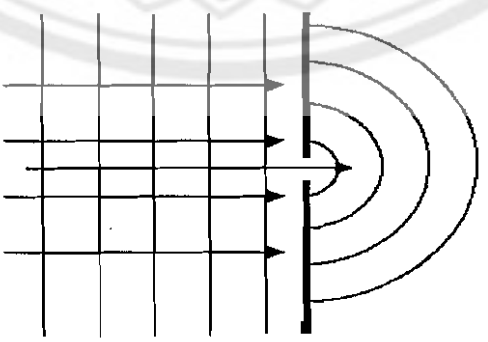
บทที่ 3

การกระจายคลื่นจากแหล่งกำเนิดอาร์เรย์

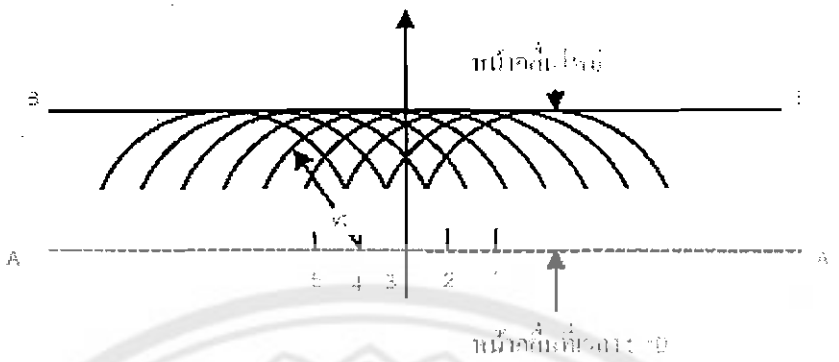
ในบทนี้จะกล่าวถึงหลักของฮอยเกนส์ แสดงให้เห็นภาพโดยรวมในการเบนของทิศทางลำคลื่นหลัก จากนั้นจึงอธิบายคุณสมบัติของการแพร่กระจายคลื่นจากแหล่งกำเนิดแบบต่างๆ ทั้งพอยซอร์สและตัวเรดิเอเตอร์ ซึ่งในหัวข้อที่ 3 และ 5 ได้กล่าวถึงแหล่งกำเนิดอาร์เรย์แบบเส้นตรง เป็นการอธิบายทฤษฎีอาร์เรย์ โดยเริ่มจากการหาที่มาของอาร์เรย์แฟคเตอร์ และหลักการคูณรูปแบบการกระจายคลื่น ทั้งนี้ยังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการเปลี่ยนแปลงทิศทางลำคลื่นหลักกับการเปลี่ยนแปลงเฟสของคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวเรดิเอเตอร์แต่ละตัว

1. หลักของฮอยเกนส์ (Huygens' principle)

การเคลื่อนที่ของคลื่นอาจจะมีหน้าคลื่นเป็นวงกลมหรือแนวตรง หรือลักษณะใดลักษณะหนึ่งขึ้นอยู่กับแหล่งกำเนิดคลื่น คลื่นจะเคลื่อนที่ไปเรื่อย ๆ ถ้าไม่มีสิ่งกีดขวางหรือไม่มีการเปลี่ยนตัวกลางในการเคลื่อนที่ ในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านสิ่งกีดขวางในลักษณะต่าง ๆ แล้วคลื่นจะเกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของหน้าคลื่นในการเคลื่อนที่ เช่น เมื่อหน้าคลื่นตรงเคลื่อนที่ผ่านช่องแคบ ๆ จะเกิดการเลี้ยวเบนเกิดขึ้น โดยรูปแบบของหน้าคลื่นจะเปลี่ยนเป็นหน้าคลื่นวงกลม ดังภาพ 7 การเปลี่ยนแปลงในลักษณะเช่นนี้เป็นไปตามหลักของฮอยเกนส์ที่ว่า ทุกทุกจุดบนหน้าคลื่นใด ๆ อาจถือ ได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดคลื่นใหม่ซึ่งจะทำให้เกิดคลื่นออกไปรอบ ๆ คลื่นใหม่นี้จะมีอัตราเร็วเท่ากับอัตราเร็วของการเคลื่อนที่ของคลื่นเดิม ดังนั้นถ้าทราบลักษณะของหน้าคลื่นเดิมก็จะสามารถใช้หลักเรขาคณิตหาหน้าคลื่นใหม่ตามหลักของฮอยเกนส์ โดยการสร้างผิวซึ่งสัมผัสกับหน้าคลื่นใหม่ที่เป็นคลื่นเล็กๆ เหล่านั้นได้



