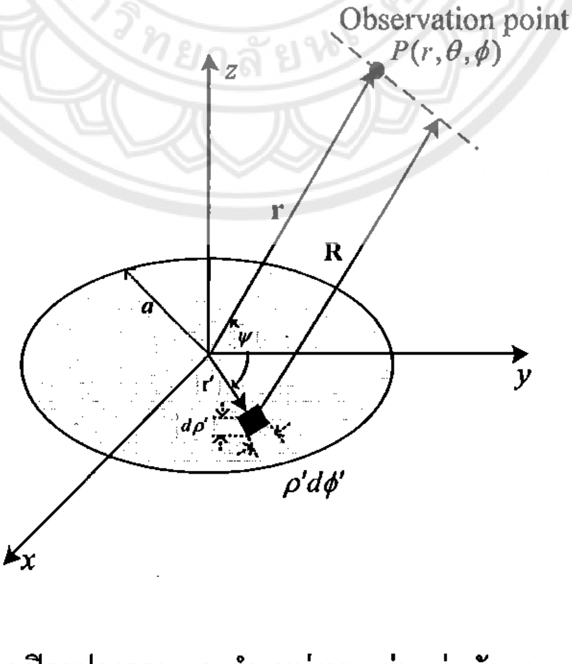
ทำให้ได้ **N** และ **L** ในระบบพิกัดทรงกลม ในรูปของตัวแปร θ และ ϕ ตามที่แสดงในภาคผนวก (ข) คือ

$$N_\theta = \iint_S \left[J_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + J_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') - J_z \sin\theta \right] e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad (2.11ก)$$

$$N_\phi = \iint_S \left[-J_\rho \sin(\phi-\phi') + J_\phi \cos(\phi-\phi') \right] e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad (2.11ข)$$

$$L_\theta = \iint_S \left[M_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + M_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') - M_z \sin\theta \right] e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad (2.11ค)$$

$$L_\phi = \iint_S \left[-M_\rho \sin(\phi-\phi') + M_\phi \cos(\phi-\phi') \right] e^{+j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad (2.11ง)$$



รูปที่ 2.6 ช่องเปิดรูปวงกลม และตำแหน่งบนแผ่นแผ่พลังงานบนระนาบ *xy*

โดยที่พื้นที่ปริมาณน้อยๆ ds' จะสอดคล้องตามโครงสร้างดังรูปที่ 2.6 สามารถเขียนในระบบพิกัดทรงกระบอกได้

$$ds' = \rho' d\rho' d\phi' \tag{2. 12}$$

ความแตกต่างของเส้นทาง (path different) จากแหล่งกำเนิด ถึงจุดสังเกต ซึ่งก็คือ $\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'$ สามารถหาผลคูณแบบจุดได้ง่ายในระบบพิกัดฉาก ดังนี้

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}' = x' \sin\theta \cos\phi + y' \sin\theta \sin\phi \tag{2.13}$$

ตำแหน่งของแหล่งกำเนิดในพิกัดฉาก (x', y') สามารถเขียนในพิกัดทรงกระบอกได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} x' &= \rho' \cos\phi' \\ y' &= \rho' \sin\phi' \end{aligned} \tag{2.14}$$

ดังนั้นความแตกต่างของเส้นทางจากแหล่งกำเนิด ถึงจุดสังเกตในพิกัดทรงกระบอกสามารถเขียนได้

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}' = \sin\theta \cos\phi \rho' \cos\phi' + \sin\theta \sin\phi \rho' \sin\phi' \tag{2.15ก}$$

โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณฯ $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ สมการ (2.15ก) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}' = \rho' \sin\theta \cos(\phi - \phi') \tag{2.15ข}$$

เมื่อทราบศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{A}$ แล้ว สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กที่มีกำเนิดจาก $\mathbf{A}$ ในย่านสนามไกลมีค่าเป็น

$$\mathbf{E}_A \cong -j\omega \mathbf{A}_t \tag{2.16ก}$$

$$\mathbf{H}_A \cong \frac{\hat{\mathbf{a}}_r}{\eta} \times \mathbf{E}_A = j\frac{\omega}{\eta} \hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{A}_t \tag{2.16ข}$$

ซึ่งสามารถเขียนแยกองค์ประกอบได้เป็น

$$(E_A)_r \cong 0 \tag{2.17ก}$$

$$(E_A)_\theta \cong -j\omega A_\theta \tag{2.17ข}$$

$$(E_A)_\phi \cong -j\omega A_\phi \tag{2.17ค}$$

$$(H_A)_r \cong 0 \tag{2.17ง}$$

$$(H_A)_\theta \cong +j\frac{\omega}{\eta}A_\phi = \frac{E_\phi}{\eta} \tag{2.17จ}$$

$$(H_A)_\phi \cong -j\frac{\omega}{\eta}A_\theta = \frac{E_\theta}{\eta} \tag{2.17ฉ}$$

เมื่อทราบศักย์เชิงเวกเตอร์ **F** แล้ว สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กที่มีกำเนิดจาก **F** ในย่านสนามไกลมีค่าเป็น

$$\mathbf{H}_F \cong -j\omega\mathbf{F}_t \tag{2. 18ก}$$

$$\mathbf{E}_F \cong -\eta\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{H}_F = j\omega\eta\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{F}_t \tag{2. 18ข}$$

ซึ่งสามารถเขียนแยกออกได้เป็น

$$(H_F)_r \cong 0 \tag{2. 19ก}$$

$$(H_F)_\theta \cong -j\omega F_\theta \tag{2. 19ข}$$

$$(H_F)_\phi \cong -j\omega F_\phi \tag{2. 19ค}$$

$$(E_F)_r \cong 0 \tag{2. 19ง}$$

$$(E_F)_\theta \cong -j\omega\eta F_\phi = \eta H_\phi \tag{2. 19จ}$$

$$(E_F)_\phi \cong +j\omega\eta F_\phi = -\eta H_\phi \tag{2. 19ฉ}$$

รวมสมการ (2. 17ก) ถึง (2. 17ฉ) กับ (2. 19ก) ถึง (2. 19ฉ) องค์ประกอบของสนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **H** ในย่านสนามไกลมีดังนี้

$$E_r \cong 0 \tag{2.20ก}$$

$$E_\theta \cong (E_A)_\theta + (E_F)_\theta = -j\omega\left[A_\theta + \eta F_\phi\right] \tag{2.20ข}$$

$$E_\phi \cong (E_A)_\phi + (E_F)_\phi = -j\omega\left[A_\phi - \eta F_\theta\right] \tag{2.20ค}$$

$$H_r \cong 0 \tag{2.20ง}$$

$$H_\theta \cong (H_A)_\theta + (H_F)_\theta = +\frac{j\omega}{\eta}\left[A_\phi - \eta F_\theta\right] \tag{2.20จ}$$

$$H_\phi \cong (H_A)_\phi + (H_F)_\phi = -\frac{j\omega}{\eta}\left[A_\theta + \eta F_\phi\right] \tag{2.20ฉ}$$

ศักย์เชิงเวกเตอร์ $\mathbf{A}_\theta$, $\mathbf{A}_\phi$, $\mathbf{F}_\theta$ และ $\mathbf{F}_\phi$ จะสัมพันธ์กับ $\mathbf{N}$ และ $\mathbf{L}$ ตามสมการ (2.8ก) ถึง (2.8ง) ดังนี้

$$A_\theta = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} N_\theta \tag{2.21ก}$$

$$A_\phi = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r} N_\phi \tag{2.21ข}$$

$$F_\theta = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} L_\theta \tag{2.21ค}$$

$$F_\phi = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r} L_\phi \tag{2.21ง}$$

โดยอาศัยสมการ (2.21ก) ถึง (2.21ง) สามารถเขียนได้เป็น

$$E_r \cong 0 \tag{2.22ก}$$

$$E_\theta \cong -\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left(L_\phi + \eta N_\theta\right) \tag{2.22ข}$$

$$E_\phi \cong +\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left(L_\theta - \eta N_\phi\right) \tag{2.22ค}$$

$$H_r \cong 0 \tag{2.22ง}$$

$$H_\theta \cong +\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left(N_\phi - \frac{L_\theta}{\eta}\right) \tag{2.22จ}$$

$$H_\phi \cong -\frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r}\left(N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta}\right) \tag{2.22ฉ}$$

โดยที่ β คือ ค่าคงตัวเฟส (phase constant) ซึ่งก็คือจำนวนเฟสที่เปลี่ยนแปลงเมื่อคลื่นเคลื่อนที่ไปเป็นระยะ 1 เมตร โดยมีค่าตามสมการ

$$\beta = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad \text{rad/m} \tag{2.23}$$

โดยที่ η คือ อิมพิแดนซ์อินทรินซิก (intrinsic impedance) ซึ่งเป็นค่าคงที่ที่แสดงคุณสมบัติทางไฟฟ้ากับแม่เหล็กของตัวกลาง และมีค่าเป็น

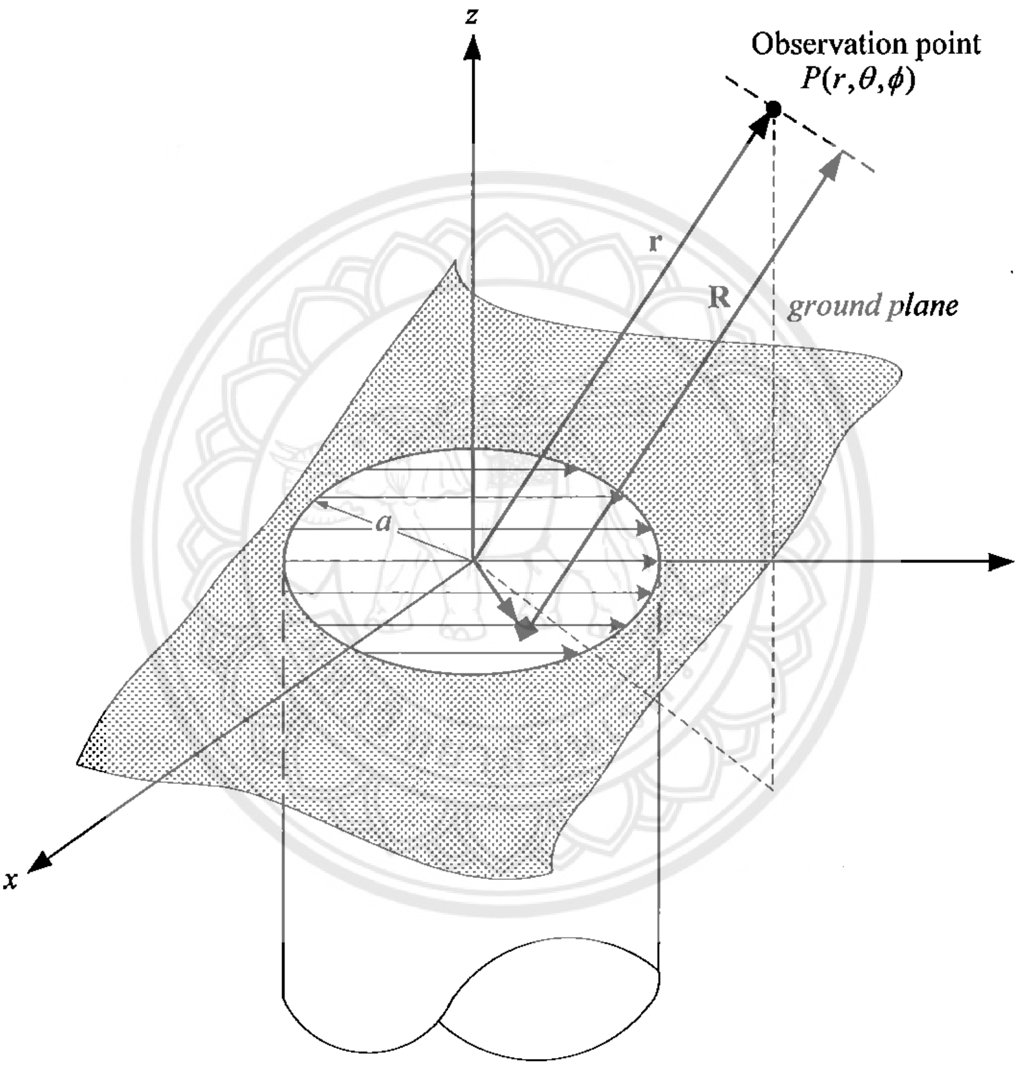
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 120\pi \quad \Omega \tag{2.24}$$

โดยที่ μ_0 คือความซึมซาบได้ (permeability) ของปริภูมิว่าง (free space) ซึ่งมีค่า $4\pi \times 10^{-7}$ H/m

ε_0 คือสภาพยอม (permittivity) ของปริภูมิว่าง (free space) ซึ่งมีค่า 8.854×10^{-12} F/m

2.5 สายอากาศช่องเปิดที่มีการกระจายคงรูปบนระนาบดินไม่จำกัด (Uniform Distribution on an Infinite Ground Plane)

สายอากาศช่องเปิดที่นำมาพิจารณา คือ ช่องเปิดรูปวงกลมติดตั้งบนระนาบดินไม่จำกัด ที่มีรัศมีเท่ากับ a ดังแสดงในรูปที่ 2.7 สนามไฟฟ้าที่อยู่บนช่องเปิดได้รับการสมมติให้เป็นค่าคงที่ กำหนดโดยสมการ



รูปที่ 2.7 ช่องเปิดรูปวงกลมที่มีการกระจายตัวแบบคงรูปบนระนาบดินไม่จำกัด

$$\mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{a}}_y E_0, \quad \rho' \le a, \tag{2.25}$$

เมื่อ E_0 คือ ค่าคงที่ เพื่อที่จะให้ได้สนามในย่านสนาม จำเป็นต้องทราบกระแสสมมติก่อน ซึ่งสามารถหาได้จากหลักการสมมูลที่ได้กล่าวไปแล้วก่อนหน้านี้

2.5.1 สนามที่แผ่ออกไป (Radiation Field)

สนามที่แผ่ออกไปในย่านสนามไกลจากช่องเปิดตามรูปที่ 2.7 สามารถหาได้โดย

$$\mathbf{N}_\theta = \mathbf{N}_\phi = 0 \tag{2.26ก}$$

$$\mathbf{L}_\theta = 2E_0 \cos\theta \cos\phi \int_0^a \rho' \left[\int_0^{2\pi} e^{+jk\rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} d\phi' \right] d\rho' \tag{2.26ข}$$

เนื่องจาก $\int_0^{2\pi} e^{+jk\rho'\sin\theta\cos(\phi-\phi')} d\phi' = 2\pi J_0\left(k\rho'\sin\theta\right)$ จะได้

$$\mathbf{L}_\theta = 4\pi E_0 \cos\theta\cos\phi \int_0^a J_0\left(k\rho'\sin\theta\right)\rho' d\rho' \tag{2.26ค}$$

โดยที่ $J_0(t)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ 0

$$\begin{aligned} t &= k\rho'\sin\theta \\ dt &= k\sin\theta d\rho' \end{aligned} \tag{2.27}$$

โดยใช้ (2.24) ทำให้ได้

$$\mathbf{L}_\theta = \frac{4\pi E_0 \cos\theta\cos\phi}{\left(k\sin\theta\right)^2} \int_0^{ka\sin\theta} tJ_0(t)\,dt \tag{2.28ก}$$

เนื่องจาก $\int zJ_0(z)\,dz = zJ_1(z)\Big|_0^\beta = \beta J_1(\beta)$

โดยที่ $J_1(\beta)$ คือฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับที่ 1 และเขียนได้

$$\mathbf{L}_\theta = 4\pi a^2 E_0 \left\{ \cos\theta\cos\phi \left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right] \right\} \tag{2.28ข}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถหา $\mathbf{L}_\phi$ ได้ ดังสมการ

$$\mathbf{L}_\phi = -4\pi a^2 E_0 \sin\theta \left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta} \right] \tag{2.29}$$

