# บทที่ 3

## สัญญาณและระบบ

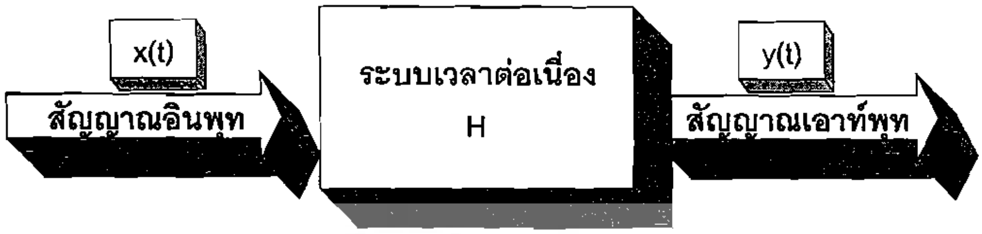
ในการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ในหลากหลายสาขาวิชา เช่น วิทยาศาสตร์ทางการแพทย์ วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ทางด้าน ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เป็นต้น แนวคิดพื้นฐานในการศึกษาสาขาที่หลากหลายเหล่านี้จะเหมือนกันคือ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับสัญญาณ ระบบและการประมวลผลสัญญาณ สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึง สัญญาณ และระบบเวลาต่อเนื่อง และระบบเวลาเป็นช่วง โดยจะเน้นการกำหนดลักษณะจำเพาะของระบบเวลาต่อเนื่อง และระบบเวลาเป็นช่วงโดยทั่วไป และกลุ่มของสัญญาณเชิงเส้นไม่แปรตามเวลา (Linear Time Invariance) มีการนิยามและหาคุณสมบัติที่สำคัญของระบบ LTI โดยเฉพาะสูตร คอนโวลูชัน ซึ่งทำให้เราสามารถหาเอาท์พุทของระบบต่อสัญญาณอินพุทใดๆ ได้ การวิเคราะห์หาผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ และผลตอบสนองความถี่ของระบบ การแปลง Fast Fourier Transform ซึ่งเป็นการแปลงสัญญาณในเชิงความถี่ และฟังก์ชัน correlation ที่ใช้สำหรับตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณสองสัญญาณ

1. ระบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous – Time System)

ระบบเวลาต่อเนื่อง คือ อุปกรณ์ที่ดำเนินการต่อสัญญาณเวลาต่อเนื่องที่เราเรียกว่า อินพุทหรือการกระตุ้น (excitation) ในลักษณะเป็นไปตามที่นิยามไว้ เพื่อทำให้เกิดสัญญาณเวลาต่อเนื่องอีกสัญญาณหนึ่ง เรียกว่าเอาท์พุทหรือการตอบสนอง (response) ของระบบ โดยทั่วไปเรามองระบบเป็นตัวดำเนินการ (operation) หรือชุดของการดำเนินการ ที่กระทำต่อสัญญาณอินพุท x(t) เพื่อให้เกิดสัญญาณเอาท์พุท y(t) เราบอกว่าสัญญาณอินพุท x(t) ถูกแปลง (transformed) โดยระบบเป็นสัญญาณเอาท์พุท y(t) และแสดงความสัมพันธ์ทั่วไประหว่าง x(t) และ y(t) ได้เป็น

$$y(t) \equiv H[x(t)] \qquad (3.1)$$

เมื่อสัญลักษณ์ H แสดงการแปลง (หรืออาจเรียกว่าตัวดำเนินการ (operator)) การประมวลหรือที่กระทำโดยระบบต่อ x(t) เพื่อให้เกิด y(t) ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในสมการที่ (3.1) แสดงโดยภาพ 17




ภาพ 17 ความสัมพันธ์ระหว่าง y(t) และ x(t) โดยผ่าน H

รายละเอียดอินพุท และเอาท์พุทของระบบ ประกอบด้วยนิพจน์หรือกฎทางคณิตศาสตร์ ที่มีการนิยามความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณอินพุทและเอาท์พุทอย่างชัดเจน โครงสร้างภายในที่แน่นอนของระบบอาจจะเป็นสิ่งที่ไม่รู้ (unknown) นั่นคือการสมมติให้ระบบเป็นกล่องดำต่อผู้ใช้ นอกจากการแทนความสัมพันธ์ด้วยไดอะแกรมดังภาพ 17 และเขียนความสัมพันธ์ระหว่างอินพุท และเอาท์พุทในสมการที่ (3.1) เราอาจใช้การเขียน

$$x(t) \xrightarrow{H} y(t)$$

ซึ่งหมายความว่า y(t) คือการตอบสนองของระบบ H ต่อการกระตุ้น x(t)