ภาพ 7 การเลี้ยวเบนของคลื่นหน้าตรงผ่านช่องแคบเดียว



ภาพ 8 การใช้หลักของฮอยเกนส์ สร้างหน้าคลื่นใหม่

จากภาพ 8 ให้คลื่นระนาบ A ที่มีหน้าคลื่นเส้นตรงเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v พิจารณาจุด 1, 2 , 3, 4 และ 5 ซึ่งถือเป็นจุดกำเนิดของคลื่นเล็ก ๆ ก็จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v เช่นกัน การหาตำแหน่งของหน้าคลื่นเมื่อเวลาผ่านไป t ทำได้โดยสร้างวงกลมเล็ก ๆ รัศมี r ซึ่งมีค่าเท่ากับ vt โดยจุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุด 1, 2 , 3, 4 และ 5 หน้าคลื่นใหม่ที่เกิดขึ้นคือ เส้นตรงที่ลากสัมผัสกับวงกลมที่มีรัศมี vt เหล่านี้

ถ้าสมมุติให้แหล่งกำเนิดคลื่นเล็กๆ ดังกล่าว มีการแพร่กระจายคลื่นที่มีค่าเฟสล้าหลังกันตามลำดับ หน้าคลื่นใหม่ในภาพ 8 จะเบนออกจากจุดกึ่งกลางของแหล่งกำเนิด ทิศทางการเคลื่อนที่ของหน้าคลื่นใหม่จากแหล่งกำเนิดคลื่นลักษณะนี้จะเป็นไปตามหลักของฮอยเกนส์ และการคำนวณทิศทางของหน้าคลื่นอธิบายได้ด้วยทฤษฎีอาร์เรย์ ดังจะได้กล่าวต่อไป

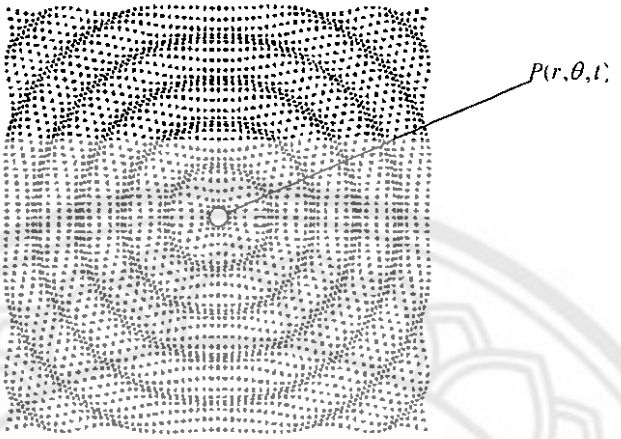
2. **พอยซอร์ส** (Point source)

พอยซอร์ส หมายถึง แหล่งกำเนิดคลื่นที่สมมุติขึ้นเพื่ออธิบายการแพร่กระจายคลื่นที่เคลื่อนที่ในตัวกลาง โดยให้มีลักษณะเป็นจุดกำเนิดคลื่นทรงกลมที่มีรัศมีเล็กมากๆ มีการแพร่กระจายคลื่นทุกทิศทาง ดังภาพ 9 สมการความดันคลื่นที่กระจายจากพอยซอร์สในทิศทาง r เขียนได้เป็น [1]

$$p(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3.1)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นของตัวกลาง, c คือ ความเร็วคลื่นเสียง, k คือ ค่าคงตัวของการเคลื่อนที่ (Propagation constant) หรือเลขคลื่น(wave number) มีค่าเท่ากับ $2\pi/\lambda$, r คือ ระยะทางจากแหล่งกำเนิดถึงจุดสังเกต และ Q คือ แอมปลิจูด [2] สมการที่ (3.1) แสดงถึงความ