นำสมการ(2.24), (2.28ข), และ (2.29) แทนลงในสมการ (2.21ก)-(2.21ฉ) ทำให้ได้สนามที่แผ่ออกไปโดยช่องเปิด เขียนได้เป็น

$$E_r = 0 \tag{2.30ก}$$

$$E_\theta = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r}\left\{\sin\phi\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]\right\} \tag{2.30ข}$$

$$E_\phi = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r}\left\{\cos\theta\cos\phi\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]\right\} \tag{2.30ค}$$

$$H_r = 0 \tag{2.30ง}$$

$$H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \tag{2.30จ}$$

$$H_\phi = +\frac{E_\theta}{\eta} \tag{2.30ฉ}$$

สมการ (2.30ก) - (2.30ฉ) แสดงการกระจายตัวของสนามที่แผ่ออกไปในย่านสนามไกลโดยช่องเปิด ในการใช้งานส่วนใหญ่ จะนิยมใช้แบบรูปหลักระนาบสนามไฟฟ้า (principal E-plane) และระนาบสนามแม่เหล็ก (principal H -plane) สำหรับโครงสร้างในรูปที่ 2.7 แบบรูประนาบสนามไฟฟ้าอยู่บนระนาบ y-z ($\phi = \pi/2$) และระนาบสนามแม่เหล็กอยู่บนระนาบ x-z ($\phi = 0$) เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

***E*-Plane** $(\phi = \pi/2)$

$$E_r = E_\phi = 0 \tag{2.31ก}$$

$$E_\theta = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r}\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right] \tag{2.31ข}$$

***H*-Plane** $(\phi = 0)$

$$E_r = E_\theta = 0 \tag{2.32ก}$$

$$E_\phi = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r}\left\{\cos\theta\left[\frac{J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]\right\} \tag{2.32ข}$$

2.5.2 สภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity)

สภาพเจาะจงทิศทางเป็นพารามิเตอร์ที่บ่งบอกความสามารถในการส่งหรือรับสัญญาณในทิศทางหนึ่งๆของสายอากาศ สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดสามารถหาได้จากวิธีดังต่อไปนี้

$$D(\theta,\phi)=\frac{U(\theta,\phi)}{U_0}=\frac{4\pi U(\theta,\phi)}{P_{\text{rad}}} \tag{2.33}$$

$$D_{\max}=\frac{U(\theta,\phi)|_{\max}}{U_0}=\frac{U_{\max}}{U_0}=\frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}} \tag{2.34}$$

โดยที่ $D(\theta,\phi)$ คือ สภาพเจาะจงทิศทาง (ไม่มีหน่วย)

$D_{\max}$ คือ สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด

$U(\theta,\phi)$ คือ ความเข้มการแผ่พลังงาน (W/unit solid angle)

$U_{\max}$ คือ ความเข้มการแผ่พลังงานสูงสุด

P_{rad} คือ พลังงานที่แผ่ออกไป (radiated power) (W)

โดยปกติแล้ว พลังงานที่แผ่ออกไป (radiated power) จะคำนวณจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในย่านสนามไกล ซึ่งสนามมีค่าตาม (2.30ก) - (2.30ฉ) การคำนวณดังกล่าวนี้จะมีความยุ่งยากเป็นอย่างมาก เพื่อความสะดวกจะคำนวณจากอีกวิธีหนึ่ง วิธีนี้อาศัยกฎการอนุรักษ์ของพลังงาน ซึ่งก็คือเนื่องจากตัวกลางไม่มีความสูญเสีย (lossless media) พลังงานที่แผ่ออกไปในย่านสนามไกลจึงจะมีค่าเท่ากับพลังงานที่คำนวณจากสนามที่อยู่บนช่องเปิดของสายอากาศ ทำให้ได้พลังงานที่อยู่บนช่องเปิดของสายอากาศมีค่าเป็น

$$P_{\text{rad}}=\frac{|E_0|^2}{2\eta}=\iint_{s_a} ds=\pi a^2\frac{|E_0|^2}{2\eta} \tag{2.35}$$

เมื่อ η คือ อิมพิแดนซ์อินทรินซิก (intrinsic impedance) ของอวกาศว่าง

เพื่อที่จะหาสภาพเจาะจงทิศทาง พารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องทราบนอกเหนือจาก P_{rad} ก็คือความเข้มการแผ่พลังงาน $U(\theta,\phi)$ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับความหนาแน่นพลังงานที่แผ่ออกไปตามสมการต่อไปนี้

$$U(\theta,\phi)=\mathbf{W}_{rad}\cdot\hat{\mathbf{a}}_r r^2 \tag{2.36}$$

เมื่อ

$$\mathbf{W}_{\text{rad}} = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\left(\hat{\mathbf{a}}_\theta E_\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi\right)\times\left(\hat{\mathbf{a}}_\theta H_\theta + \hat{\mathbf{a}}_\phi H_\phi\right)^*\right] \tag{2.37}$$

ทำให้ได้

$$\begin{aligned} U(\theta,\phi) &= \frac{r^2}{2\eta}\left(\left|E_\theta(r,\theta,\phi)\right|^2 + \left|E_\phi(r,\theta,\phi)\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{2\eta}\left(\left|E_\theta^0(\theta,\phi)\right|^2 + \left|E_\phi^0(\theta,\phi)\right|^2\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

โดยที่ E_θ^0 และ E_ϕ^0 คือ สนามไฟฟ้าในแนว θ และ ϕ ซึ่งไม่ขึ้นกับระยะทาง r ในย่านสนามไกล และเป็นสนามที่แผ่ออกจากสายอากาศช่องเปิด

โดยใช้ค่าสนามในสมการ (2.31ก) - (2.31ข) ค่าสูงสุดของความเข้มการแผ่พลังงาน ($U_{\max}$) เกิดขึ้นที่ θ มีค่าเข้าใกล้ 0° มีค่าเป็น

$$U_{\max} = U(\theta,\phi)\big|_{\max} = \left(\frac{\pi a^2}{\lambda}\right)^2 \frac{\left|E_0\right|^2}{2\eta} \tag{2.39}$$

ดังนั้น สภาพเจาะจงทิศทาง จะมีสมการเป็น

$$D_0 = \frac{4\pi}{\lambda^2}\left(\pi a^2\right) = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_p = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{em} = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 \tag{2.40}$$

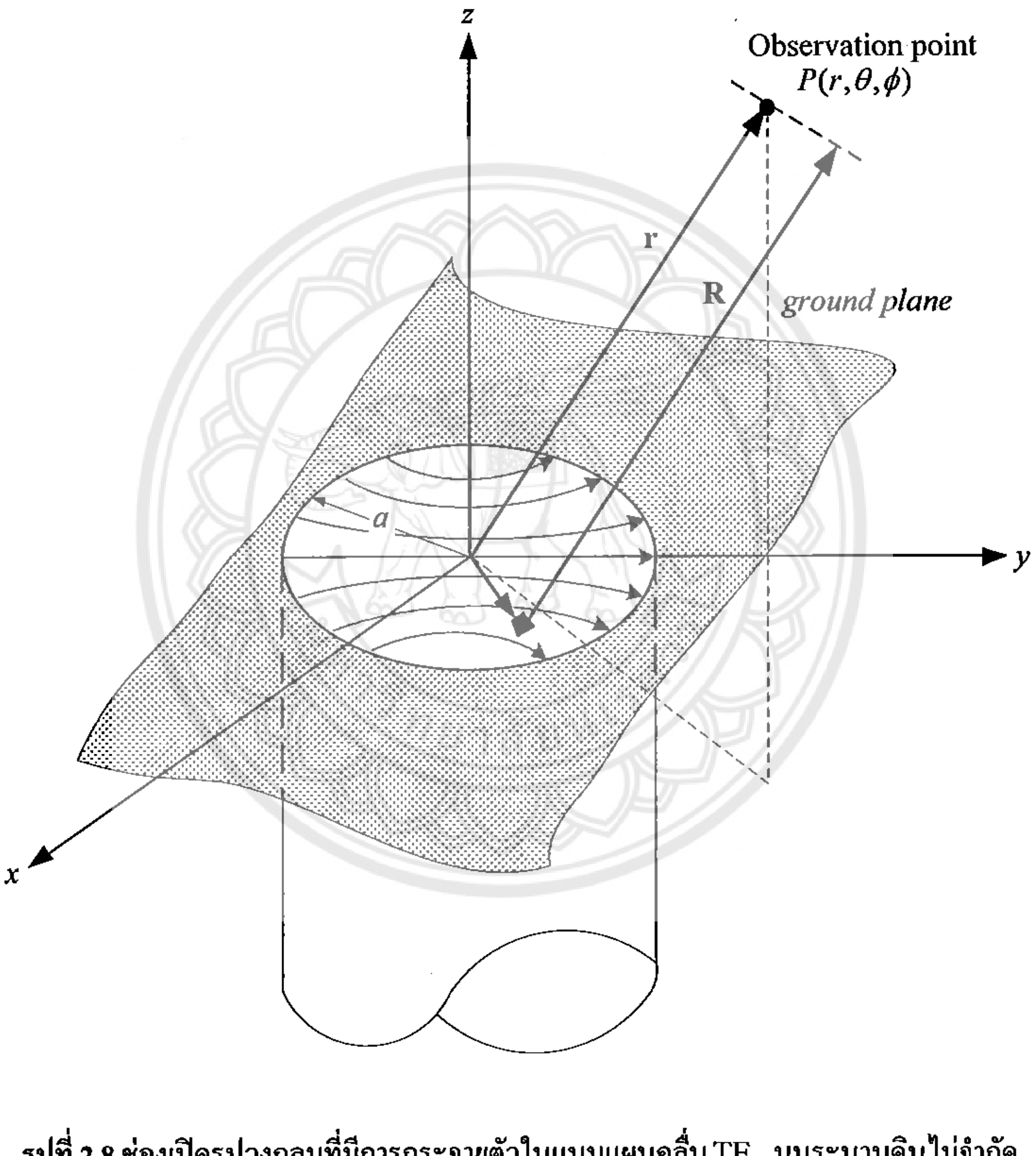
เมื่อ A_p คือ พื้นที่ทางกายภาพของช่องเปิด (physical area of aperture)

A_{em} คือ พื้นที่ประสิทธิผลสูงสุดของช่องเปิด (maximum effective area of aperture)

2.6 สายอากาศช่องเปิดที่มีการกระจายในแบบแผนคลื่น TE_{11} บนระนาบดินไม่จำกัด

(TE_{11}-Mode Distribution on an Infinite Ground Plane)

สายอากาศช่องเปิดที่นิยมใช้ในทางปฏิบัติ คือสายอากาศที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมวางบนระนาบดินไม่จำกัด ที่ซึ่งสนามมีแบบแผนคลื่น (mode) เป็น TE_{11} ดังแสดงในรูปที่ 2.8 สนามไฟฟ้าบนช่องเปิดในแบบแผนคลื่นนี้สามารถแสดงได้ตามสมการ (2.41)



รูปที่ 2.8 ช่องเปิดรูปวงกลมที่มีการกระจายตัวในแบบแผนคลื่น TE_{11} บนระนาบดินไม่จำกัด

$$\mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{a}}_\rho E_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi \} \quad \rho' \le a \tag{2.41ก}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} E_\rho &= E_0 J_1(\chi'_{11}\rho'/a)\sin\phi'/\rho' \\ E_\phi &= E_0 J'_1(\chi'_{11}\rho'/a)\cos\phi' \end{aligned} \tag{2.41ข}$$

โดยที่ $\chi'_{11} = 1.841$ และ $' = \dfrac{\partial}{\partial\rho'}$

โดยอาศัยขั้นตอนเดียวกับกรณีการกระจายคงรูปบนระนาบดินไม่จำกัดในย่านสนามไกลจะมีค่าเป็น

$$E_r = 0 \tag{2.42ก}$$

$$E_\theta = C_2 \sin\phi \frac{J_1(Z)}{Z} \tag{2.42ข}$$

$$E_\phi = C_2 \cos\theta\cos\phi \frac{J'_1(Z)}{1-(Z/\chi'_{11})^2} \tag{2.42ค}$$

$$H_r = 0 \tag{2.42ง}$$

$$H_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \tag{2.42จ}$$

$$H_\phi = +\frac{E_\theta}{\eta} \tag{2.42ฉ}$$

โดยที่ $Z = ka\sin\theta$

$$C_1 = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r} \tag{2.43}$$

$$C_2 = j\frac{kaE_0 J_1(\chi'_{11})e^{-jkr}}{r} \tag{2.44}$$

$$\chi'_{11} = 1.841 \tag{2.45}$$

$$J'_1(Z) = J_0(Z) - J_1(Z)/Z \tag{2.46}$$

เมื่อหาจากสนามที่กระจายบนช่องเปิด พลังงานที่แผ่ออกไปมีค่าเท่ากับ

$$P_{\text{rad}} = \oiint_S \mathbf{W}_{\text{av}} \cdot ds \tag{2.47}$$

โดยที่ความหนาแน่นพลังงานพลังงาน $\mathbf{W}_{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}_a \times \mathbf{H}_a^*\right]$ โดยที่ $\mathbf{E}_a$ และ $\mathbf{H}_a^*$ คือสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนช่องเปิดของสายอากาศ ตามลำดับ

การหา P_{rad} ตามสมการ (2.39) ไม่สามารถทำได้เหมือนกับในปัญหาสายอากาศที่มีการกระจายคงรูป เนื่องจากอินทิเกรนด์ไม่ได้เป็นค่าคงตัว จึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการเชิงตัวเลข ในที่นี้การหาค่าอินทิเกรตจะอาศัยกฎสี่เหลี่ยมคางหมู ดังที่แสดงไว้ในภาคผนวก (ง)

ซึ่งมีผลให้ได้การวิเคราะห์สภาพเจาะจงทิศทางจะมีค่าเป็น

$$D_0 = 0.836\left[\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2\right] = 10.5\pi\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2 = 0.836A_p\left(\frac{4\pi}{\lambda^2}\right) = A_{em}\left(\frac{4\pi}{\lambda^2}\right) \tag{2.48}$$

โดยทั่วไป ค่าสูงสุดพื้นที่ประสิทธิผล A_{em} จะสัมพันธ์กับค่าพื้นที่ทางกายภาพ A_p โดย

$$A_{em} = \varepsilon_{ap} A_p, \quad 0 \le \varepsilon_{ap} \le 1 \tag{2.49}$$

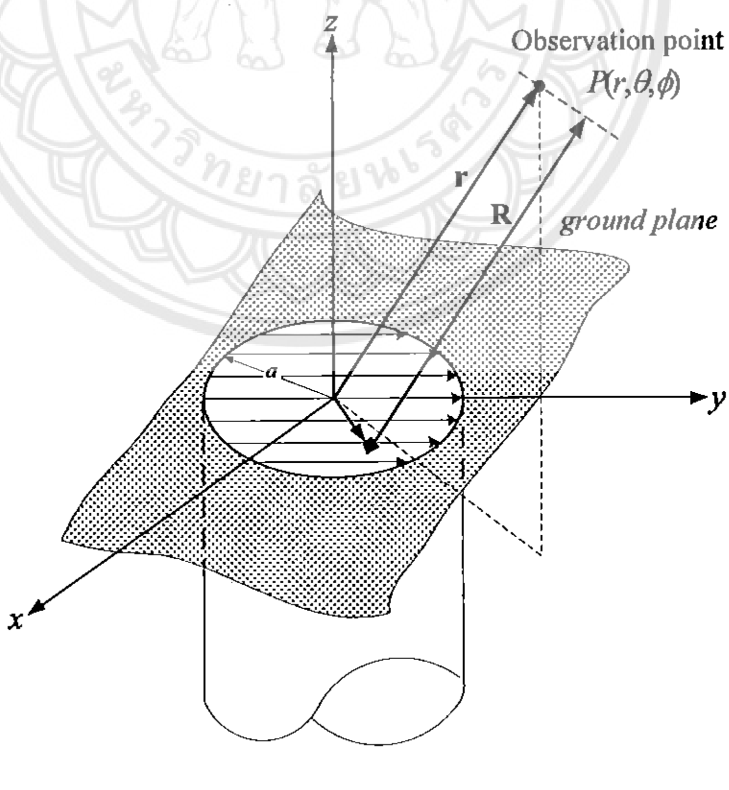
เมื่อ ε_{ap} คือ ค่าประสิทธิผลของช่องเปิด สำหรับกรณีนี้ $\varepsilon_{ap} = 8/\pi^2 \cong 0.836$

