บทที่ 3
การหาค่าพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคโดยใช้แนวคิดพีชคณิตเชิงเส้น

ในบทนี้ ทีมวิจัยจะได้นำเสนอวิธีการใหม่ในการวิเคราะห์หาค่าพารามิเตอร์ฮาร์โมนิค ขนาดและมุมเฟสของสัญญาณแรงดันไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้าที่เวลาจริงในระบบไฟฟ้าโดยการใช้แนวคิดวิธีพีชคณิตพร้อมกับหาคำตอบพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคด้วยการใช้เทคนิค l_1 Norm และ l_2 Norm [7]

3.1 แบบจำลองพีชคณิตเชิงเส้น

ในระบบไฟฟ้ากำลัง สมมุติว่า $x(t)$ เป็นสัญญาณแรงดันไฟฟ้า หรือกระแสไฟฟ้า ที่เวลาจริง t [วินาที] ที่วัดได้จากระบบ เมื่อ $t \geq 0$ และ $\hat{x}(t)$ เป็นสัญญาณแรงดันไฟฟ้า หรือกระแสไฟฟ้า ที่เวลาจริง t ที่ได้จากการประมาณค่า เมื่อ $t \geq 0$ ตามปกติทั่วไป $\hat{x}(t)$ สามารถเขียนในรูปสัญญาณซายน์ ได้ดังนี้

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k) \qquad (3\text{-}1)$$

โดยที่ A_k และ ϕ_k [เรเดียน] คือขนาดและมุมเฟสของสัญญาณที่ความถี่เชิงมุม ω_k [เรเดียนต่อวินาที] ณ ฮาร์โมนิคลำดับที่ k ตามลำดับ และ N_h เป็นจำนวนฮาร์โมนิคทั้งหมด สำหรับค่าของ ω_k สามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ว่า

$$\omega_k = k(2\pi f_0) \qquad (3\text{-}2)$$

โดยที่ f_0 คือ ความถี่พื้นฐานของสัญญาณที่ทราบค่าในหน่วย [Hz] เช่น สำหรับระบบไฟฟ้ากำลังในประเทศไทย ความถี่พื้นฐานของสัญญาณแรงดันไฟฟ้า หรือกระแสไฟฟ้าที่ใช้ คือ 50 [Hz] ดังนั้น ความถี่เชิงมุม ω_k ในสมการ (3-2) ทุกฮาร์โมนิคเป็นตัวพารามิเตอร์ที่ทราบค่าแล้ว ส่วนขนาด A_k และมุมเฟส ϕ_k เป็นพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคอันดับที่ k ที่ไม่ทราบค่าและทีมวิจัยต้องการหาคำตอบ A_k และ ϕ_k เทียบกับเวลาจริง t [วินาที] โดยการใช้แนวคิดสมการพีชคณิตเชิงเส้นที่จะกล่าวถึงต่อไป

จากสมการ (3-1) และ (3-2) และกำหนด N เป็นจำนวนข้อมูลทั้งหมดของสัญญาณ จะสามารถประมาณการสัญญาณอาจเขียนใหม่ในรูปแบบเวลาเต็มหน่วยดัชนี n สำหรับ $n \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$ ได้เป็น

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{N_h} A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N_s} + \phi_k\right) \qquad (3\text{-}3)$$

อัตราการสุ่มตัวอย่างข้อมูล N_s ในสมการ (3-3) จะนิยามได้ว่า

$$N_s = f_s / f_0 \tag{3-4}$$

โดยที่ f_s คือความถี่สุ่มตัวอย่างข้อมูลในหน่วย [รอบ/วินาที] และ f_0 คือความถี่พื้นฐานของสัญญาณที่วัดได้ในระบบที่มีหน่วย [รอบ/วินาที]

จากสมการออยเลอร์และเอกลักษณ์ตรีโกณ $2\cos\theta = (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ ค่าของการประมาณการข้อมูล $\hat{x}[n]$ ในสมการ (3-3) สามารถถูกเขียนใหม่ด้วยผลรวมของเอ็กโปเนนเชียล อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\hat{x}[n] &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_h} A_k e^{j\left(\frac{2\pi kn}{N_s}+\phi_k\right)} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_h} A_k e^{-j\left(\frac{2\pi kn}{N_s}+\phi_k\right)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_h}\left(A_k e^{j\phi_k}\right)e^{j2\pi kn/N_s} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_h}\left(A_k e^{-j\phi_k}\right)e^{-j2\pi kn/N_s}
\end{aligned} \tag{3-5}$$