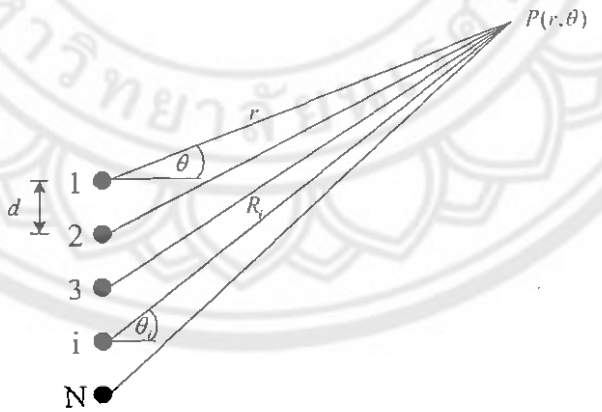
ดันคลื่นจากพอยซอร์ส และเป็นพื้นฐานสำหรับการคำนวณหาความดันคลื่นลัพธ์สำหรับอาร์เรย์แบบเส้นตรง



ภาพ 9 การแผ่กระจายคลื่นจากพอยซอร์ส

3. อาร์เรย์ของพอยซอร์ส

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาลักษณะของการวางพอยซอร์สเป็นอาร์เรย์แบบเส้นตรง ตามภาพ 10 มีระยะห่างระหว่างพอยซอร์สเท่ากัน เหตุที่ต้องพิจารณาถึงอาร์เรย์แบบนี้เนื่องจากในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้มีจุดประสงค์ในการออกแบบให้มีการวางตัวเรดิเอเตอร์เรียงในแนวแกนนอน 4 ตัว ลำคลื่นหลักกวาดในระนาบอะซิมุธ



ภาพ 10 อาร์เรย์ของพอยซอร์ส

อาร์เรย์ลักษณะนี้เป็นการนำพอยซอร์สมาวางเรียงกัน โดยมีระยะห่างระหว่างกันเท่ากับ d ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับครึ่งหนึ่งของความยาวคลื่น($d \le \lambda/2$) เพื่อให้มีไซด์โหลบต่ำ N คือ

จำนวน พอยซอร์สในอาร์เรย์ จากความสัมพันธ์ทางตรีโกณมิติ[3] จะได้ระยะทาง R_i จากตัวเรดิเอเตอร์ที่ i ถึง จุด $P(r,\theta)$ เป็น

$$R_i = \sqrt{r^2 + [(i-1)d]^2 - 2r(i-1)d\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} \tag{3.2}$$

ถ้าระยะทาง r มีความยาวมากกว่าระยะห่าง d มากๆ (กล่าวคือ $r/d \geq 1$) ความสัมพันธ์ในสมการที่ (3.2) ประมาณได้ว่า

$$R_i \approx r - (i-1)d\sin\theta \tag{3.3}$$

การเคลื่อนที่ของคลื่นจากพอยซอร์สแต่ละตัวไปยังจุด $P(r,\theta)$ จะมีการล้าหลังของเวลาอยู่ $\Delta\tau$ ดังนั้นความดันคลื่นจากพอยซอร์สตัวที่ i ไปยังจุด $P(r,\theta)$ สามารถหาได้จากการแทน t ด้วย $[t-(i-1)\Delta\tau]$ และแทน r ด้วย R_i ในสมการที่ (3.1) จะได้

$$p_i(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j[\omega(t-(i-1)\Delta\tau)-kR_i]} \tag{3.4}$$

เขียนสมการที่ (3.4) ให้อยู่ในเทอมของ r โดยใช้การประมาณจากสมการที่ (3.3) จะได้

$$p_i(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}e^{-j[\omega(i-1)\Delta\tau-k(i-1)d\sin\theta]} \tag{3.5}$$

ความดันคลื่นลัพธ์จากอาร์เรย์หมายถึง การรวมความดันคลื่นที่แพร่กระจายจากพอยซอร์สทั้งหมดภายในอาร์เรย์ หรือเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} p(r,\theta,t) &= \sum_{i=1}^{N} p_i(r,\theta,t) \\ &= j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}\sum_{i=1}^{N}e^{-j[\omega(i-1)\Delta\tau-k(i-1)d\sin\theta]} \end{aligned} \tag{3.6}$$