บทที่ 3
ผลการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิด

ในบทนี้จะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม โดยอาศัยหลักการและทฤษฎีในบทก่อนหน้านี้ ในลำดับแรกจะกล่าวถึงผลการวิเคราะห์ในกรณีสายอากาศที่กระจายตัวคงรูปบนระนาบดินไม่จำกัด และตามด้วยกรณีที่แบบแผนคลื่นบนช่องเปิดที่อยู่ในแบบแผนคลื่น TE_{11} ซึ่งแบบแผนคลื่นเด่น (Dominant mode) ในสายอากาศชนิดนี้ โดยผลการวิเคราะห์จะแสดงในรูปของสภาพเจาะจงทิศทาง (Directivity) และท้ายสุดจะกล่าวถึงพารามิเตอร์ที่สำคัญอื่นๆ เช่นความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (Half-Power Beamwidth) และระดับพูข้าง (Side Lobe Level)

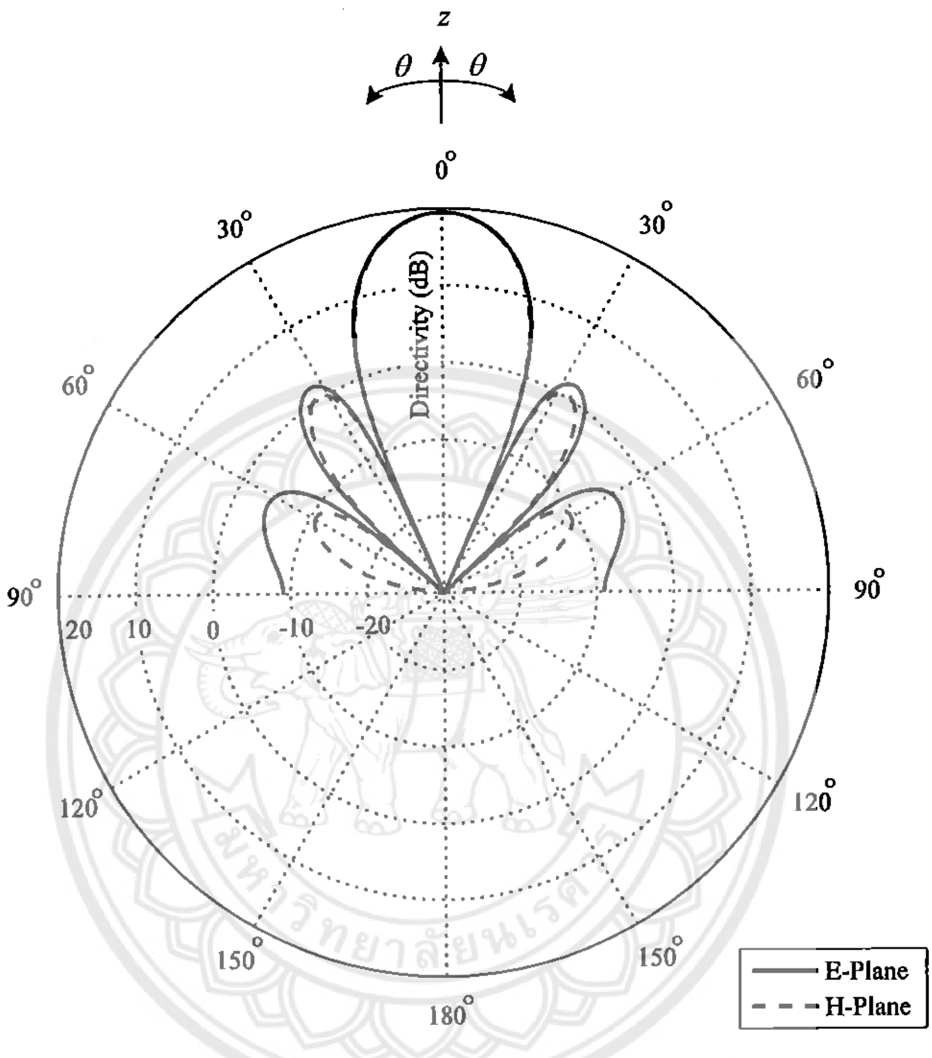
3.1 สายอากาศช่องเปิดที่มีการกระจายคงรูปวางบนระนาบดินไม่จำกัด

พิจารณาสายอากาศช่องเปิดที่วางบนระนาบดินไม่จำกัด ดังแสดงในรูปที่ 3.1 ช่องเปิดรูปวงกลมติดตั้งบนระนาบดินไม่จำกัด โดยที่รัศมีเท่ากับ a สนามไฟฟ้าที่ช่องเปิดได้รับการสมมติให้เป็นค่าคงที่ซึ่งกำหนดโดย สมการ (2.25) เมื่อใช้หลักการสมมูลทำให้ได้ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กเขียนได้ตามสมการ (2.1)



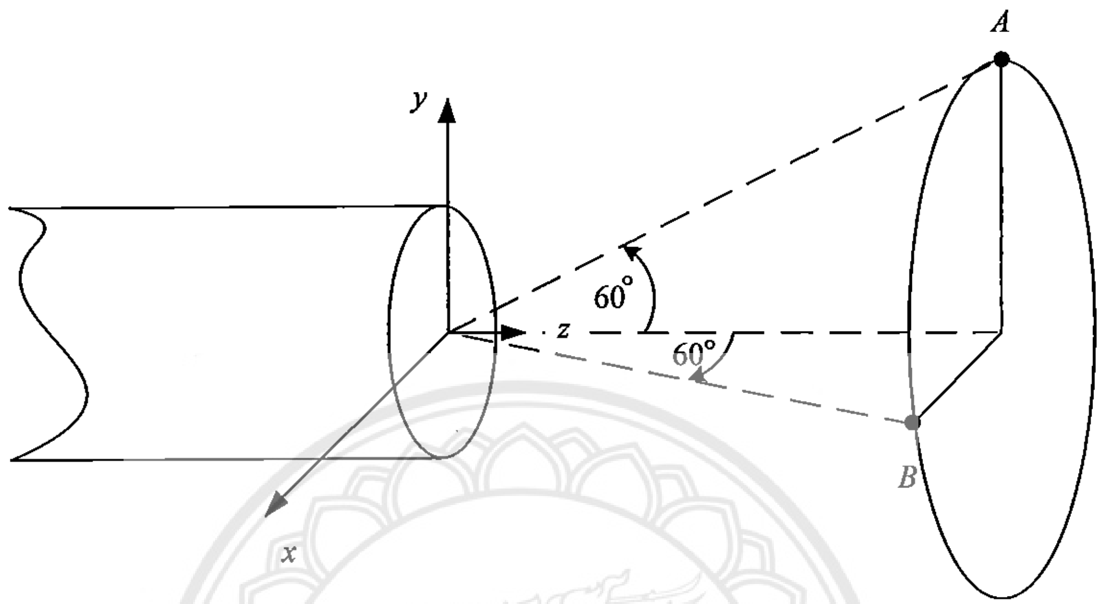
รูปที่ 3.1 สายอากาศช่องเปิดที่มีการกระจายคงรูป

การวิเคราะห์ในย่านสนามไกล ทำให้ได้สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กดังสมการ (2.21ก) - (2.21ฉ) นำมาวิเคราะห์และวาดเป็นแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางได้ดังแสดงในรูปที่ 3.2



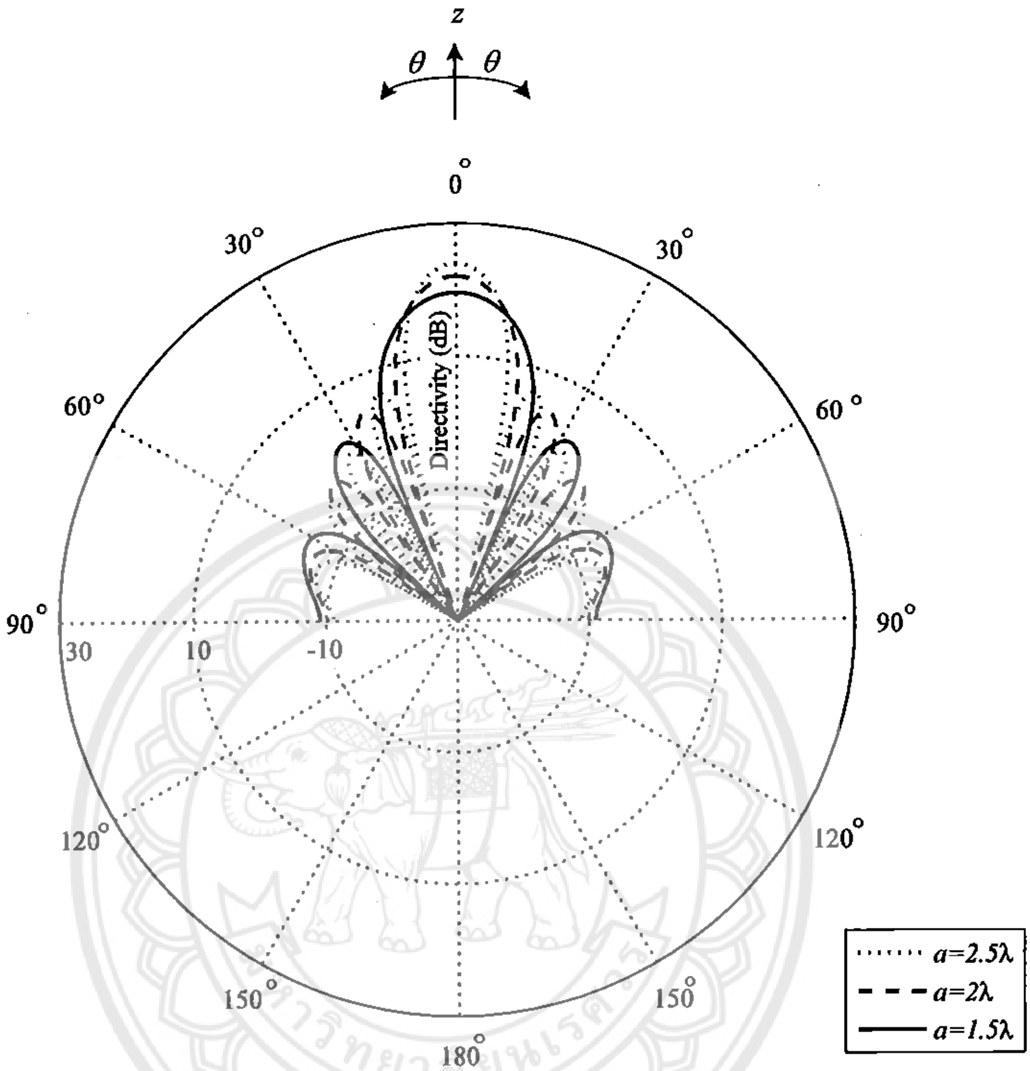
รูปที่ 3.2 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิดที่มีการกระจายตัวคงรูปวางบนระนาบดินไม่จำกัด เมื่อรัศมี $a = 1.5\lambda$

รูปที่ 3.2 แสดงแบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางสำหรับกรณีสายอากาศกระจายตัวคงรูปวางบนระนาบดินไม่จำกัดเมื่อ $a = 1.5\lambda$ เส้นทึบแสดงสภาพเจาะจงทิศทางสำหรับกรณีระนาบสนามไฟฟ้า (*E*-plane) และเส้นประสำหรับกรณี ระนาบสนามแม่เหล็ก (*H*-plane) จะเห็นได้ว่า ทั้งสองแบบรูปมีพูห้าพูสำหรับ ครอบคลุมบริเวณปริภูมิว่างด้านหน้าของช่องเปิด สภาพเจาะจงทิศทาง ณ ยอดของพูหลัก เป็นสภาพเจาะจงทิศทางสูงสุด จากกรณีทั้งสองนี้มีค่าเท่ากัน และเท่ากับ 19.4854 dB ค่าที่ได้จะสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่ได้จากสมการ (2.36) และได้สรุปไว้ในภาคผนวก (จ)



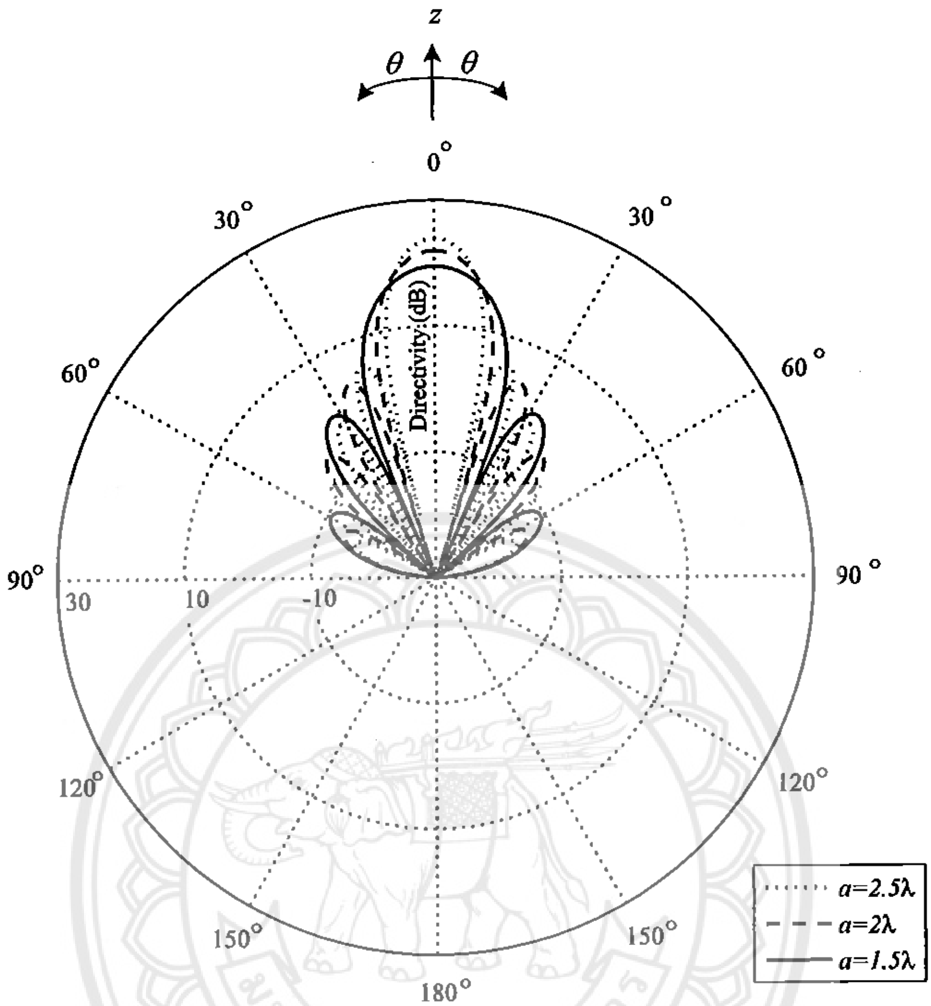
รูปที่ 3.3 การรับสัญญาณของสายอากาศบนฉากสมมุติในย่านสนามไกล

รูปที่ 3.3 แสดงสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมทางด้านซ้าย และระนาบรับคลื่นสมมติที่วางทางด้านขวา ฉากรับอยู่ในย่านสนามไกลและตั้งฉากกับแกน z พิจารณาบนพื้นผิวกรวยเดียวกันที่ทำมุมจากมุม 60 องศากับแกน z และมีจุดยอดอยู่ ณ จุดเริ่มแกน ดังแสดงเป็นเส้นประ ผิวกรวยจะตัดกับระนาบรับคลื่นสมมติที่จุด A และจุด B จุด A เป็นจุดตัดระหว่างผิวกรวยและระนาบสมมติ บนระนาบ y-z จุด B เป็นจุดตัดระหว่างสองระนาบที่ว่านี้และอยู่บนระนาบ x-z A เป็นจุดที่อยู่บนระนาบสนามไฟฟ้า และจุด B อยู่บนระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อพิจารณารูปที่ 3.2 ณ มุม 60 องศา จะพบว่า สภาพเจาะจงทิศทางบนระนาบสนามไฟฟ้าจะมีค่าสูงกว่าบนระนาบสนามแม่เหล็ก และพลังงานที่ได้รับก็จะมีค่าสูงกว่าด้วย



รูปที่ 3.4 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิดที่มีการกระจายตัวคงรูปบนระนาบสนามไฟฟ้า โดยแปรเปลี่ยนค่ารัศมี $a = 1.5\lambda, 2\lambda$ และ 2.5λ