การประมาณการข้อมูลที่ได้รับจากสมการ (3-5) สำหรับ $n \in \{P, P+1, \ldots, N-1\}$ ในรูปแบบเวลาเต็มหน่วยดัชนี n และกำหนดให้ P คือจำนวนข้อมูลตัวอย่างที่ใช้ในการหาค่าพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคในแต่ละเวลาเต็มหน่วยดัชนี n โดยถ้า $P \geq 2N_h$ แล้วจะสามารถเขียน $\hat{x}[n]$ อยู่ในรูปแบบเวกเตอร์ได้ว่า

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(n-P) \\ \hat{x}(n-P+1) \\ \vdots \\ \hat{x}(n-2) \\ \hat{x}(n-1) \end{bmatrix}}_{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix}
\frac{e^{\frac{j2\pi(n-P)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi(n-P)}{N_s}}}{2} & \cdots & \frac{e^{\frac{j2\pi N_h(n-P)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi N_h(n-P)}{N_s}}}{2} \\
\frac{e^{\frac{j2\pi(n-P+1)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi(n-P+1)}{N_s}}}{2} & \cdots & \frac{e^{\frac{j2\pi N_h(n-P+1)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi N_h(n-P+1)}{N_s}}}{2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{e^{\frac{j2\pi(n-2)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi(n-2)}{N_s}}}{2} & \cdots & \frac{e^{\frac{j2\pi N_h(n-2)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi N_h(n-2)}{N_s}}}{2} \\
\frac{e^{\frac{j2\pi(n-1)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi(n-1)}{N_s}}}{2} & \cdots & \frac{e^{\frac{j2\pi N_h(n-1)}{N_s}}}{2} & \frac{e^{-\frac{j2\pi N_h(n-1)}{N_s}}}{2}
\end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 e^{j\phi_1} \\ A_1 e^{-j\phi_1} \\ \vdots \\ A_{N_h} e^{j\phi_{N_h}} \\ A_{N_h} e^{-j\phi_{N_h}} \end{bmatrix}}_{a}$$

หรือ

$$\underline{\hat{x}} = A\underline{a} \tag{3-6}$$

โดยที่ A คือเมตริกซ์ข้อมูลขนาด $P \times 2N_h$ ที่ทราบค่า เวกเตอร์ $\underline{\hat{x}}$ เป็นเวกเตอร์การประมาณของข้อมูลขนาด $P \times 1$ และ $\underline{a}$ คือเวกเตอร์พารามิเตอร์ขนาด $2N_h \times 1$ ที่เวลาเต็มหน่วยดัชนี n

ต่อมา พิจารณาค่าความผิดพลาดที่ได้จากการประมาณการข้อมูลตัวอย่าง $e[n]$ แต่ละเวลาเต็มหน่วยดัชนี $n \in \{P-1, P, P+1, \ldots, N-1\}$ ได้เป็น

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] \tag{3-7}$$

โดยที่ $x[n]$ คือ ค่าของข้อมูลสัญญาณที่วัดได้ในรูปแบบเวลาเต็มหน่วยดัชนี n ที่มีอัตราการสุ่มตัวอย่างข้อมูล N_s และ $\hat{x}[n]$ เป็นค่าของการประมาณการข้อมูลสัญญาณ $x[n]$ ในขณะที่ $e[n]$ ค่าของความผิดพลาดที่ได้จากการประมาณการข้อมูลในรูปแบบเวลาเต็มหน่วยดัชนี n ซึ่งสามารถเขียน $e[n]$ ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบเวกเตอร์ ได้ดังนี้

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[n-P] \\ e[n-P+1] \\ \vdots \\ e[n-2] \\ e[n-1] \end{bmatrix}}_{\underline{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x[n-P] \\ x[n-P+1] \\ \vdots \\ x[n-2] \\ x[n-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}[n-P] \\ \hat{x}[n-P+1] \\ \vdots \\ \hat{x}[n-2] \\ \hat{x}[n-1] \end{bmatrix}}_{\hat{\underline{x}}}$$

หรือ จากสมการ (3-6) เขียนใหม่ได้ว่า

$$\underline{e}(\underline{a}) = \underline{x} - \hat{\underline{x}} = \underline{x} - A\underline{a} \tag{3-8}$$