ให้ $\omega\Delta\tau = \phi$ คือค่าเฟสที่ล้าหลังของคลื่นที่แพร่กระจายจากพอยซอร์ส เขียนสมการที่ (3.6) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} p(r,\theta,t) &= j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}\sum_{i=1}^{N}e^{-j[(i-1)\phi-k(i-1)d\sin\theta]} \\ &= j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}\sum_{i=1}^{N}e^{-j[(i-1)\varphi]} \end{aligned} \tag{3.7}$$

เมื่อ $$\varphi = \phi - kd\sin\theta \tag{3.8}$$

สมการที่ (3.6) และ (3.7) สังเกตได้ว่าเป็นการคูณกันระหว่างความดันคลื่นจากพอยซอร์สเดียวในสมการที่ (3.1) กับแฟคเตอร์หนึ่งซึ่งเรียกว่า อาร์เรย์แฟคเตอร์ (Array Factor, AF) นั่นคือ $\sum_{i=1}^{N}e^{-j[(i-1)\varphi]}$ รูปแบบการคูณกันดังกล่าวอยู่ในรูปของ

$$\overline{p}\,(\text{ลัพธ์}) \;=\; [\,\overline{p}\,(\text{แหล่งกำเนิดเดี่ยว})]\times[\text{อาร์เรย์แฟคเตอร์}] \tag{3.9}$$

สมการที่ (3.9) นี้เรียกว่า หลักการคูณรูปแบบการกระจายคลื่น (Pattern Muliplication) ซึ่งหลักการนี้สามารถใช้กับอาร์เรย์ที่มีแหล่งกำเนิดจำนวนเท่าไรก็ได้ โดยที่แหล่งกำเนิดทั้งหมดเป็นชนิดเดียวกัน

พิจารณาอาร์เรย์แฟคเตอร์

$$AF = \sum_{i=1}^{N} e^{-j(i-1)\varphi} \tag{3.10}$$

เขียนสมการที่ (3.10) ใหม่ได้เป็น

$$AF = \sum_{i=1}^{N} [\cos((i-1)\varphi) - j\sin((i-1)\varphi)] \tag{3.11}$$

$$AF = \sum_{i=1}^{N} [\sin((i-1)\varphi + \frac{\pi}{2}) - j\sin((i-1)\varphi)] \tag{3.12}$$

ในการหาทิศทางลำคลื่นหลัก จะกำหนดให้ตัวประกอบอาร์เรย์มีค่าสูงสุด ดังนั้น φ จะมีค่าเท่ากับ 0 จากสมการที่ (3.8) จะได้

$$\phi - kd\sin\theta = 0 \tag{3.13}$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\phi}{kd}\right) \tag{3.14}$$

เมื่อ θ เป็นมุมชี้ทิศทางที่การกระจายคลื่นมีค่าสูงสุด และ ϕ เป็นความต่างเฟสของคลื่นที่แพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดแต่ละตัว ดังนั้นเมื่อสามารถปรับเฟสของคลื่นที่แพร่กระจายจากแหล่งกำเนิดแต่ละตัวในอาร์เรย์ได้ ก็จะทำให้ทิศทางในการแพร่กระจายคลื่นที่มีค่าสูงสุดเปลี่ยนไปได้ตามต้องการ ซึ่งในทางปฏิบัติจะมีวงจรอิเล็กทรอนิกส์ใช้ในการควบคุมการเปลี่ยนแปลงเฟส นั่นคือ วงจรเลื่อนเฟส (Phase shifter) ที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 4 ต่อไป

จากสมการที่ (3.10) เมื่อนำ $e^{-j\varphi}$ คูณทั้งสองข้าง จะได้

$$(AF)e^{-j\varphi} = e^{-j\varphi} + e^{-j2\varphi} + e^{-j3\varphi} + ... + e^{-j(N-1)\varphi} + e^{-jN\varphi} \tag{3.15}$$

และเมื่อลบ สมการที่ (3.10) ออกจากสมการที่ (3.15) จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$(AF)(e^{-j\varphi} - 1) = (-1 + e^{-jN\varphi}) \tag{3.16}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$AF = \left[\frac{e^{-jN\varphi} - 1}{e^{-j\varphi} - 1}\right] = e^{-j[(N-1)/2]\varphi}\left[\frac{e^{j(N/2)\varphi} - e^{-j(N/2)\varphi}}{e^{j\left(\frac{1}{2}\right)\varphi} - e^{-j\left(\frac{1}{2}\right)\varphi}}\right]$$

$$= e^{-j((N-1)/2)\varphi}\left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)}\right] \tag{3.17}$$