รูปที่ 3.4 แสดงสภาพเจาะจงทิศทางบนระนาบสนามไฟฟ้า (*E*-plane) เมื่อ แปรเปลี่ยนขนาดของช่องเปิด โดยให้ a มีค่าเป็น $1.5\lambda, 2\lambda$ และ 2.5λ โดยที่เส้นทึบแสดงสำหรับรัศมี $a = 1.5$ เส้นประและเส้นจุด แสดงสำหรับรัศมี $a = 2\lambda$ และ 2.5λ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าจะเห็นได้ว่าเมื่อ a เพิ่มขึ้น สภาพเจาะจงทิศทางและจำนวนพูจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ในที่นี้มีค่าเท่ากับ 19.4854 dB, 21.9842 dB และ23.9224 dB เมื่อ $a = 1.5\lambda$, 2λ และ 2.5λ ตามลำดับจำนวนพูที่ครอบคลุมด้านหน้าของช่องเปิดจะเท่ากับ 5, 7 และ 9 ตามลำดับ



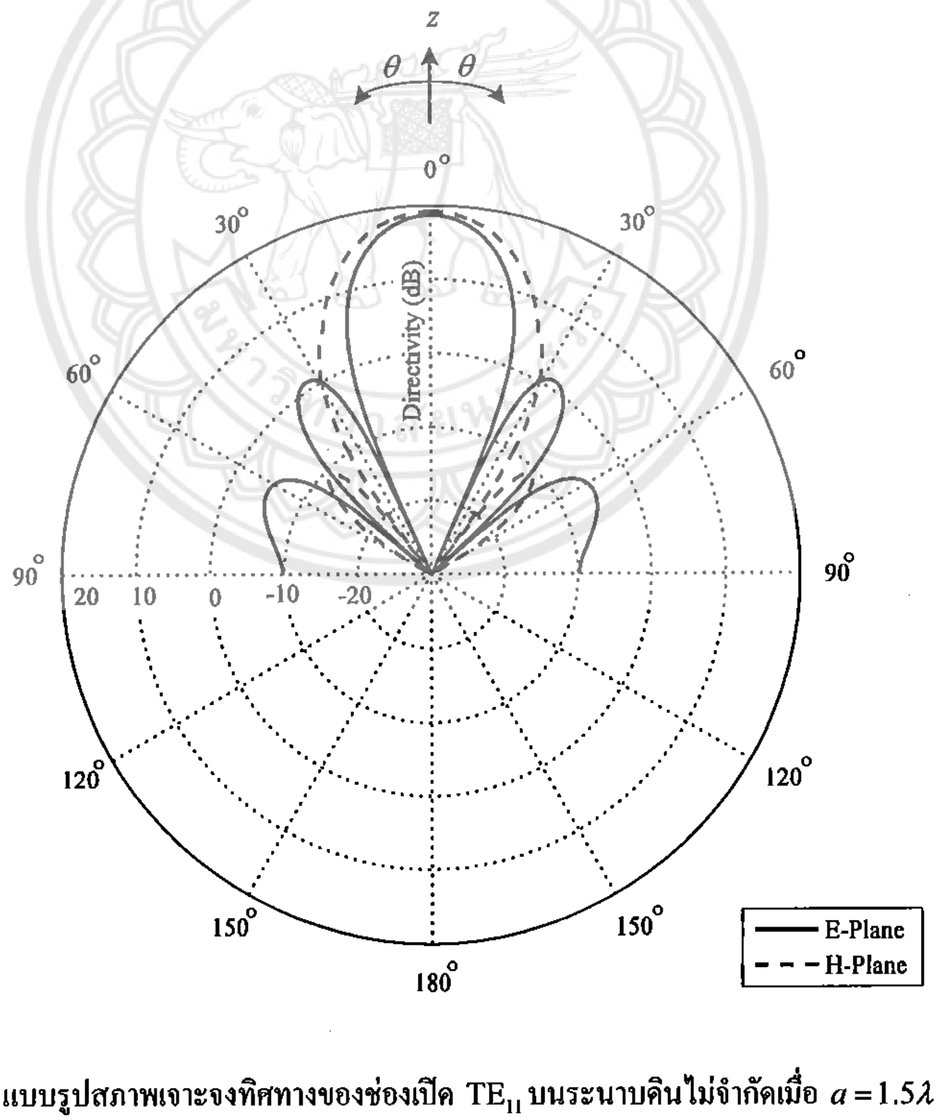
รูปที่ 3.5 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิดที่มีการกระจายตัวคงรูปบนระนาบ
สนามแม่เหล็กโดยแปรเปลี่ยนค่า $a = 1.5\lambda, 2\lambda$ และ 2.5λ

รูปที่ 3.5 แสดงสภาพเจาะจงทิศทางกรณีบนระนาบสนามแม่เหล็ก (*H*-plane) เมื่อ แปรเปลี่ยนขนาดของช่องเปิด โดยให้รัศมี a มีค่าเป็น 1.5λ, 2λ และ 2.5λ โดยที่เส้นทึบแสดงสำหรับรัศมี $a = 1.5$ เส้นประและเส้นจุด แสดงสำหรับรัศมี $a = 2\lambda$ และ 2.5λ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าจะเห็นได้ว่าเมื่อ a เพิ่มขึ้น สภาพเจาะจงทิศทางและจำนวนพูจะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย ในที่นี้มีค่าเท่ากับ 19.4854 dB, 21.9842 dB และ 23.9224 dB เมื่อ $a = 1.5\lambda$, 2λ และ 2.5λ ตามลำดับ จำนวนพูที่ครอบคลุมด้านหน้าของช่องเปิดจะเท่ากับ 5, 7 และ 9 ตามลำดับ ความสัมพันธ์ของสภาพเจาะจงทิศทางและจำนวนพูกับขนาดของช่องเปิด จะมีค่าสอดคล้องกับกรณีสนามไฟฟ้า

3.2 สายอากาศช่องเปิดที่มีการกระจายในแบบแผนคลื่น TE_{11} บนระนาบดินไม่จำกัด

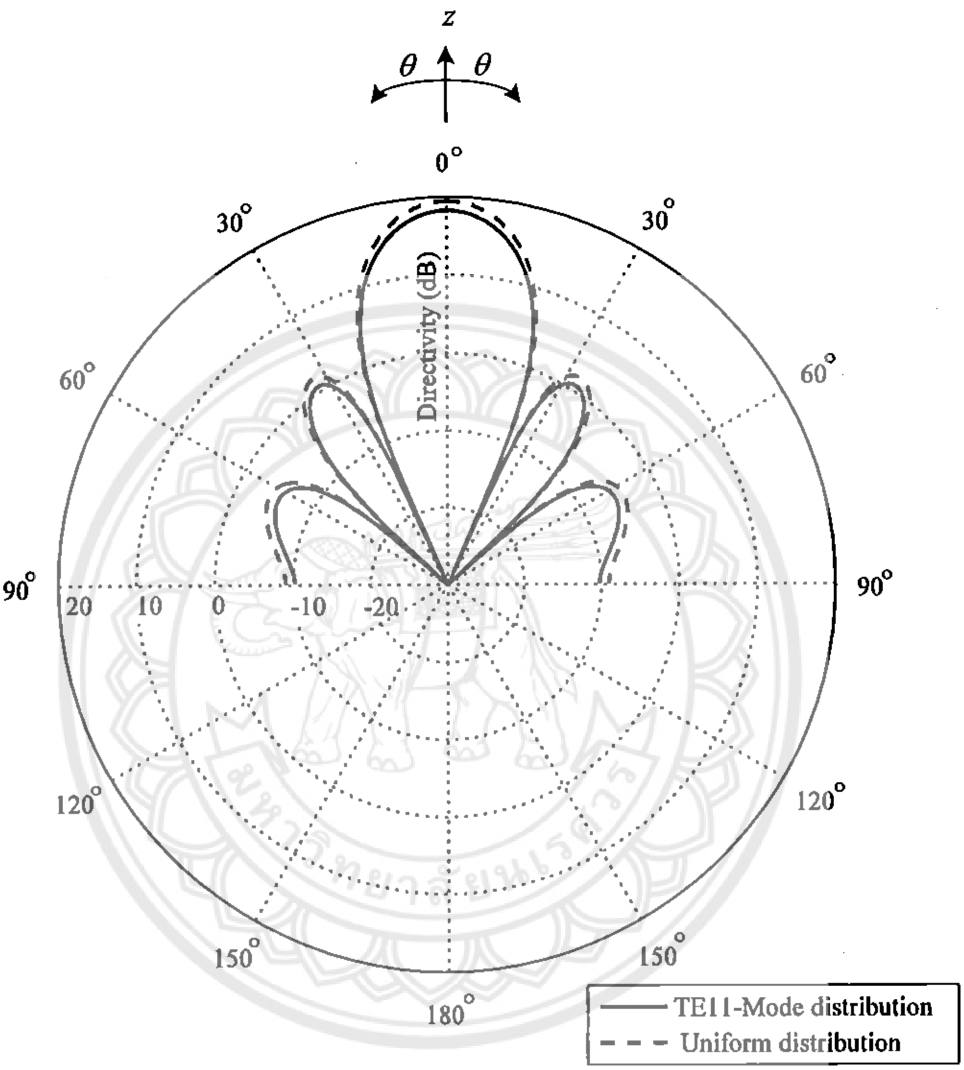
สายอากาศช่องเปิดที่นิยมใช้ในทางปฏิบัติ คือสายอากาศที่มีภาคตัดขวางวงกลมวางบนระนาบดินไม่จำกัด ที่ซึ่งสนามมีแบบแผนคลื่น (mode) เป็น TE_{11} สนามไฟฟ้าในแบบแผนคลื่นนี้สามารถแสดงได้ตามสมการ (2.38ก) - (2.38ฉ)

โครงสร้างที่นำมาวิเคราะห์ก็เป็นเช่นเดียวกันกับกรณีสายอากาศที่วางบนระนาบดิน เมื่อสนามมีแบบแผนคลื่นเป็น TE_{11} สภาพเจาะจงทิศทางสามารถได้ดังรูปที่ 3.6 เช่นเดียวกับที่กล่าวมา เส้นทึบและเส้นประเป็นกรณีสำหรับระนาบสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก ตามลำดับ สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดสำหรับกรณีระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กเกิดขึ้น ณ $\theta = 0$ องศาและมีค่าใกล้เคียงกันมาก คือ 18.6213 dB และ 18.8560 dB ตามลำดับ ค่าที่ได้จะสอดคล้องกับผลลัพธ์ที่แสดงไว้ในภาคผนวก (จ) เมื่อ θ แปรเปลี่ยนจาก 0 ไปถึง 90 องศา ระดับพลังงานของพูรอง (minor lobe) ในแบบแผนคลื่น TE_{11} ของระนาบสนามแม่เหล็กจะลดลงเร็วกว่าเมื่อเทียบกับกรณีระนาบดินที่สนามมีการกระจายคงตัว



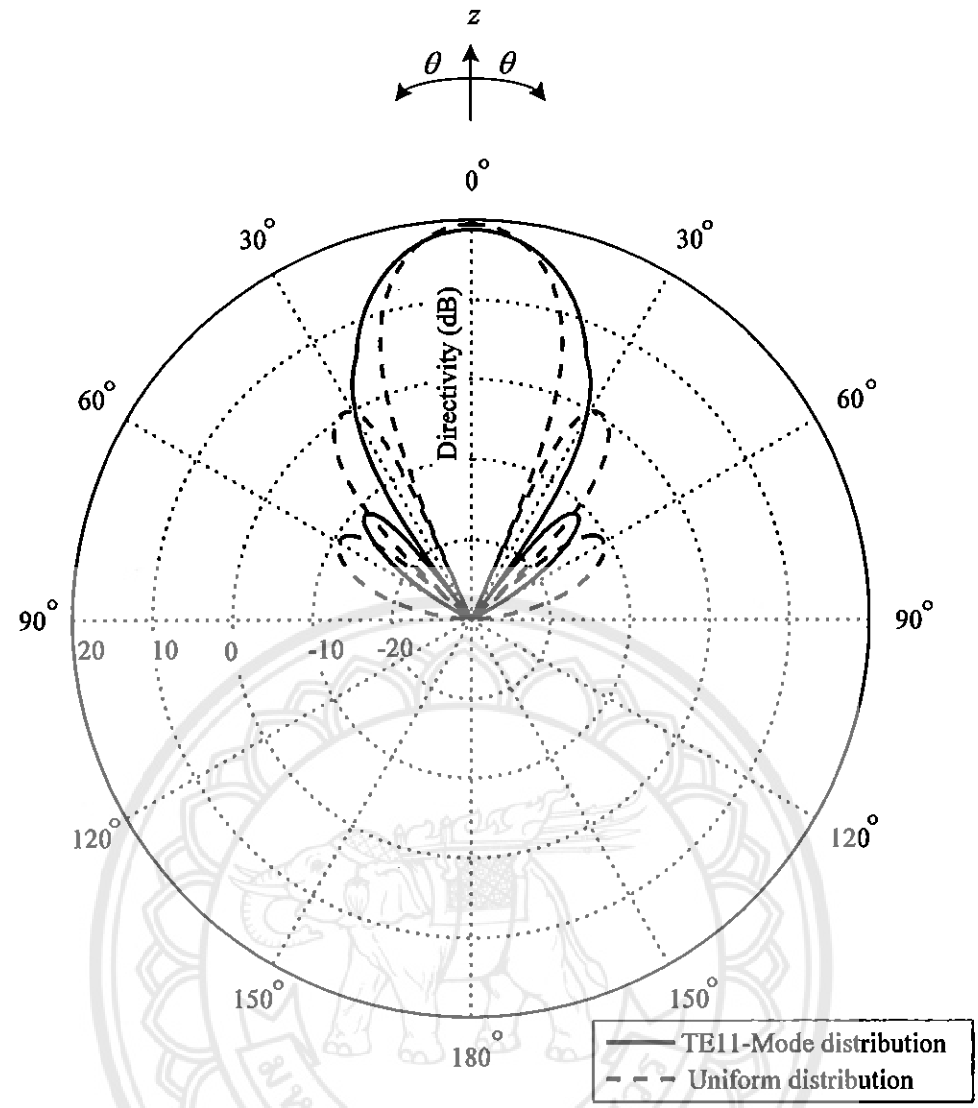
รูปที่ 3.6 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิด TE_{11} บนระนาบดินไม่จำกัดเมื่อ $a = 1.5\lambda$

การเปรียบเทียบสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศบนที่มีการกระจายแบบคงรูปและสายอากาศที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} แสดงไว้ในรูปที่ 3.7 สำหรับกรณีระนาบสนามไฟฟ้า และรูปที่ 3.8 สำหรับกรณีระนาบสนามแม่เหล็ก ซึ่งจะมีค่าที่ใกล้เคียงกันมาก



รูปที่ 3.7 แบบรูปสภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิด บนระนาบสนามไฟฟ้า $a = 1.5\lambda$

จากรูปที่ 3.7 จะเห็นได้ว่าสภาพเจาะจงสูงสุดในกรณีสายอากาศบนที่มีการกระจายแบบคงรูปมีค่าเป็น 19.4854 dB และสำหรับกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} สภาพจงทิศทางสูงสุดมีค่าเป็น 18.6213 dB จะเห็นได้ว่าน้อยกว่าในกรณีที่มีการกระจายคงรูปเล็กน้อย ผลที่ได้นี้ทั้งสองกรณีนี้จะสอดคล้องกับค่าที่แสดงในภาคผนวก (จ)



รูปที่ 3.8 สภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศช่องเปิด บนระนาบสนามแม่เหล็ก เมื่อ $a = 1.5\lambda$

รูปที่ 3.8 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศช่องเปิด บนระนาบสนามแม่เหล็กในกรณีการกระจายตัวคงรูปและในแบบแผนคลื่น TE_{11} การกระจายตัวคงรูปมีพูจำนวนห้าพู และในกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} มีจำนวนพูจำนวนสามพู เมื่อตรวจสอบระดับพูข้าง (SLL) พบว่า ระดับพูข้างของ TE_{11} จะมีค่าเท่ากับ 30.2291 dB กรณีที่มีการกระจายตัวคงรูปที่มีค่าเท่ากับ 19.0722 dB ซึ่งกรณี TE_{11} มากกว่ากรณีที่มีการกระจายตัวคงรูป 11.1569 dB เมื่อพิจารณาความกว้างครึ่งกำลัง พบว่า ความกว้างครึ่งกำลังของ TE_{11} จะมีค่าเท่ากับ 24.1168 องศา และสำหรับกรณีที่มีการกระจายคงรูปจะมีค่าเท่ากับ 19.3584 องศา ซึ่งกรณี TE_{11} มากกว่ากรณีที่มีการกระจายตัวคงรูป 4.7584 องศา สภาพเจาะจงทิศทางสูงสุดในกรณีที่มีการกระจายตัวคงรูปจะมีค่าเป็น 19.4854 dB แต่สำหรับกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} จะมีสภาพเจาะจงทิศทางมีค่าต่ำกว่าเล็กน้อยคือ 18.8560 dB