### 1.1 การแบ่งประเภทของระบบ

#### 1.1.1 ระบบสร้างได้ และระบบสร้างไม่ได้

ระบบสร้างได้ (realizable or causal system) หมายถึงระบบที่มีคุณสมบัติเบื้องต้น ซึ่งเมื่อพิจารณาจากสมการเชิงคณิตศาสตร์แล้วมันสมควรจะถูกสร้างขึ้นได้ในทางปฏิบัติ กล่าวคือ ถ้าสัญญาณอินพุท x(t) มีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ t < 0 แล้ว เอาท์พุทของระบบสร้างได้จะมีคุณสมบัติ

$$y(t) = H[x(t)] = 0 \qquad \text{เมื่อ } t < 0 \tag{3.2}$$

เหตุที่กล่าวว่าระบบที่มีคุณสมบัติตามสมการที่ (3.2) เป็นระบบสร้างได้ก็เพราะสมการที่ (3.2) ให้ความหมายว่าเอาท์พุทของระบบจะต้องไม่ปรากฏออกมาจากระบบตราบเท่าที่ยังไม่มีอินพุทเข้าสู่ระบบ สมการเดียวกันนี้ แสดงให้เห็นว่าค่าเอาท์พุท y(t) จะเกี่ยวข้องแต่กับค่าของอินพุท

x(t) ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาที่ผ่านไปแล้วเท่านั้น จะไม่เกี่ยวข้องกับค่าอินพุท x(t) ในอนาคตเลย น่าสังเกตว่าความสัมพันธ์สมการที่ (3.2) ซึ่งเป็นตัวนิยามของระบบสร้างได้นั้นไม่เกี่ยวข้องกับวิธีการสร้างระบบเลย เพียงแต่แสดงว่า ถ้าระบบใดมีคุณสมบัติดังกล่าวแล้ว เราย่อมมีโอกาสที่จะสร้างขึ้นได้โดยพื้นฐานทางทฤษฎี แต่ในทางปฏิบัตินั้นอาจจะมีข้อจำกัดทำให้สร้างได้ หรือไม่ได้นั้นแล้วแต่กรณี

ระบบสร้างไม่ได้ (nonrealizable or anticipative system) คือระบบที่มีคุณสมบัติทางทฤษฎีไม่เป็นไปตามสมการที่ (3.2) ซึ่งคุณสมบัตินี้ก็จะเป็นตัวบอกว่าระบบที่กำลังพิจารณาอยู่นั้นไม่มีโอกาสจะทำขึ้นได้โดยหลักการ

1.1.2 **ระบบเชิงเส้นและระบบไม่เชิงเส้น**

มีคำนิยามดังนี้ คือ ระบบเชิงเส้น (linear system) หมายถึงระบบที่มีคุณสมบัติตามความสัมพันธ์ดังนี้ คือ ถ้า

$$y_1(t) = H[x_1(t)] \tag{3.3}$$

และ

$$y_2(t) = H[x_2(t)] \tag{3.4}$$

ถ้าระบบ H เป็นระบบเชิงเส้นแล้ว จะให้ผลว่า

$$y_1(t) + y_2(t) = H[x_1(t) + x_2(t)] \tag{3.5}$$

อธิบายได้ว่าถ้า $y_1(t)$ และ $y_2(t)$ เป็นสัญญาณเอาท์พุทของระบบ H ซึ่งเกิดจากอินพุท $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ ตามลำดับแล้ว เมื่อมีการป้อน $x_1(t)$ และ $x_2(t)$ รวมกันสู่ระบบ H นั้น ถ้าระบบ H เป็นระบบเชิงเส้นแล้วจะได้เอาท์พุทเท่ากับ $y_1(t)$ รวมกับ $y_2(t)$

จาก สมการที่ (3.3) และ (3.5) นี้เราจะพิสูจน์ได้ว่า สำหรับระบบเชิงเส้นนั้นเมื่อ

$$y(t) = H[x(t)] \tag{3.6}$$

แล้วจะต้องได้

$$ay(t) = H[ax(t)] \quad (3.7)$$

เมื่อ $a$ เป็นค่าคงที่ใดๆ

ระบบใดๆ ที่ไม่มีคุณสมบัติของระบบเชิงเส้นดังกล่าวแล้วถูกจัดเป็นระบบไม่เชิงเส้น (nonlinear system) ทั้งสิ้น

1.1.3 **ระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา**

ถ้าระบบใดมีความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเอาท์พุทกับอินพุทไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาจะถูกนิยามเรียกว่า ระบบไม่เปลี่ยนตามเวลา (time-invariant or fixed system) ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวจะอธิบายในเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า