และนำ φ จากสมการที่ (3.8) มาแทนในสมการที่ (3.17) จะได้อาร์เรย์แฟคเตอร์เป็น

$$AF = e^{-j((N-1)/2)(\phi - kd\sin\theta)} \frac{\sin[((\phi - kd\sin\theta)/2)N]}{\sin((\phi - kd\sin\theta)/2)} \qquad (3.18)$$

นำอาร์เรย์แฟคเตอร์ในสมการที่ (3.18) แทนในสมการที่ (3.7) จะได้ความดันคลื่นลัพธ์จากอาร์เรย์ของพอยซอร์สคือ

$$p(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}\frac{\sin[((\phi - kd\sin\theta)/2)N]}{\sin((\phi - kd\sin\theta)/2)} e^{-j((N-1)/2)(\phi - kd\sin\theta)} e^{j(\omega t - kr)} \qquad (3.19)$$

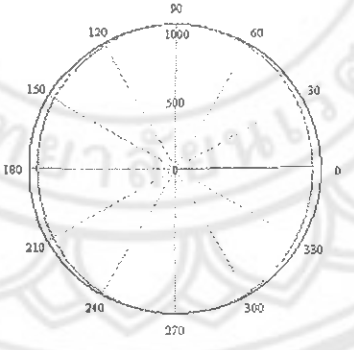
4. ตัวเรดิเอเตอร์ (Radiator source)

ตัวเรดิเอเตอร์หมายถึง แหล่งกำเนิดคลื่นทรงกลมเช่นเดียวกับพอยซอร์ส แต่มีความกว้างของแหล่งกำเนิดเข้ามาพิจารณาด้วย โดยให้รัศมีของตัวเรดิเอเตอร์เท่ากับ a เหตุที่นำตัวเรดิเอเตอร์มาพิจารณาเพราะจะได้รูปแบบการกระจายคลื่นที่ใกล้เคียงกับแหล่งกำเนิดในทางปฏิบัติมากขึ้น โดยรูปแบบการกระจายคลื่นจะเปลี่ยนไปตามรัศมี a ภาพ 11 แสดงรูปแบบการกระจายคลื่นจากตัวเรดิเอเตอร์ที่ค่ารัศมีต่างๆ กัน ส่วนความดันคลื่นที่แพร่กระจายจากตัวเรดิเอเตอร์เขียนได้เป็น[4]

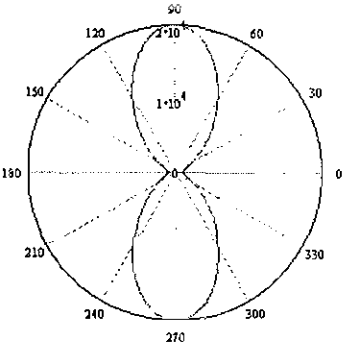
$$p(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right] \qquad (3.20)$$

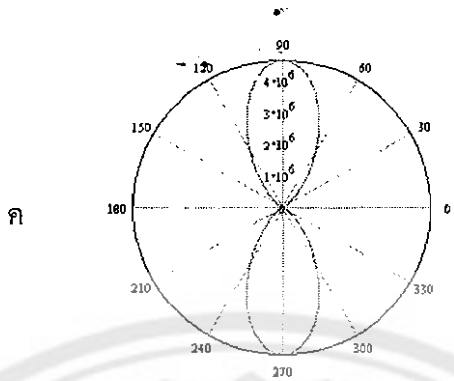
เมื่อ $J_1(ka\sin\theta)$ คือ เบสเซลฟังก์ชั่นชนิดที่หนึ่ง, a คือรัศมีของตัวเรดิเอเตอร์, θ คือ มุมในการแพร่กระจายคลื่น