3.3 ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง ระดับพูข้าง

พารามิเตอร์ที่สำคัญของสายอากาศก็คือ ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (Half-Power Beamwidth HPBW) และระดับพูข้าง (Side Lobe Level, SLL) โดยที่ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง คือ มุมระหว่างแนวสองแนวที่มีกำลัง (หรือ U) เท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าสูงสุด ระดับพูข้าง คือ อัตราส่วนของความเข้มการแผ่พลังงานในพูข้างที่มีค่ามากที่สุดต่อความเข้มการแผ่พลังงานในพูหลักมีค่ามากที่สุด ซึ่งจะมีค่า

$$SLL_{dB} = 10\log\frac{|U(\mathrm{SLL})|}{|U(\max)|} \tag{3.1}$$

ตารางที่ 3.1 และ ตารางที่ 3.2 แสดงพารามิเตอร์บนระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับสำหรับกรณีช่องเปิดที่มีการกระจายแบบคงรูป จะเห็นได้ว่าในทั้งสองกรณีคือระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก เมื่อเพิ่มขนาดของช่องเปิด (a) จะส่งทำให้สภาพเจาะจงทิศทางเพิ่มขึ้น และ HPBW มีค่าลดลง สำหรับกรณีระนาบสนามแม่เหล็กระดับพูข้างจะมีค่าลดลงเมื่อเพิ่มขนาดของช่องเปิด ซึ่งแตกต่างจากระนาบสนามไฟฟ้าก็คือขนาดของช่องเปิดจะไม่ส่งผลต่อ SLL กล่าวคือเมื่อเพิ่มขนาดของช่องเปิด SLL จะคงที่

ตารางที่ 3.3 และ ตารางที่ 3.4 แสดงพารามิเตอร์บนระนาบสนามไฟฟ้าและบนระนาบสนามแม่เหล็ก ตามลำดับสำหรับแบบแผนคลื่น TE_{11} เมื่อพิจารณาผลของช่องเปิดของทั้งสองกรณีคือบนระนาบสนามไฟฟ้าและระนาบสนามแม่เหล็กพบว่าความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของช่องเปิดต่อสภาพเจาะจงทิศทาง SLL และ HPBW จะเป็นเช่นเดียวกันกับกรณีการกระจายตัวแบบคงรูป แต่อย่างไรก็ตาม เมื่อพิจารณาขนาดช่องเปิดเดียวกันพบว่า สภาพเจาะจงทิศทางสำหรับกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} จะมีค่าน้อยกว่าในกรณีที่มีการกระจายแบบคงรูปอยู่เล็กน้อย และในกรณีระนาบสนามแม่เหล็กในแบบแผนคลื่น TE_{11} ค่า SLL และ HPBW จะมีค่าสูงกว่ากรณีการกระจายแบบคงรูป

ตารางที่ 3.1 สภาพเจาะจงทิศทาง SLL และ HPBW ของช่องเปิดที่มีแบบแผนการกระจายตัวคงรูป สำหรับกรณีระนาบสนามไฟฟ้า

รัศมี a (λ)	สภาพเจาะจงทิศทาง MATLAB (dB)	ระดับพูข้าง (SLL) (dB)	HPBW จาก MATLAB (degree)	HPBW จากสูตร [ภาคผนวก จ] (degree)
1	15.9636	17.5702	29.8140	29.2000
1.5	19.4854	17.5702	19.7503	19.4667
2	21.9842	17.5728	14.7806	14.6000
2.5	23.9224	17.5722	11.8128	11.6800
3	25.5060	17.5717	9.8388	9.7333

ตารางที่ 3.2 สภาพเจาะจงทิศทาง SLL และ HPBW ของช่องเปิดที่แบบแผนการกระจายตัวคงรูป สำหรับกรณีระนาบสนามแม่เหล็ก

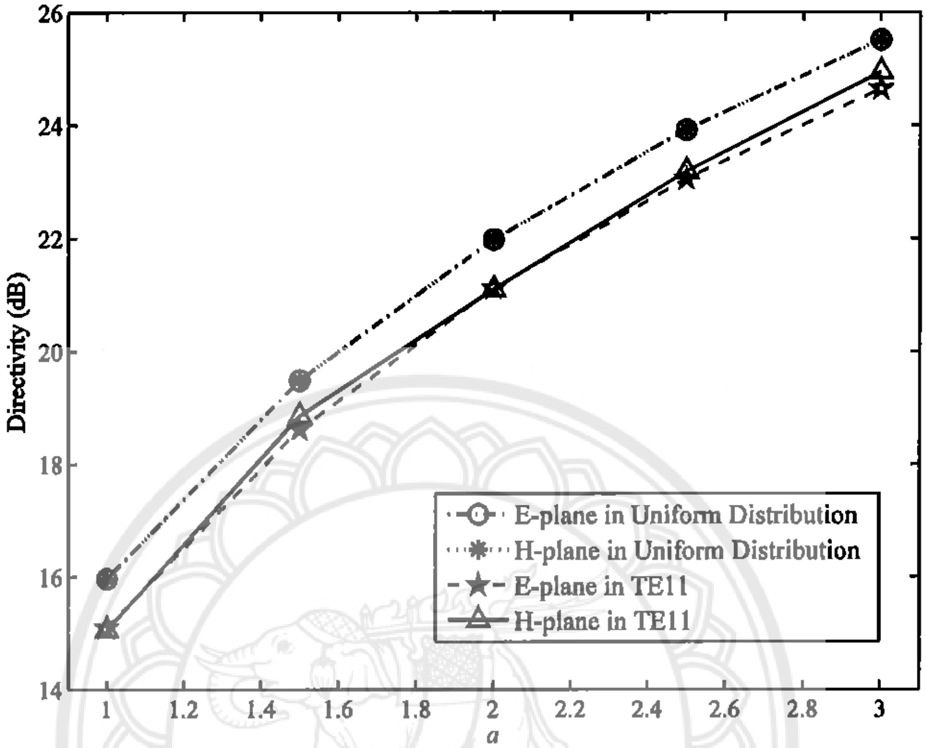
รัศมี a (λ)	สภาพเจาะจงทิศทาง MATLAB (dB)	ระดับพูข้าง (SLL) (dB)	HPBW จาก MATLAB (degree)	HPBW จากสูตร [ภาคผนวก จ] (degree)
1	15.9636	21.8849	28.4891	29.2000
1.5	19.4854	19.0722	19.3581	19.4667
2	21.9842	18.3581	14.6152	14.6000
2.5	23.9224	18.0588	11.7283	11.6800
3	25.5060	17.9041	9.7899	9.7333

ตารางที่ 3.3 สภาพเจาะจงทิศทาง SLL และ HPBW ของช่องเปิดที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} กรณีระนาบสนามไฟฟ้า

รัศมี a (λ)	สภาพเจาะจงทิศทาง MATLAB (dB)	ระดับพูข้าง (SLL) (dB)	HPBW จาก MATLAB (degree)	HPBW จากสูตร [ภาคผนวก จ] (degree)
1	15.0946	17.5715	29.8141	29.2000
1.5	18.6213	17.5708	19.7500	19.4667
2	21.1224	17. 5711	14.7802	14.6000
2.5	23.0584	17. 5708	11.8123	11.6800
3	24.6427	17. 5702	9.8383	9.7333

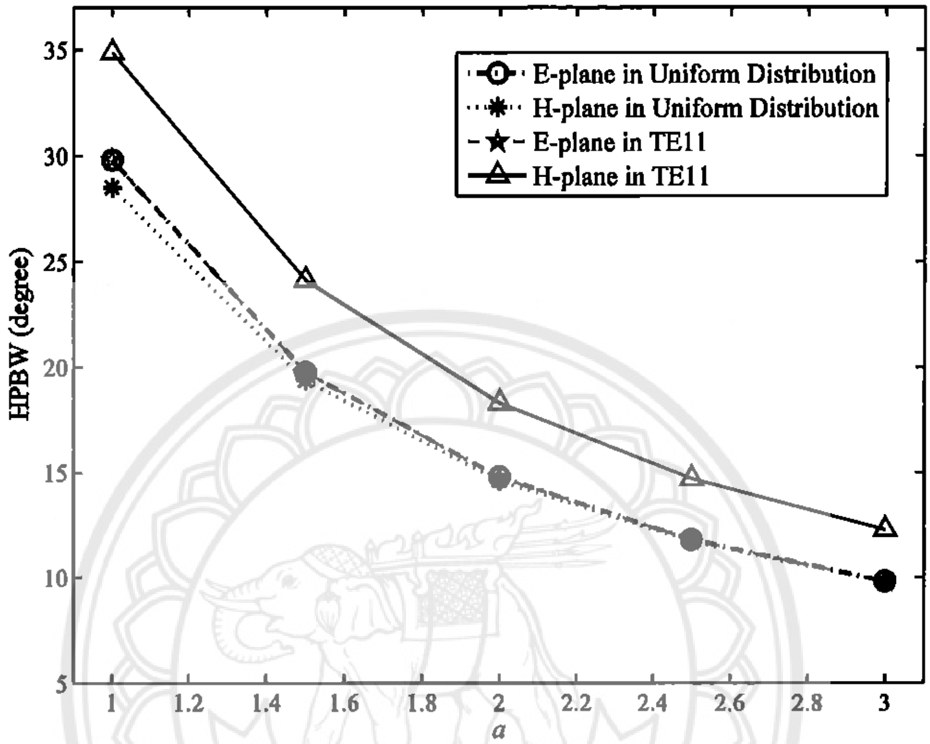
ตารางที่ 3.4 สภาพเจาะจงทิศทาง SLL และ HPBW ของช่องเปิดที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} กรณีระนาบสนามแม่เหล็ก

รัศมี a (λ)	สภาพเจาะจงทิศทาง MATLAB (dB)	ระดับพูข้าง (SLL) (dB)	HPBW จาก MATLAB (degree)	HPBW จากสูตร [ภาคผนวก จ] (degree)
1	15.0503	44.6227	34.8952	37.0000
1.5	18.8560	30.2291	24.1168	24.6667
2	21.1006	28.5323	18.2920	18.5000
2.5	23.1844	27.8831	14.7088	14.8000
3	24.9421	27.5639	12.2913	12.3333



รูปที่ 3.9 สภาพเจาะจงทิศทางของสายอากาศที่ $a = 1\lambda, 1.5\lambda, 2\lambda, 2.5\lambda$ **และ** 3λ

รูปที่ 3.9 จะเห็นได้ว่าสภาพเจาะจงทิศทางในกรณีที่มีการกระจายตัวคงรูปในระนาบสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะมีค่าจะมีค่าใกล้เคียงกัน ในทำนองเดียวกันกับกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} ที่สภาพเจาะจงทิศทางมีค่าไม่แตกต่างกัน แต่เมื่อเปรียบเทียบในระนาบที่สอดคล้องพบว่ากรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} จะมีค่าสภาพเจาะจงทิศทางน้อยกว่าในกรณีที่มีการกระจายตัวคงคงรูปเล็กน้อย ทั้งสี่กรณีที่กล่าวมานี้จะแปรผันตรงกันกับ a ซึ่งจะมีค่ามากขึ้นในขณะที่สภาพเจาะจงทิศทางมีค่าเพิ่มมากขึ้นผลที่ได้นี้ทั้งสี่กรณีนี้จะสอดคล้องกับค่าที่แสดงในภาคผนวก (จ)



รูปที่ 3.10 ความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลังของสายอากาศ ที่ $a = 1\lambda, 1.5\lambda, 2\lambda, 2.5\lambda$ และ 3λ

รูปที่ 3.10 จะเห็นได้ว่าค่า HPBW ในกรณีสายอากาศที่มีการกระจายตัวคงรูปในระนาบสนามไฟฟ้าสนามแม่เหล็ก และสายอากาศที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} บนสนามไฟฟ้าจะมีค่าที่ไม่ต่างกันมากนัก แต่สำหรับกรณีแบบแผนคลื่น TE_{11} บนสนามแม่เหล็ก จะเห็นได้ว่าค่า HPBW ค่อนข้างจะแตกต่างกันกับสามกรณีแรก โดยจะมีค่ามากว่าในขณะที่ขนาดของช่องเปิดมีค่าเท่ากัน โดยผลที่ได้นี้ทั้งสี่กรณีนี้แปรผกผันกันกับ a ซึ่งจะมีค่ามากขึ้นในขณะที่ค่า HPBW มีค่าลดลงสอดคล้องกับค่าที่แสดงในภาคผนวก (จ)

บทที่ 4
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิเคราะห์

สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลมได้รับการวิเคราะห์โดยอาศัยหลักการสมมูลร่วมกับการประมาณในย่านสนามไกล โดยตัวอย่างที่นำมาพิจารณาได้แก่ สายอากาศช่องเปิดบนระนาบดินไม่จำกัด ที่สนามมีการกระจายคงรูปและที่สนามมีแบบแผนคลื่น TE_{11} ผลการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่า แนวยอดพูหลักชี้ในทิศตั้งฉากกับระนาบช่องเปิดซึ่งมุมยกมีค่าเท่ากับ 0 องศา ในทั้งสองกรณีเมื่อเพิ่มขนาดของช่องเปิด สภาพเจาะจงทิศทางจะมีค่าเพิ่มขึ้นและ HPBW จะมีค่าลดลง สภาพเจาะจงทิศทางของช่องเปิดที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} จะมีค่าน้อยกว่ากรณีที่มีการกระจายตัวคงรูปเล็กน้อยในขนาดของช่องเปิดเดียวกัน SLL ในระนาบสนามไฟฟ้าจะคงที่ซึ่งต่างจากระนาบสนามแม่เหล็กจะมีค่าลดลงในขณะที่ขนาดของช่องเปิดเพิ่มขึ้น และสำหรับระนาบสนามแม่เหล็กที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} ค่า SLL และค่า HPBW ที่ได้นั้นจะมีค่ามากกว่ากรณีที่มีการกระจายตัวแบบคงรูปบนระนาบที่สอดคล้องกัน

4.2 ข้อเสนอแนะ

การวิเคราะห์ช่องเปิดที่เสนอมานี้ อาศัยหลักการสมมูลและการประมาณในย่านสนามไกล ทำให้ได้สนามที่ครอบคลุมด้านหน้าของช่องเปิด ซึ่งหลักการสมมูลยังมีข้อจำกัดที่ยังไม่สามารถใช้วิเคราะห์เพื่อหาสนามที่อยู่ด้านหลังของช่องเปิดได้ ซึ่งในบริเวณที่ว่านี้อาจหาได้โดยการวัดและทดสอบกับอุปกรณ์จริง หรืออาจใช้ทฤษฎีอื่น และเนื่องจากการวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดภาคตัดขวางรูปวงกลมที่ได้นำเสนอนี้เป็นเพียงการวิเคราะห์ในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการจำลองทางทฤษฎีเท่านั้น ในการใช้งานจริงอาจมีปัจจัยภายนอกที่เกี่ยวข้องเช่น ความสูญเสียของตัวกลางในท่อนำคลื่น หรือความสูญเสียของตัวกลางด้านหน้าช่องเปิดซึ่งเป็นบริเวณของการแผ่พลังงาน และปัจจัยอื่นๆที่อาจทำให้ผลการวิเคราะห์นี้คลาดเคลื่อนไป หากต้องการที่จะให้ได้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบรูปคลื่นได้ใกล้เคียงความจริงมากที่สุด ก็สามารถทำได้โดยการวัดและทดสอบกับอุปกรณ์จริง

เอกสารอ้างอิง

[1] Constantine A. Balanis. **Advanced Engineering Electromagnetics,** United States of America : John Wiley & Sons. 1938.