โดยที่ $\underline{e}$ เป็นเวกเตอร์ความผิดพลาด (Error Vector) ที่มีขนาด $P \times 1$ ซึ่งประกอบด้วย P สมาชิกในการเลือกคำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิค $\underline{a}$ ในสมการ (3-6) สำหรับดัชนี $n \in \{P-1, P, P+1, \ldots, N-1\}$ โดยการหาค่าคำตอบของขนาด l_p Norm น้อยที่สุดของเวกเตอร์ความผิดพลาด ได้ดังสมการต่อไปนี้

$$\min_{a \in C^{2N_h \times 1}} \left\| \underline{x} - A\underline{a} \right\|_p = \left\| \underline{x} - A\underline{a}^0 \right\|_p \tag{3-9}$$

โดยที่ $C^{2N_h \times 1}$ คือเซตของเวกเตอร์ขนาด $2N_h \times 1$ ที่มีสมาชิกเป็นเลขเชิงซ้อน และ $\underline{a}^0$ เป็นคำตอบที่เหมาะสมของพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคของสัญญาณที่เวลาเต็มหน่วยดัชนี n สำหรับค่าของ $n \in \{P-1, P, P+1, \ldots, N-1\}$ สำหรับขั้นตอนการหาคำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิค $\underline{a}^0$ จะพิจารณาเพียงสองกรณี คือ กรณี $p = 1$ และกรณี $p = 2$ เพื่อทำการเปรียบเทียบผลที่ได้รับทั้งสองกรณีดังกล่าวซึ่งจะได้กล่าวในตอนที่ 3.2 ต่อไป

3.2 วิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคโดยใช้เทคนิค l_1 Norm

สำหรับกรณี $p=1$ คำตอบเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิค $\underline{a}^0$ ที่เหมาะสมในสมการ (3-9) จะเริ่มด้วยการเขียนสมการปัญหาได้เป็น

$$\min_{a\in C^{2N_h+1}} f_1(\underline{a}) = \min_{a\in C^{2N_h+1}} \left\|\underline{x} - A\underline{a}\right\|_1 = \left\|\underline{x} - A\underline{a}_1^0\right\|_1 \qquad (3\text{-}10)$$

โดยที่ $f_1(\underline{a})$ คือ ฟังก์ชั่นวิเคราะห์สำหรับปัญหากรณี $p=1$ ที่ถูกนิยามได้เป็น $f_1(\underline{a}) = \left\|\underline{x} - A\underline{a}\right\|_1$ การหาค่าคำตอบที่เหมาะสมสำหรับสมการ (3-10) ไม่มีสมการที่แน่ชัด และจำเป็นต้องใช้วิธีการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Methods) ซึ่งมีอัลกอริทึมต่างๆ มากมายในการหาค้นหาค่าที่น้อยที่สุดของขนาด l_1 Norm โดยทั่วไป จะใช้โปรแกรมเชิงเส้น (linear programming) แต่สำหรับโครงงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยจะนำเสนอวิธีการหาคำตอบนี้ด้วยวิธี Perturbation [7] การหาคำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคด้วยเทคนิค l_1 Norm ที่นำเสนอโดย Cadzow [7] พอสรุปได้ 6 ขั้นตอนดังต่อนี้

<u>ขั้นตอนที่ 1</u>:

เลือกเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคคำตอบเริ่มต้นใดๆ $\underline{a}$ อาจเป็นเวกเตอร์ศูนย์ก็ได้ และนำเวกเตอร์นี้ไปคำนวณหาเวกเตอร์ความผิดพลาด $\underline{e}(\underline{a})$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(\underline{x} - A\underline{a})$

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>:

หาจำนวนสมาชิกที่มีค่าศูนย์ทั้งหมดในเวกเตอร์ความผิดพลาด $\underline{e}(\underline{a}) = \underline{x} - A\underline{a}$ สมมุติว่ามีจำนวน N_0 ต่อจากนั้นแยกองค์ประกอบของเวกเตอร์ความผิดพลาด $\underline{e}(\underline{a})$ ออกเป็น

$$\underline{e}_1(\underline{a}) = \underline{x}_1 - A_1\underline{a} = \underline{0} \text{ และ } \underline{e}_2(\underline{a}) = \underline{x}_2 - A_2\underline{a} \qquad (3\text{-}11)$$