ก

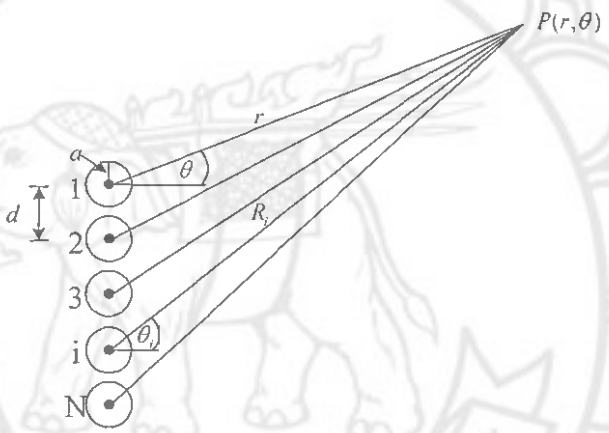


ข





ภาพ 11 รูปแบบการกระจายคลื่นจากตัวเรดิเอเตอร์ (ก) $a < \lambda$ (ข) $a = \lambda$ (ค) $a > \lambda$



ภาพ 12 อาร์เรย์ของตัวเรดิเอเตอร์

5. **อาร์เรย์ของตัวเรติเอเตอร์**

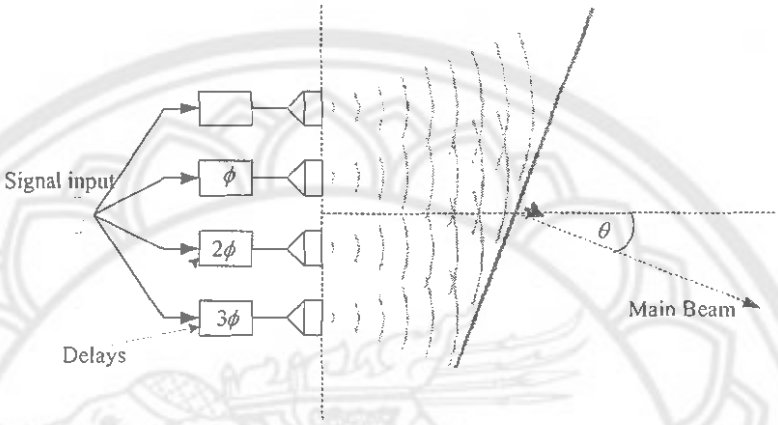
อาร์เรย์ของตัวเรดิเอเตอร์มีลักษณะคล้ายกับอาร์เรย์ของพอยซอร์สในหัวข้อ 3.3 แต่นำตัวเรดิเอเตอร์ในหัวข้อ 3.4 มาจัดวางเป็นอาร์เรย์แบบเส้นตรงแทนพอยซอร์สแสดงดังภาพ 12

ความดันคลื่นลัพธ์ที่กระจายจากอาร์เรย์นี้สามารถหาได้โดยตรงจาก หลักการคูณรูปแบบการกระจายคลื่นในสมการที่ (3.9) กล่าวคือเป็นการคูณกันระหว่างการกระจายคลื่นจากตัวเรดิเอเตอร์เดียวใน สมการที่ (3.20) กับอาร์เรย์แฟคเตอร์ในสมการที่ (3.18) เขียนได้เป็น

$$p(r,\theta,t) = j\frac{Q\rho ck}{4\pi r}e^{j(\omega t-kr)}\left[\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]e^{-j((N-1)/2)(\phi-kd\sin\theta)}$$

$$\times\frac{\sin[((\phi-kd\sin\theta)/2)N]}{\sin((\phi-kd\sin\theta)/2)} \qquad (3.21)$$

จากสมการที่ (3.19) และ (3.21) ถ้าเรากำหนดให้ตัวเรดิเอเตอร์มีคุณสมบัติการกระจายคลื่นที่เหมือนกันทุกประการ และมีระยะห่างที่เท่ากันดังกล่าวไว้ข้างต้น จะสามารถปรับเปลี่ยนทิศทางลำคลื่นหลักได้ตามต้องการด้วยการควบคุมค่าเฟสของคลื่นที่กระจายจากตัวเรดิเอเตอร์ให้ล้าหลังกันตามลำดับโดยลำคลื่นหลักจะเบนไปเป็นมุม θ จากกึ่งกลางของอาร์เรย์แสดงดังภาพ 13



ภาพ 13 การควบคุมเฟสของตัวเรดิเอเตอร์และทิศทางหน้าคลื่นใหม่ตามหลักของฮอยเกนส์