[2] Constantine A. Balanis. **Antenna Theory Analysis and Design.** 3rd Ed. United States of America : John Wiley & Sons. 2005.

[3] ฉัตรชัย ไวยาพัฒนกร. **การวิเคราะห์สายอากาศ.** พิมพ์ครั้งที่1. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2547.

[4] ภูริวัจน์ เกตุศรีศักดา. **การวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิด.** ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. 2552.

[5] ศิริขวัญ โพธานเจริญ **การวิเคราะห์ท่อนำคลื่นภาคตัดขวางเป็นรูปวงกลม.** ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. 2550.

[6] พรชัย พุกอูต. **การวิเคราะห์กลุ่มสายอากาศเส้นตรงระยะห่างคงรูปและแอมพลิจูดไม่คงรูป.** ปริญญานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร. 2550.

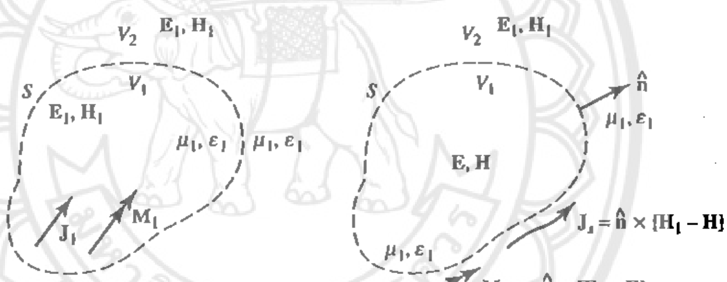
[7] ลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ และคณะ.**การใช้งานโปรแกรม MATLAB เบื้องต้น.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.2551

ภาคผนวก ก

หลักการสนามสมมูล

หลักการสนามสมมูล

หลักการสมมูลได้รับการพัฒนาขึ้นโดยการพิจารณาแหล่งกำเนิดแท้จริง (actual source) ซึ่งในที่นี้คือความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}_1$ และความหนาแน่นกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}_1$ ดังแสดงในรูปที่ ก.1 แหล่งกำเนิดเหล่านี้จะแผ่พลังงาน $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{H}_1$ ไปทั่วทุกบริเวณที่อยู่โดยรอบ เพื่อที่ได้วิธีที่จะให้สนามภายนอกพื้นผิวปิด จะเลือกพื้นผิวปิด S แสดงได้ดังเส้นประในรูปที่ ก.1(ข) โดยที่พื้นผิวนี้ต้องครอบคลุมแหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_1$ และ $\mathbf{M}_1$ ปริมาตรที่อยู่ภายใน S คือ V_1 และที่อยู่ภายนอกคือ V_2 ปัญหาสมมูลของรูปที่ ก.1(ก) แสดงได้ดังรูปที่ ก.1(ข) แหล่งกำเนิดเดิมจะได้รับการย้ายออกไป และภายในพื้นผิว S จะได้รับการสมมติให้มีสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ และสนามแม่เหล็ก เกิดขึ้น $\mathbf{H}$ ส่วนภายนอกพื้นผิว S สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กก็ยังคงมีค่าเท่าเดิม ก็คือ $\mathbf{E}_1$ และ $\mathbf{H}_1$ ตามลำดับ เพื่อที่จะให้สนามเป็นไปตามที่กำหนดมานี้ ณ พื้นผิว S สนามต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต เนื่องจากสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีความไม่ต่อเนื่องบนพื้นผิวนี้ จึงทำให้เงื่อนไขขอบเขตสามารถเขียนได้เป็น



(ก) แหล่งกำเนิดแท้จริง (ข) แหล่งกำเนิดสมมูล

รูปที่ ก.1 รูปแบบแหล่งกำเนิดแท้จริงและแหล่งกำเนิดสมมูล [2]

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}] \qquad (ก.1)$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}] \qquad (ก.2)$$

เมื่อ $\hat{\mathbf{n}}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับพื้นผิว S และมีทิศพุ่งออก แหล่งกำเนิด $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ ทั้งสองนี้จะผลิตสนามในบริเวณ V_2 โดยที่สนามที่ได้จะมีค่าเท่ากันกับที่เกิดจากแหล่งกำเนิดแท้จริง จึงกล่าวได้ว่าแหล่งกำเนิด (ก.1), (ก.2) สมมูลกับแหล่งแท้จริงเฉพาะในบริเวณ V_2

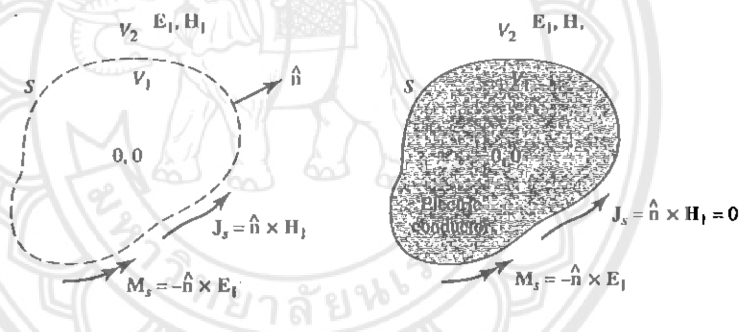
เนื่องจากสนาม $\mathbf{E}$ และ $\mathbf{H}$ ที่อยู่ภายใน S สามารถมีค่าเท่าไรก็ได้ และเป็นบริเวณที่ไม่สนใจ จึงสามารถสมมติให้มีค่าเป็นศูนย์ได้ ดังนั้นความหนาแน่นกระแส $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ จะลดรูปได้เป็น

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H})\big|_{\mathbf{H}=0} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 \quad (ก.3)$$

$$\mathbf{M}_s = -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E})\big|_{\mathbf{E}=0} = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 \quad (ก.4)$$

หลักการที่ให้สนามภายในพื้นผิวปิดเป็นศูนย์นี้จะมีชื่อเรียกว่า หลักการสมมูลของเลิฟ (Love's Equivalence Principle)

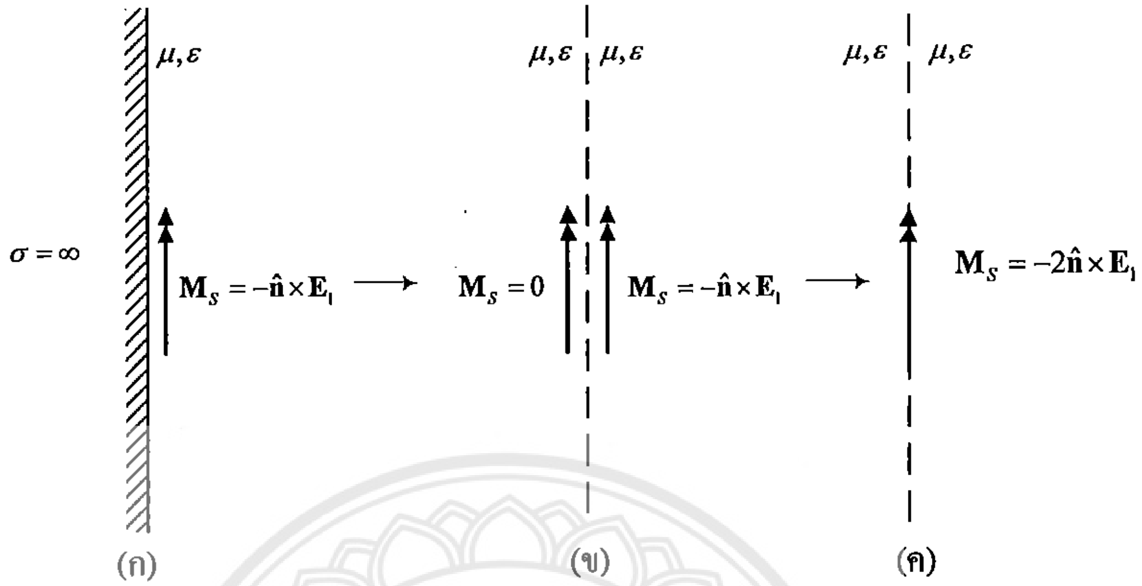
สำหรับกรณีที่โครงสร้างส่วนใหญ่ของปัญหาเป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ (Perfect Electric Conductor, PEC) บริเวณที่อยู่ภายในพื้นผิวปิดจะได้รับการแทนด้วยตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ดังแสดงในรูปที่ ก.1.ก ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบจะลัดวงจรความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า $\mathbf{J}_s$ ยังผลให้ $\mathbf{J}_s = 0$ ดังแสดงในรูปที่ ก.1.ข



(ก) หลักการสมมูลของเลิฟ (ข) ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ

รูปที่ ก.2 แบบจำลองหลักการสมมูลสำหรับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ [2]

สำหรับปัญหาสายอากาศช่องเปิดที่วางบนระนาบดินไม่จำกัด ดังแสดงในรูปที่ 2.5 พื้นผิวปิดจะเป็นผิวราบเรียบที่ครอบคลุมตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบ ดังแสดงในรูปที่ ก.1(ข) แหล่งกำเนิดที่ปรากฏอยู่จะมีเพียงแหล่งกำเนิดกระแสแม่เหล็ก $\mathbf{M}_s$ เท่านั้น สนามที่อยู่ในปริภูมิว่างด้านขวาของพื้นผิวสามารถหาได้โดยใช้ ทฤษฎีภาพ (image theory) กล่าวคือ ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์แบบจะได้รับการย้ายออกไป แหล่งกำเนิดแม่เหล็กจินตภาพ (imaginary magnetic) ตัวหนึ่งจะได้รับการนำมาวางไว้ด้านซ้ายของพื้นผิวปิด ดังแสดงในรูปที่ ก.3 เนื่องจากแหล่งกำเนิดที่นำเข้ามาใหม่นี้มีทิศเดียวกันกับแหล่งกำเนิดแท้จริงที่มีอยู่เดิม ฉะนั้นเมื่อนำมารวมกัน ความหนาแน่นกระแสแม่เหล็กจะเป็นทวีคูณ และแหล่งกำเนิดที่ได้นี้จะนำมาใช้เพื่อวิเคราะห์สนามที่แผ่ออกไปในย่านสนามไกล



รูปที่ ก.3 รูปแบบหลักการสมมูลสำหรับการแผ่พลังงานใกล้ตัวนำไฟฟ้าสม**บูรณ์แบบ**

ภาคผนวก ข

ศักย์เชิงเวกเตอร์สำหรับสายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

ในการหาสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แผ่ออกไปนั้นจะไม่นิยมวิเคราะห์โดยตรงจากแหล่งกำเนิด แต่จะหาโดยอาศัยศักย์เชิงเวกเตอร์คู่หนึ่งคือ **A** และ **F** เมื่อทราบ **A** และ **F** แล้วจะหาสนามอีกต่อหนึ่ง ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** และ **F** จะสัมพันธ์กันกับกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็กตามลำดับ ดังนี้

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iint_S \mathbf{J}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \qquad (ข.1ก)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_S \mathbf{M}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \qquad (ข.1ข)$$

โดยที่ $\mathbf{J}_s$ และ $\mathbf{M}_s$ คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าและกระแสแม่เหล็ก ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่จุดสังเกต อยู่ในย่านสนามไกล ซึ่งบริเวณนี้เป็นบริเวณที่นิยมสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาสายอากาศ และเป็นบริเวณที่ได้รับการสนใจ ค่าของ R จะได้รับการประมาณตามสมการดังนี้

$$R = r - \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}' \quad \text{for phase terms} \qquad (ข.2ก)$$

$$R = r \quad \text{for amplitude terms} \qquad (ข.2ข)$$

โดยอาศัยการประมาณในย่านสนามไกล ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** และ **F** สามารถเขียนได้เป็น

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi}\iint_S \mathbf{J}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \cong \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi r}\mathbf{N} \qquad (ข.3ก)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\iint_S \mathbf{M}_s \frac{e^{-j\beta R}}{R} ds' \cong \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi r}\mathbf{L} \qquad (ข.3ข)$$

โดยที่ **N** และ **L** คือโมเมนต์กระแสจะมีค่าเป็น

$$\mathbf{N} = \iint_S \mathbf{J}_s e^{-j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.4ก)$$

$$\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{M}_s e^{-j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.4ข)$$

ถ้าพิจารณาพารามิเตอร์ที่เกี่ยวกับกระแสไฟฟ้าในที่นี้คือ **N** และ **J** และในพิกัดฉาก **N** และ **J** สามารถเขียนได้ในรูป

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \mathbf{N}_x\hat{\mathbf{a}}_x + \mathbf{N}_y\hat{\mathbf{a}}_y + \mathbf{N}_z\hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\mathbf{J}_s(x',y',z') = \hat{\mathbf{a}}_x J_x(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_y J_y(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_z J_z(x',y',z') \qquad (ข.5)$$

แทนค่าสมการ (ข.5) ลงใน (ข.4ก) จะได้

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \iint_S [\hat{\mathbf{a}}_x J_x(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_y J_y(x',y',z') + \hat{\mathbf{a}}_z J_z(x',y',z')] e^{-j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.6)$$

กระแสในสมการ (ข.6) แสดงสมการในรูปพิกัดฉาก ซึ่งกระแสที่อยู่บนภาคตัดขวางของช่องเปิดอยู่ในรูปพิกัดทรงกระบอก เพื่อให้วิเคราะห์ได้ง่ายจึงจำเป็นต้องแปลงจากพิกัดทรงกระบอกไปเป็นพิกัดฉากโดยอาศัยสมการเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi' & -\sin\phi' & 0 \\ \sin\phi' & \cos\phi' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_\rho \\ J_\phi \\ J_z \end{bmatrix} \qquad (ข.7ก)$$

กระจายได้

$$J_x = J_\rho \cos\phi' - J_\phi \sin\phi' \qquad (ข.8ก)$$

$$J_y = J_\rho \sin\phi' + J_\phi \cos\phi' \qquad (ข.8ข)$$

$$J_z = J_z \qquad (ข.8ค)$$

แทนสมการ (ข.7ข) ลงในสมการ (ข.6) จะได้

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \iint_S [\hat{\mathbf{a}}_x (J_\rho \cos\phi' - J_\phi \sin\phi') + \hat{\mathbf{a}}_y (J_\rho \sin\phi' + J_\phi \cos\phi') + \hat{\mathbf{a}}_z J_z] e^{-j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad (ข.9)$$

จากสมการ (ข.9) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดทรงกระบอกดังนี้

$$N_x = \iint_S (J_\rho \cos\phi' - J_\phi \sin\phi') e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.10ก)$$

$$N_y = \iint_S (J_\rho \sin\phi' - J_\phi \cos\phi') e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.10ข)$$

$$N_z = \iint_S J_z e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \qquad (ข.10ค)$$

เนื่องจากหน้าคลื่นที่แผ่ออกไปในย่านสนามไกล จะจัดรูปเป็นทรงกลม จึงต้องเปลี่ยนรูปให้อยู่ให้อยู่ในพิกัดทรงกลมด้วย ซึ่งจะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดทรงกลมกับพิกัดฉาก จะเขียนได้ดังสมการ

$$\begin{bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} \quad \text{(ข.11ก)}$$