ถ้า $$y(t) = H[x(t)]$$

แล้วจะได้

$$y(t-t_0) = H[x(t-t_0)] \quad (3.8)$$

โดยที่ $t_0$ คือ ค่าระยะเวลาที่คงที่

ระบบที่ไม่มีคุณสมบัติตามสมการที่ (3.8) จะถูกแยกประเภทเป็นระบบเปลี่ยนตามเวลา (time varying system)

1.2 **ผลตอบสนองอิมพัลส์**

การแสดงบอกคุณสมบัติของระบบสามารถทำได้หลายวิธี วิธีหนึ่งที่นิยม คือ การแสดงด้วยค่าผลตอบสนองอิมพัลส์ (impulse response) ของระบบนั้น เพื่อให้เข้าใจในเรื่องนี้จำเป็นจะต้องรู้จักคำนิยามของฟังก์ชันอิมพัลส์ (impulse function) ก่อน

ฟังก์ชันอิมพัลส์ไม่ใช่ฟังก์ชันธรรมดาเช่นฟังก์ชันทั่วไป ฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วยมักนิยามแทนด้วยสัญลักษณ์ $\delta(t)$ และมีคุณสมบัติดังนี้ คือ

$$\int_a^b x(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} x(t_0), & a < t_0 < b \\ 0, & \text{เมื่อ } t_0 \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases} \tag{3.9}$$

โดยในที่นี้ $x(t)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่มีค่าต่อเนื่อง (continuous) ที่ค่าเวลา $t = t_0$ จาก (3.9) เมื่อกำหนดให้ $x(t) = 1$ จะได้

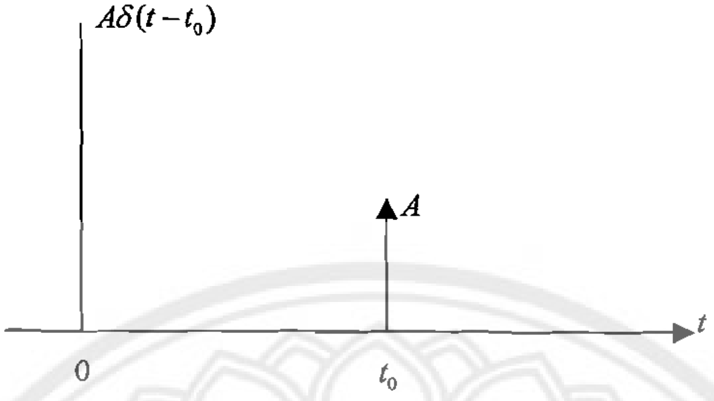
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \tag{3.10}$$

เมื่ออาศัยความรู้ที่ว่าผลของการอินทิเกรตฟังก์ชันใดๆ นั้น มีผลเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นโค้ง (curve) ที่แสดงฟังก์ชันนั้นอธิบาย (3.10) จะกล่าวได้ว่าพื้นที่ใต้เส้นโค้งของ $\delta(t-t_0)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 หน่วย ค่าที่ได้จากการอินทิเกรตนี้นิยมเรียกว่า น้ำหนัก ของฟังก์ชันอิมพัลส์นั้น ดังนั้นเราพบว่าน้ำหนักของฟังก์ชัน $A\delta(t)$ มีค่าเท่ากับ A หน่วย ฟังก์ชันอิมพัลส์ที่มีน้ำหนัก 1 หน่วยนั้น มีชื่อเรียกว่า ฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย (unit impulse function)

รูปลักษณะของ $\delta(t-t_0)$ นั้นไม่เหมือนฟังก์ชันธรรมดาเพราะมันมีขนาดที่มากจนกำหนดค่าไม่ได้ที่เวลา $t = t_0$ และไม่มีค่าที่เวลาอื่นๆ กล่าวคือ

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \tag{3.11}$$

ให้สังเกตว่า $\delta(t-t_0)$ จะมีค่าเป็นศูนย์ตลอด ยกเว้นที่เวลา $t = t_0$ และพื้นที่ใต้เส้นโค้งของ $\delta(t-t_0)$ จะมีค่าเท่ากับ 1 เพราะฉะนั้นขนาดของ $\delta(t-t_0)$ ที่เวลา $t = t_0$ นี้ จึงควรมีค่าเข้าสู่ค่าอนันต์ การเขียนกราฟแทน $A\delta(t-t_0)$ มีดังแสดงในภาพ 18




ภาพ 18 แสดงฟังก์ชันอิมพัลส์ $A\delta(t-t_0)$ เมื่อ $t_0 > 0$

เนื่องจากเราไม่สามารถแทนขนาดของ $\delta(t-t_0)$ ได้จริง จึงใช้เครื่องหมายลูกศรแทนเพื่อแสดงว่ามันมีค่าพุ่งขึ้นสูงขึ้นไปไม่มีกำหนดที่เวลา $t = t_0$ และเมื่อต้องการจะแสดงว่าฟังก์ชันอิม**พัลส์**มีน้ำหนักเท่าใด ก็จะใช้ตัวอักษรแสดงค่าน้ำหนักกำกับไว้ที่ข้างลูกศรนั้น