โดยที่ $\underline{x}_1$ และ A_1 เป็นเวกเตอร์ข้อมูลขนาด $N_0 \times 1$ และเมตริคขนาด $N_0 \times 2N_h$ ซึ่งสอดคล้องกับสับเซ็ทของจำนวน N_0 ของสมการเวกเตอร์ความผิดพลาด $\underline{e}(\underline{a})$ ที่มีสมาชิกเป็นศูนย์ ขณะที่ $\underline{x}_2$ และ A_2 เป็นเวกเตอร์ข้อมูลขนาด $P \times N_0$ และเมตริคขนาด $(P - N_0)\times 2N_h$ ซึ่งสอดคล้องกับสับเซ็ทของจำนวน $P - N_0$ ของสมการเวกเตอร์ความผิดพลาดที่เหลือสมาชิก $\underline{e}(\underline{a})$ ที่ไม่เป็นศูนย์

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>:

ถ้าจำนวนศูนย์ (N_0) ในสมาชิกของเวกเตอร์ความผิดพลาด $\underline{e}(\underline{a})$ มีค่าน้อยกว่าค่า $2N_h$ ให้ไปทำขั้นตอนที่ 4 และถ้า $N_0 \geq 2N_h$ แล้วให้ข้ามไปทำขั้นตอนที่ 6

<u>ขั้นตอนที่ 4</u>:

กำหนดให้เวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคคำตอบตัวใหม่ $\underline{a}$ คือ $\underline{a}+\varepsilon^0\underline{\Delta}$ เมื่อ เวกเตอร์ทิศทาง $\underline{\Delta}$ ถูกเลือกให้อยู่ในนัลสเปซ (Null space) ของเมตริค A_1 กล่าวคือ

$$A_1\underline{\Delta}=\underline{0} \tag{3-12}$$

และสำหรับทุกค่าของ $\underline{u}_m^T A_2\underline{\Delta}\neq 0$ จะได้ค่า ε^0 เป็นดังสมการ

$$\left\|\underline{e}_2(\underline{a})-\varepsilon^0 A_2\underline{\Delta}\right\|_1=\min_{\varepsilon_m=\underline{u}_m^T\underline{e}_2(\underline{a})/\underline{u}_m^T A_2\underline{\Delta}}\left\|\underline{e}_2(\underline{a})-\varepsilon_m A_2\underline{\Delta}\right\|_1 \tag{3-13}$$

โดยที่ $\underline{u}_m$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยขนาด $(P-N_0)\times 1$ ซึ่งมีสมาชิกเท่ากับหนึ่ง ณ ตำแหน่งสมาชิกที่ m มีเท่ากับหนึ่ง นอกนั้นมีค่าเป็นศูนย์ จะพบว่าเวกเตอร์ความผิดพลาดตัวใหม่ $\underline{e}(\underline{a}+\varepsilon^0\underline{\Delta})$ มีจำนวนสมาชิกที่มีค่าศูนย์อย่างน้อย (N_0+1) และ $f_1(\underline{a}+\varepsilon^0\underline{\Delta})=f_1(\underline{a})$

<u>ขั้นตอนที่ 5</u>:

ถ้าค่า N_0 ของเวกเตอร์ความผิดพลาดตัวใหม่ $\underline{e}(\underline{a}+\varepsilon^0\underline{\Delta})$ มีจำนวนสมาชิกที่มีค่าศูนย์น้อยกว่า $2N_h$ แล้วให้ไปทำขั้นตอนที่ 4 นอกจากเงื่อนไขนี้ให้ทำขั้นตอนที่ 6

<u>ขั้นตอนที่ 6</u>:

กำหนดให้เวกเตอร์ตรวจสอบ $\underline{c}$ มีค่าเท่ากับ

$$\underline{c}=\left[A_1^T\right]^{-1}A_2^T\,\mathrm{sgn}[\underline{x}_2-A_2\underline{a}] \tag{3-14}$$

โดยที่ $\mathrm{sgn}(\underline{e}_2)$ คือ เวกเตอร์ขนาด $(P-N_0)\times 1$ ที่มีค่าเป็น

$$\mathrm{sgn}(\underline{e}_2)=\begin{bmatrix}\mathrm{sgn}(e_2(1))\\ \mathrm{sgn}(e_2(2))\\ \vdots\\ \mathrm{sgn}(e_2(P-N_0))\end{bmatrix}\ \text{และ}\ \mathrm{sgn}(\beta)=\begin{cases}1 & ,\beta>0\\ 0 & ,\beta=0\\ -1 & ,\beta<0\end{cases} \tag{3-15}$$