กระจายได้

$$N_r = N_x \sin\theta\cos\phi + N_y \sin\theta\sin\phi + N_z \cos\theta \quad \text{(ข.12ก)}$$

$$N_\theta = N_x \cos\theta\cos\phi + N_y \cos\theta\sin\phi - N_z \sin\theta \quad \text{(ข.12ข)}$$

$$N_\phi = -N_x \sin\phi + N_y \cos\phi \quad \text{(ข.12ค)}$$

นำสมการ (ข.10ก) -(ข.10ค) แทนลงใน (ข.12ก) - (ข.12ค) ตามลำดับซึ่งจะทำให้ได้ค่าของ N_r, N_θ และ N_ϕ ในพิกัดทรงกลม ดังนี้

$$\begin{aligned} N_r = {} & \sin\theta\cos\phi \iint_S (J_\rho \cos\phi' - J_\phi \sin\phi') e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \\ & + \sin\theta\sin\phi \iint_S (J_\rho \sin\phi' - J_\phi \cos\phi') e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \\ & + \cos\theta \iint_S J_z e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \iint_S [(J_\rho \sin\theta\cos\phi\cos\phi' - J_\phi \sin\theta\cos\sin\phi') \\ & +(J_\rho \sin\theta\sin\phi\sin\phi' - J_\phi \sin\theta\sin\phi\cos\phi') \\ & +J_z \cos\theta] e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & \iint_S [J_\rho \sin\theta(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi'\sin\phi) \\ & +J_\phi \sin\theta(\sin\phi'\cos\phi - \cos\phi'\sin\phi) \\ & +J_z \cos\theta] e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \end{aligned}$$

$$N_r = \iint_S [J_\rho \sin\theta\cos(\phi - \phi') + J_\phi \sin\theta\sin(\phi - \phi') + J_z \cos\theta] e^{j\beta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.13)}$$

$$N_{\theta} = \cos\theta\cos\phi \iint_S (J_{\rho}\cos\phi' - J_{\phi}\sin\phi')e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$
$$+\cos\theta\sin\phi \iint_S (J_{\rho}\sin\phi' + J_{\phi}\cos\phi')e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$
$$+\sin\theta \iint_S J_z e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$= \iint_S [J_{\rho}\cos\phi'\cos\theta\cos\phi - J_{\phi}\sin\phi'\cos\theta\cos\phi$$
$$+J_{\rho}\sin\phi'\cos\theta\sin\phi + J_{\phi}\cos\phi'\cos\theta\sin\phi$$
$$+J_z\sin\theta]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$= \iint_S [J_{\rho}\cos\theta(\cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi')$$
$$+J_{\phi}\cos\theta(-\cos\phi\sin\phi' + \sin\phi\cos\phi')$$
$$+J_z\sin\theta]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$N_{\theta} = \iint_S [J_{\rho}\cos\theta\cos(\phi-\phi') + J_{\phi}\cos\theta\sin(\phi-\phi') + J_z\sin\theta]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds' \qquad (ข.14)$$

$$N_{\phi} = \sin\phi \iint_S (-J_{\rho}\cos\phi' - J_{\phi}\sin\phi')e^{-j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$
$$+\cos\phi \iint_S (J_{\rho}\sin\phi' + J_{\phi}\cos\phi')e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$= -\iint_S [J_{\rho}\cos\phi'\sin\phi - J_{\phi}\sin\phi'\sin\phi$$
$$+J_{\rho}\sin\phi'\cos\phi + J_{\phi}\cos\phi'\cos\phi]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$= -\iint_S [J_{\rho}(\cos\phi'\sin\phi - \sin\phi'\cos\phi)$$
$$+J_{\phi}(\sin\phi'\sin\phi + \cos\phi'\cos\phi]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds'$$

$$N_{\phi} = \iint_S [-J_{\rho}\sin(\phi-\phi') + J_{\phi}\cos(\phi-\phi')]e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'}ds' \qquad (ข.15)$$

นำสมการ (ข.13),(ข.14) และ (ข.15) แทนในสมการ (ข.3ก) จะได้ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** มีค่าเป็น

$$A_r = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [J_\rho \sin\theta\cos(\phi-\phi') + J_\phi \sin\theta\sin(\phi-\phi') + J_z \cos\theta] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.16ก)}$$

$$A_\theta = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [J_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + J_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') + J_z \sin\theta] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.16ข)}$$

$$A_\phi = \frac{\mu e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [-J_\rho \sin(\phi-\phi') + J_\phi \cos(\phi-\phi')] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.16ค)}$$

และในทำนองเดียวกัน ศักย์เชิงเวกเตอร์ **F** สามารถหาค่าได้ตามขั้นตอนเดียวกันกับ ศักย์เชิงเวกเตอร์ **A** ดังที่ได้กล่าวมาแล้ว ศักย์เชิงเวกเตอร์ **F** จะมีค่าเป็น

$$F_r = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [M_\rho \sin\theta\cos(\phi-\phi') + M_\phi \sin\theta\sin(\phi-\phi') + M_z \cos\theta] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.17ก)}$$

$$F_\theta = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [M_\rho \cos\theta\cos(\phi-\phi') + M_\phi \cos\theta\sin(\phi-\phi') + M_z \sin\theta] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.17ข)}$$

$$F_\phi = \frac{\varepsilon e^{-j\beta r}}{4\pi} \iint_S [-M_\rho \sin(\phi-\phi') + M_\phi \cos(\phi-\phi')] e^{j\beta\hat{\mathbf{a}}_r\cdot\mathbf{r}'} ds' \quad \text{(ข.17ค)}$$

ภาคผนวก ค

ฟังก์ชันเบสเซล

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเบสเซลอันดับ p (Bessel's differential equation of order p) คือ สมการซึ่งอยู่ในรูป

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{ค.1}$$

โดยที่ p เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นจำนวนจริงและ $p \geq 0$
โดยวิธีของโฟรเบนิอุสเราจะสมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} \quad , \quad a_0 \neq 0 \tag{ค.2}$$

แล้วแทนค่า (ข.2) ลงใน (ข.1) จะได้

$$(r^2 - p^2)a_0 x^r + [(r+1)^2 - p^2]a_1 x^{r+1} + \sum_{k=2}^{\infty}[\{(k+r)^2 - p^2\}a_k + a_{k+2}]x^{k+r} = 0 \tag{ค.3}$$

ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อสัมประสิทธิ์ของ x กำลังต่างๆเป็นศูนย์ ดังนั้นจะได้สมการดัชนี

$$r^2 - p^2 = 0 \tag{ค.4ก}$$

และ

$$[(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0 \tag{ค.4ข}$$

และเมื่อ $k \geq 2$ จะได้

$$[(k+r)^2 - p^2]a_k = -a_{k-2} \tag{ค.5ก}$$

หรือ

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(k+r)^2 - p^2} = -\frac{a_{k-2}}{[k+r-p][k+r+p]} \tag{ค.5ข}$$

จาก (ค.4a) จะได้รากของสมการคือ $r_1 = p$ และ $r_2 = -p$
แทนค่า $r = r_1 = p$ ใน (ค.4b) จะได้ว่า $a_1 = 0$ และจาก (ค.5b) จะได้

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2p)} \quad , \quad k \geq 2 \tag{ค.6}$$

เนื่องจาก $a_1 = 0$ ดังนั้นจาก (ค.5b) จะได้ว่า $a_3 = a_5 = ... = 0$ และสำหรับ k ที่เป็นเลขคู่ ให้ $k = 2m$ จะได้

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+p)} \quad , \quad m = 1,2,3,... \qquad (ค.7)$$

เนื่องจาก a_0 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ในที่นี้เราจะใช้ $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ ดังนั้น

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!(p+1)\Gamma(p+1)} = -\frac{1}{2^{2+p}1!\Gamma(p+2)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p} \cdot 2 \cdot 1!(p+2)\Gamma(p+2)} = \frac{1}{2^{4+p}2!\Gamma(p+3)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2 \cdot 3(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p} \cdot 3 \cdot 2!(p+3)\Gamma(p+3)} = -\frac{1}{2^{6+p}3!\Gamma(p+4)} \quad ,...$$

โดยทั่วไปจะได้

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+p} m!\Gamma(p+m+1)} \quad , \quad m = 0,1,2,3,... \qquad (ค.8)$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้ลงในผลเฉลยที่สมมติไว้จะได้ผลเฉลยเฉพาะของสมการเบสเซล ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $J_p(x)$ นั่นคือ

$$J_P(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m+r} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \qquad (ค.9)$$

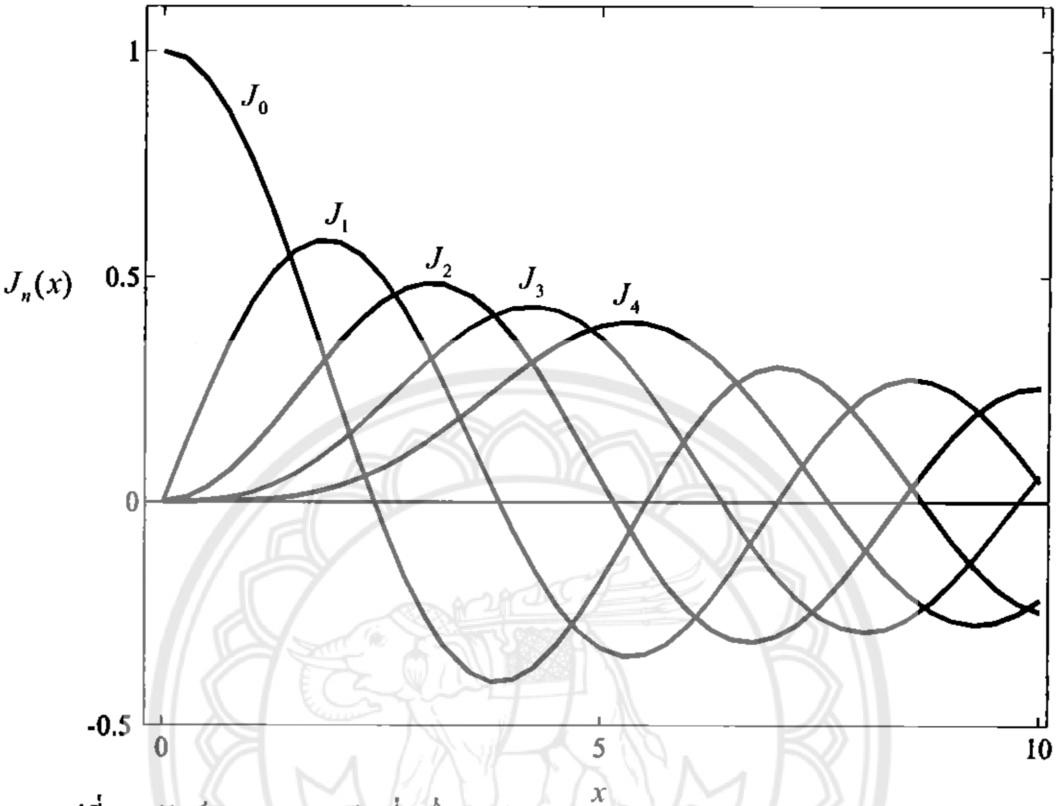
และเรียก $J_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ** p (Bessel function of the first kind of order p) สังเกตว่า $J_0(0) = 1$ และ $J_p(0) = 0$ สำหรับ $p > 0$

ฟังก์ชันเบสเซลที่พบมากในทางประยุกต์ คือ $J_0(x)$ และ $J_1(x)$ ซึ่งเขียนออกมาอย่างชัดเจนได้เป็น

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2(1!)^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + ... \qquad (ค.10ก)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 1!2!} + \frac{x^5}{2^5 2!3!} - \frac{x^7}{2^7 3!4!} + ... \qquad (ค.10ข)$$

และแสดงได้ดังรูปที่ 1ค.



รูปที่ ค.1 ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งอันดับ p (Bessel function of the first kind of order p)

ต่อไปพิจารณาหาผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซล
เนื่องจาก $r_1 - r_2 = p-(-p) = 2p$

กรณีที่ 1 ถ้า $2p$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็มด้วย
ใช้ $r_2 = -p$ หาผลเฉลยในทำนองเดียวกับการใช้ $r_1 = p$ จะได้ผลเฉลยที่สองของสมการเป็น

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \qquad (ค.11)$$

เนื่องจาก $J_{-p}(x)$ มีพจน์ x^{-p} ในขณะที่ $J_p(x)$ ไม่มี เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $J_p(x)$ และ $J_{-p}(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน แต่เพื่อจุดประสงค์หลายๆอย่าง จะสะดวกกว่าที่จะใช้

$$Y_p(x) = \frac{(\cos p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \qquad (ค.12)$$

แทน $J_{-p}(x)$ เป็นผลเฉลยที่สองของสมการเบสเซลและเรียก $Y_p(x)$ ว่า **ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ** p (Bessel function of the second kind of order p)

กรณีที่ 2 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคี่ จะได้ว่า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ $2p = N$

แทนค่า $r_2 = -p$ ลงในสมการ (ค.5b) จะได้

$$k(k-N)a_k = -a_{k-2} \quad , \quad k \geq 2 \qquad (ค.13)$$

เมื่อแทนค่า $k = 2,3,4,...$ ลงในสมการ (ค.13) เป็นลำดับไปจนกระทั่งถึง $k = N$ จะได้

$$a_3 = a_5 = ... = a_{N-2} = 0 \text{ และ } 0 \cdot a_N = a_{N-2} = 0 \qquad (ค.14)$$

เนื่องจาก a_N เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ดังนั้นเลือก $a_N = 0$ ผลที่ตามมาคือ เหลือสัมประสิทธิ์ a_k เมื่อ $k = 2,4,6,...$ และเราจะได้ผลเฉลยที่สองจากค่า $r_2 = -p$ เช่นเดียวกับกรณีที่ 1

กรณีที่ 3 ถ้า $2p$ เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า p เป็นจำนวนเต็ม ให้ $p = n$ จะได้

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \qquad (ค.15)$$

แต่ $\frac{1}{\Gamma(x)} = 0$ ทุกค่า $x = 0,-1,-2,...$ ดังนั้น

$$\frac{1}{\Gamma(-n+m+1)} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad m = 0,1,2,3,...,(n-1) \qquad (ค.16)$$

ผลที่ได้คือ

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(-n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \qquad (ค.17)$$

ให้ $k = m - n$ จะได้

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n)!\Gamma(k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$
$$= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}$$
$$= (-1)^n J_n(x) \qquad \text{(ค.18)}$$

ซึ่งแสดงว่า $J_n(x)$ และ $J_{-n}(x)$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน
ดังนั้นเมื่อ $p = n = 0,1,2,...$ เราจะได้ผลเฉลยของสมการเบสเซลเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นคือ $J_n(x)$ แต่เราสามารถหาผลเฉลยที่สองได้ในรูป $J_n(x)\int \frac{1}{xJ_n^2(x)}dx$ หรืออาจจะหาได้อีกอย่างในรูปของลิมิตของ $Y_p(x)$ เมื่อ $p \to n$ ซึ่งสามารถแสดงได้ว่าลิมิตนี้มีค่าและจะเขียนแทนด้วย $Y_n(x)$ นั่นคือ

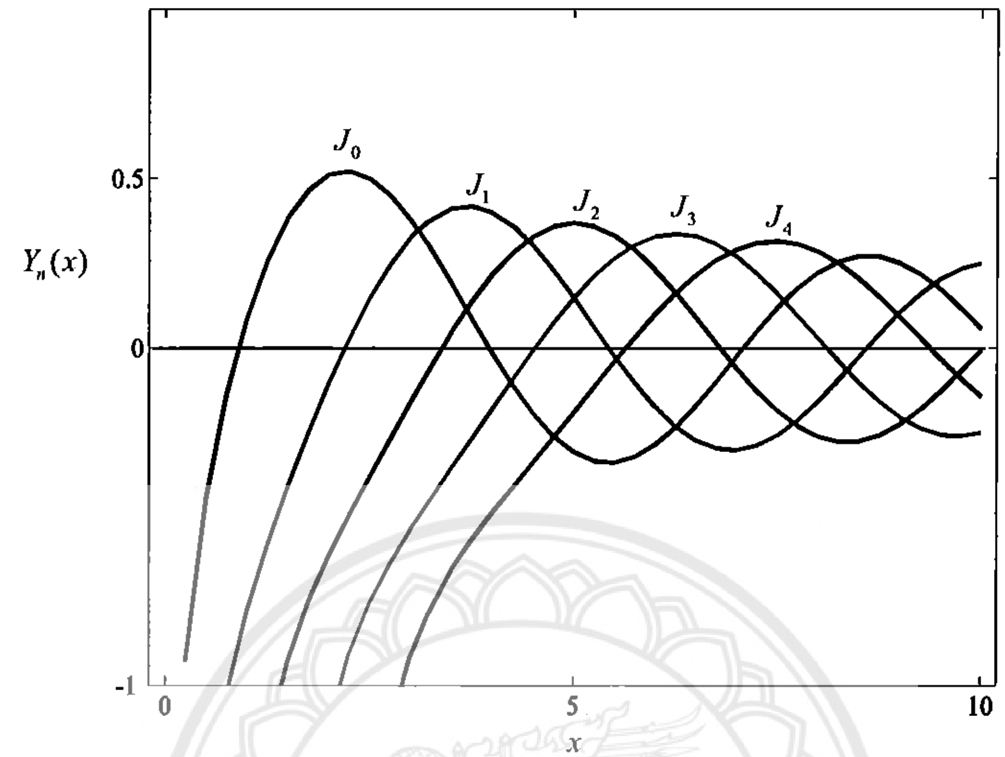
$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} Y_p(x) = \lim_{p \to n} \frac{(\cos p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi} \qquad \text{(ค.19)}$$

ดังนั้นผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p จะอยู่ในรูป

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x) \qquad \text{(ค.20ก)}$$

และถ้า p ไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนผลเฉลยสุดท้ายของสมการเบสเซลอันดับ p ได้อีกอย่าง คือ

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \qquad \text{(ค.20ข)}$$



รูปที่ ค.2 ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สองอันดับ p (Bessel function of the second kind of order p)

เอกลักษณ์ของฟังก์ชันเบสเซล (**Bessel function identities**)

จะพิจารณาคุณสมบัติที่สำคัญ ดังนี้

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \qquad (\text{ค}.21)$$

ถ้า p เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ จะได้

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p}}{2^{2m+p} \cdot m!(p+m)!}$$

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m!(p+m-1)!}$$

$$= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-1}$$

นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}[x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x) \tag{ค.22}$$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x) \tag{ค.23}$$

จาก (ค.22) จะได้

$$px^{p-1} J_p(x) + x^p J'_p(x) = x^p J_{p-1}(x)$$

$$J'_p(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \tag{ค.24}$$

จาก (ค.23) จะได้

$$J'_p(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x) \tag{ค.25}$$

นำ (ค.24) - (ค.25) จะได้

$$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) \tag{ค.26}$$

นำ (ค.24) + (ค.25) จะได้

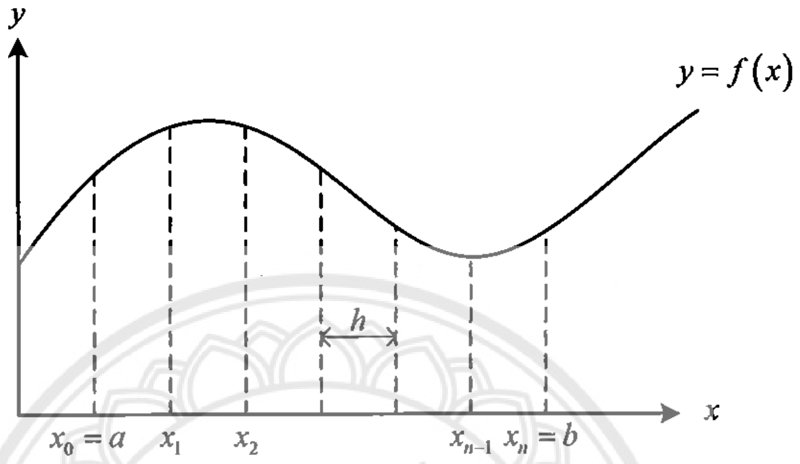
$$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x) \tag{ค.27}$$

สมการ (ค.26) มีประโยชน์ในการหาฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับสูงขึ้น โดยเขียนในพจน์ของฟังก์ชันเบสเซลที่มีอันดับน้อยกว่า

ภาคผนวก ง

การอินทิเกรตเชิงตัวเลขโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

การหาค่าอินทิเกรต $f(x)$ ในช่วง $a \le x \le b$ หาได้โดยการแบ่งพื้นที่การอินทิเกรตทั้งหมดออกเป็น n ช่วงเริ่มตั้งแต่ ช่วง $x_0 \le x \le x_1, x_1 \le x \le x_2, ..., x_{n-1} \le x \le x_n$ ดังที่แสดงในรูปที่ ง.1 สามารถเขียนได้ดังสมการ (ง.1)



รูปที่ ง.1 การแบ่งช่วงของการอินทริเกรตแบบสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (ง.1)$$

จากนั้นประมาณด้วยพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูและหาค่าผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมย่อยในช่วง a ถึง b ได้ดังสมการ (ง.2)

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \\ &= \frac{h}{2}\Big[\big(f(x_0)+f(x_1)\big)+\big(f(x_1)+f(x_2)\big)+...+\big(f(x_{n-1})+f(x_n)\big)\Big]\end{aligned} \qquad (ง.2)$$

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad (ง.3)$$

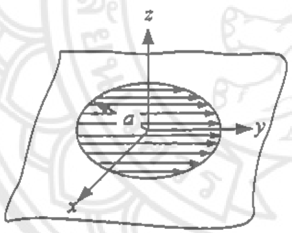
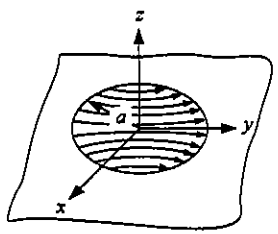
เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ใช้แทนจำนวนช่วงที่แบ่ง

ภาคผนวก จ

พารามิเตอร์ของสายอากาศช่องเปิด

พารามิเตอร์ของสายอากาศช่องเปิดวางบนระนาบดินไม่จำกัด สำหรับการกระจายแบบคงรูปและที่มีแบบรูป TE_{11} แสดงไว้ในตารารางที่ จ.1 และ จ.2 เมื่อ ตารางที่ จ.1 การกระจายของสนามบนช่องเปิด กระแสสมมูล และสนามในย่านสนามไกล และตารางที่ จ.2 แสดงพารามิเตอร์ของสายอากาศ

ตารางที่ จ.1 การกระจายของสนามบนช่องเปิด กระแสสมมูล และสนามในย่านสนามไกล

	Uniform Distribution Aperture On Ground Plane	TE_{11}-Mode Distribution Aperture On Ground Plane
Aperture distribution of tangential component (analytical)	$\mathbf{E}_a = \hat{\mathbf{a}}_y E_0 \quad \rho' \le a$	$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= \hat{\mathbf{a}}_\rho E_\rho + \hat{\mathbf{a}}_\phi E_\phi \\ \mathbf{E}_\rho &= E_0 J_1(X'_{11}\rho'/a)\sin\phi'/\rho' \\ \mathbf{E}_\phi &= E_0 J_1'(X'_{11}\rho'/a)\cos\phi'/\rho' \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rho' \le a \\ &X'_{11} = 1.841 \\ &' = \frac{\partial}{\partial \rho'} \end{aligned}$
Aperture distribution of tangential components (graphical)		
Equivalent	$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a & \rho' \le a \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$ $\mathbf{J}_s = 0 \quad$ everywhere	$\mathbf{M}_s = \begin{cases} -2\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_a & \rho' \le a \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$ $\mathbf{J}_s = 0 \quad$ everywhere

ตารางที่ จ.1(ต่อ) การกระจายของสนามบนช่องเปิด กระแสสมมูล และสนามในย่านสนามไกล

	Uniform Distribution Aperture **On Ground Plane**	**TE_{11}-Mode Distribution Aperture** **On Ground Plane**
Far-zone fields $Z = ka\sin\theta$ $X'_{11} = 1.841$	$E_r = H_r = 0$ $E_\theta = jC_1 \sin\phi \frac{J_1(Z)}{Z}$ $E_\phi = jC_1 \cos\theta\cos\phi \frac{J_1(Z)}{Z}$ $H_\theta = -E_\phi / \eta$ $H_\phi = E_\theta / \eta$ $C_1 = j\frac{ka^2 E_0 e^{-jkr}}{r}$	$E_r = H_r = 0$ $E_\theta = C_2 \sin\phi \frac{J_1(Z)}{Z}$ $E_\phi = C_2 \cos\theta\cos\phi \frac{J'_1(Z)}{1-(Z/X'_{11})^2}$ $H_\theta = -E_\phi / \eta$ $H_\phi = E_\theta / \eta$ $J'_1(Z) = J_0(Z) - J_1(Z)/Z$ $C_2 = j\frac{kaE_0 J_1(X'_{11}) e^{-jkr}}{r}$

ตารางที่ จ.2 พารามิเตอร์ของสายอากาศช่องเปิดสำหรับกรณีวางบนระนาบดินไม่จำกัด และที่มีแบบรูป TE_{11}

Half-power beamwidth (degrees)	E-plane $a \gg \lambda$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$
	H-plane $a \gg \lambda$	$\frac{29.2}{a/\lambda}$	$\frac{37.0}{a/\lambda}$
First null beamwidth (degrees)	E-plane $a \gg \lambda$	$\frac{69.9}{a/\lambda}$	$\frac{69.9}{a/\lambda}$
	H-plane $a \gg \lambda$	$\frac{69.9}{a/\lambda}$	$\frac{98.0}{a/\lambda}$
First side lobe Max. (to main Max.) (dB)	E-plane	-17.6	-17.6
	H-plane	-17.6	-26.2
Directivity D_{max} (dimensionless)		$\frac{4\pi}{\lambda^2}(\text{area}) = \frac{4\pi}{\lambda^2}(\pi a^2) = \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2$	$0.836\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^2 = 10.5\pi\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$

ภาคผนวก ฉ

โปรแกรมวิเคราะห์สายอากาศช่องเปิดที่มีภาคตัดขวางรูปวงกลม

โปรแกรมหาค่า สภาพเจาะจงทิศทาง

โปรแกรม MATLAB ได้รับการพัฒนาขึ้นเพื่อหาค่าสภาพเจาะจงทิศทางทั้งบนระนาบสนามไฟฟ้ากับสนามแม่เหล็กแม่เหล็ก สำหรับกรณีช่องเปิดวางบนระนาบดินไม่จำกัดอาศัยจะสมการ (2.24ก) - (2.24ฉ) และกรณีที่มีแบบแผนคลื่น TE_{11} จะใช้สมการ (2.38ก) - (2.38ฉ) ซึ่งเขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
clear all
clc
a=2;
k=2*pi;
int=120*pi;
num=361;
step=0.5*pi/(num-1);
temp1=(k*a);
temp3=4*pi*pi*a*a;
%*********************************************************
%                    E-Plane in Ground
%*********************************************************
phi=pi/2;
for ii=1:num
    theta=0+(ii-1)*step;
    temp4=abs(temp1*sin(theta));
    if temp4==0
        temp5=1;
    else
        temp5=abs(2*besselj(1,temp4))/(temp4); %sinx/x
    end
    temp8=sin(phi)*temp5;
    temp9=(temp8*temp8);
    temp10=(temp3*temp9);
    temp11(ii,1)=temp10;
       %%% loop %%%
    temp19(ii,1)=theta;
```

```
end
temp15=10*log10(temp11);
for ii=1:num
    if temp15(ii,1)>=-30
        temp16(ii,1)=temp15(ii,1);
    else
        temp16(ii,1)=-30;
    end
end
%*********************************************************
%                      H-Plane  in Ground
%*********************************************************
phi2=0;
for ii=1:num
    theta=0+(ii-1)*step;
    temp20=temp1*sin(theta);
    if temp20==0
        temp21=1;
    else
        temp21=(2*besselj(1,temp20)/temp20);
    end
    temp24=cos(theta)*cos(phi2)*temp21;
    temp25=(temp24*temp24);
    temp26=(temp3*temp25);
    temp27(ii,1)=temp26;
end
temp31=10*log10(temp27);
for ii=1:num
    if temp31(ii,1)>=-30
        temp32(ii,1)=temp31(ii,1);
    else
        temp32(ii,1)=-30;
    end
```

```
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
clc
a=3;
k=2*pi;
int=120*pi;
num=a*a*102;
step=(0.5*pi)/(num-1);
temp1=(k*a);
temp3=4*pi*pi*a*a;
lift=0;
right=pi;
step_prad=(right-lift)/num;
sum=0;
sum1=0;
phi=pi/2;
temp11=temp1*(besselj(1,1.841));%c2
%*****************************************************
%                    E-Plane TE-11
%*****************************************************
%find prad_e
 for aa=1:num
  for ii=1:num
    theta=0+(ii-1)*step;
    temp_4=temp1*sin(theta);
   if temp_4==0
      temp_5=1;
   else
      temp_5=abs(2*(besselj(1,temp_4))/(temp_4));
   end
    temp_10=temp_5/2;
```

```
      temp_12=((temp11*temp_10)^2)/(2*int);
      f_prad_elift=temp_12*(sin(lift+(ii-1)))*step_prad;
      f_prad_eright=temp_12*(sin(lift+(ii)))*step_prad;
      sum=sum+((f_prad_elift+f_prad_eright)*0.5*step_prad);
    end
  prad_e=2*pi*sum;
  end
phi=pi/2;
   for ii=1:num
      theta=0+(ii-1)*step;
      temp4=temp1*sin(theta);
       if temp4==0
         temp5=1;
       else
          temp5=abs((2*besselj(1,temp4))/(temp4));
       end
      temp10=(sin(phi)*((temp5)/2));
      temp12=(4*pi*((temp11*temp10)^2)/(2*int))/prad_e;
      temp13(ii,1)=(temp12);
      temp19(ii,1)=theta;
   end
temp50=10*log10(temp13);
   for ii=1:num
      if temp50(ii,1)>=-30
          temp51(ii,1)=temp50(ii,1);
      else
          temp51(ii,1)=-30;
      end
   end
%*****************************************************
%                      H-Plane TE11
%*****************************************************
phi2=0;
```

```
%find prad_h
 for aa=1:num
  for bb=1:num
    theta=0+(bb-1)*step;
    temp_20=temp1*sin(theta);
    if temp_20==0
       temp_21=1;
    else
       temp_21=abs(2*besselj(1,temp_20)/temp_20); %sinx/x
    end
    temp_22=abs(2*besselj(0,temp_20));
    temp_23=(temp_22/2)-(temp_21/2);
    temp_24=(1-(temp_20/1.841)^2);
    temp_25=cos(theta)*(temp_23/temp_24);
    temp_27=((temp11*temp_25)^2)/(2*int);
    f_prad_hlift=temp_27*(sin(lift+(bb-1)))*step_prad;
    f_prad_hright=temp_27*(sin(lift+(bb)))*step_prad;
    sum1=sum1+((f_prad_hlift+f_prad_hright)*0.5*step_prad);
 end
 prad_h=sum1*2*pi;
end
 for cc=1:num
   theta=0+(cc-1)*step;
   temp20=temp1*sin(theta);
   if temp20==0
      temp21=1;
   else
      temp21=abs(2*besselj(1,temp20)/temp20); %sinx/x
   end
   temp22=(2*besselj(0,temp20));
   temp23=(temp22/2)-(temp21/2);
   temp24=(1-(temp20/1.841)^2);
   temp25=cos(theta)*cos(phi2)*(temp23/temp24);
```

```
      temp27=((4*pi*(temp11*temp25)^2)/(2*int))/prad_h;
      temp28(cc,1)=(temp27);
      temp19(cc,1)=theta;
    end
  temp61=10*log10(temp28);
    for dd=1:num
      if temp61(dd,1)>=-30
         temp62(dd,1)=temp61(dd,1);
      else
          temp62(dd,1)=-30;
      end
    end
```

โปรแกรมหาค่า ระดับพูข้าง (SLL)

ระดับพูข้างสำหรับสายอากาศช่องเปิดเมื่ออาศัยวิธีเชิงตัวเลข เขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%*****************************************
%               Side Loop Level
%*****************************************
for jj=2:num
    atheta=(jj-1)*step;
    if temp_x(jj,1)>=temp_x(jj-1,1)& temp_x(jj,1)>=temp_x(jj+1,1)
        temp65(jj,1)=temp_x(jj,1);
        temp66=atheta;
    else
        temp_x(jj,1)>temp_x(jj-1,1);
    end
 end
temp67=max(temp_x)/max(temp65);
SLL=10*log10(temp67);
theta_degree=temp66*180/pi;
```

โปรแกรมหาค่าความกว้างลำคลื่นครึ่งกำลัง (HPBW)

ระดับพูข้างสำหรับสายอากาศช่องเปิดเมื่ออาศัยวิธีเชิงตัวเลข ร่วมกับการประมาณแบบเชิงเส้น (linear interpolation) เขียนโปรแกรมได้ดังนี้

```
%**************************************************
%              Half Power Beamwidth
%**************************************************
temp68 =max(temp_x)/2;
for ii=2:(num+1)
    theta=(ii-1)*step;
    theta_now(ii,1)=theta;
    temp69=temp_x(ii-1,1)>temp68;
    temp70=temp_x(ii,1)<temp68;
    if  temp69&temp70
        break
    end
end
del_theta=theta_now(ii,1)-theta_now(ii-1,1);
del_dir=temp_x(ii,1)-temp_x(ii-1,1);
temp71=temp68-temp_x(ii-1,1);
temp72=theta_now(ii-1,1)+del_theta*temp71/del_dir;
hpbw_degree=2*temp72*180/pi;
```