โดยถ้า $\|\underline{c}\|_\infty>1$ แล้วจะต้องเลือกค่าคำตอบตัวใหม่ $\underline{a}$ เป็น $\underline{a}+[\alpha^0 A^{-1}\underline{u}_{n1}]$ แล้วให้ทำขั้นตอนที่ 3 แต่ถ้า $\|\underline{c}\|_\infty<1$ แล้วเวกเตอร์ $\underline{a}$ คือคำตอบที่เหมาะสมของปัญหาสมการ (3-10)

3.3 วิธีการหาคำตอบพารามิเตอร์ฮาร์โมนิคโดยใช้เทคนิค l_2 Norm

จากปัญหาในสมการ (3-9) สำหรับกรณี $p = 2$ สามารถเขียนสมการปัญหาใหม่ได้เป็น

$$\min_{a \in C^{2N_h+1}} f_2(\underline{a}) = \min_{a \in C^{2N_h+1}} \left\| \underline{x} - A\underline{a} \right\|_2 = \left\| \underline{x} - A\underline{a}_2^0 \right\|_2 \qquad (3\text{-}16)$$

โดยที่ $f_2(\underline{x})$ คือฟังก์ชั่นวิเคราะห์ที่ถูกกำหนดไว้เป็นดังสมการ $f_2(a) = \|\underline{x} - A\underline{a}\|_2$ เงื่อนไขที่จำเป็นของ $\underline{a} \in C^{2N_h+1}$ ที่จะทำให้ค่าของฟังก์ชั่น $f_2(\underline{a})$ มีค่าน้อยที่สุดก็ต่อเมื่อ $f_2^2(\underline{a})$ มีค่าน้อยที่สุดเช่นกัน เนื่องจากว่า $f_2(\underline{a})$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ (Convex Function) ดังนั้นเกรเดียนเวกเตอร์ (Gradient Vector) ของฟังก์ชั่น $f_2^2(\underline{a})$ สำหรับเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคที่เหมาะสมคงที่ $\underline{a}_2^0 \in C^{2N_h+1}$ เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ โดยการใช้พื้นฐานของวิชาแคลคูลัส พบว่าค่าเวกเตอร์เกรเดียนของฟังก์ชั่น $f_2^2(\underline{a})$ ถูกกำหนดให้เป็น

$$\begin{aligned}\nabla_a f_2^2(\underline{a}) &= \nabla_a[(\underline{x} - A\underline{a})^T(\underline{x} - A\underline{a})] = \nabla_a[(\underline{x}^T\underline{x} - \underline{x}^T A\underline{a} - \underline{a}^T A^T \underline{x} + \underline{a}^T A^T A\underline{a}] \\ &= \nabla_a[\underline{a}^T A^T A\underline{a}] - \nabla_a[\underline{x}^T A\underline{a}] - \nabla_a[\underline{a}^T A^T \underline{x}] = 2A^T A\underline{a} - 2A^T\underline{x}\end{aligned}$$

ณ ค่าเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคคงที่ $\underline{a}_2^0$ ทำให้ค่าเกรเดียนเวกเตอร์ของฟังก์ชั่น $f_2^2(\underline{a})$ เท่ากับศูนย์ สามารถเขียนได้เป็นสมการปกติ (Normal Equations) ดังนี้

$$A^T A\underline{a}_2^0 = A^T\underline{x} \qquad (3\text{-}17)$$

ถ้าเมตริค $A^T A$ ขนาด $2N_h \times 2N_h$ มีค่าดีเทอร์มิแนนท์ไม่เป็นศูนย์ นำอินเวอร์สเมตริค $A^T A$ คูณเข้าข้างหน้าทั้งสองข้างของสมการได้คำตอบที่เหมาะสมของเวกเตอร์พารามิเตอร์ฮาร์โมนิคเป็น ดังนี้

$$\underline{a}_2^0 = (A^T A)^{-1} A^T\underline{x} \qquad (3\text{-}18)$$

แต่ถ้าเมตริค A เป็นซิงกูลาร์เมตริค (Singular matrix) แล้ว จะได้คำตอบตัวแปรที่เหมาะสมอยู่ในรูปของสมการ ดังนี้

$$\underline{a}_2^0 = pinv(A)\underline{x} \qquad (3\text{-}19)$$

โดยที่ $pinv(A)$ เรียกอินเวอร์สเทียมของเมตริค A ซึ่งได้มาจากการประมาณเมตริค A ในรูปแบบของ SVD (Single Value Decomposition) และหาอินเวอร์สของกลุ่มผลคูณของ SVD เมตริคนี้