คุณสมบัติฟังชันอิมพัลส์ที่ควรสนใจมีดังต่อไปนี้คือ

คุณสมบัติการสมมาตร

$$\delta(t) = \delta(-t) \tag{3.12}$$

คุณสมบัติการขยายอัตราส่วนเวลา

$$\delta(at) = \delta(t) \qquad \text{เมื่อ a เป็นค่าคงที่} \tag{3.13}$$

คุณสมบัติการคูณกับฟังก์ชันอื่น

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \tag{3.14}$$

**คุณสมบัติความสัมพันธ์กับฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย**

ฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (unit step function) เป็นฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้กันมากในวิชาวิศวกรรมศาสตร์ นิยมใช้สัญลักษณ์คือ $u(t)$ มีการนิยามดังนี้ คือ

$$u(t-t_0)=\begin{cases}1, & t>t_0 \\ 0, & t<t_0\end{cases} \tag{3.15}$$

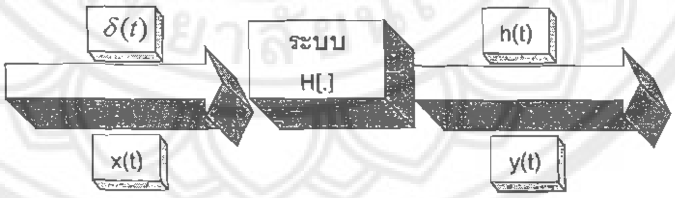
เมื่ออาศัย สมการที่ (3.9) จะได้

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t-t_0)dt=u(t-t_0) \tag{3.16}$$

และ

$$\delta(t-t_0)=\frac{d}{dt}u(t-t_0) \tag{3.17}$$

แม้ว่าฟังก์ชันอิมพัลส์จะไม่สามารถสร้างขึ้นได้จริงในทางปฏิบัติ แต่ในทางทฤษฎีแล้วมันมีบทบาทในการวิเคราะห์สัญญาณและระบบอย่างมาก โดยเฉพาะเรื่องการบอกคุณสมบัติของระบบดังที่จะพบต่อไป




ภาพ 19 แผนผังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุทของระบบ

เมื่อพิจารณาระบบ $H[.]$ ดังแสดงในภาพ 19 ผลตอบสนองของระบบ $H[.]$ นี้ที่เกิดขึ้นจากสัญญาณอินพุทที่ฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(t)$ จะถูกนิยามเรียกว่า ผลตอบสนองอิมพัลส์ ของระบบ ในภาพ 19 นี้ ใช้ $h(t)$ เป็นสัญลักษณ์แทนผลตอบสนองอิมพัลส์ กล่าวคือ

$$h(t)=H[\delta(t)] \tag{3.18}$$

ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบสามารถใช้เป็นตัวแทนของระบบ เพราะมันสามารถบอกคุณสมบัติของระบบนั้นได้ และโดยเฉพาะเมื่อระบบภายใต้การพิจารณาเป็นระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนตามเวลา ค่าเอาท์พุท y(t) ของระบบที่เกิดจากสัญญาณอินพุท x(t) ใดๆ นั้นจะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้ คือ

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{3.19}$$

การพิสูจน์ความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.19) ทำได้ง่ายดังนี้คือ ตามภาพ 19 จะได้ความสัมพันธ์

$$y(t)=H[x(t)] \tag{3.20}$$

และ

$$h(t)=H[\delta(t)] \tag{3.21}$$

เมื่ออาศัยคุณสมบัติของการไม่เปลี่ยนตามเวลาจะได้

$$h(t-t_0)=H[\delta(t-t_0)] \tag{3.22}$$

ด้วยความสัมพันธ์สมการที่ (3.19) เราสามารถเขียนฟังก์ชัน x(t) ได้ในรูป

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t_0-t)dt_0 \tag{3.23}$$

เมื่อแทน สมการที่ (3.23) ในสมการที่ (3.20) จะได้

$$y(t)=H[\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t_0-t)dt_0] \tag{3.24}$$

โดยคุณสมบัติสมมาตรสมการที่ (3.13) ทำให้

$$y(t) = H[\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t-t_0)dt_0] \qquad (3.25)$$

เนื่องจาก H[.] เป็นตัวปฏิบัติการเชิงเส้นที่เกี่ยวเนื่องกับเวลา t ดังนั้นสมการที่ (3.25) จึงเขียนได้ดังต่อไปนี้คือ

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)H[\delta(t-t_0)]dt_0 \qquad (3.26)$$

อาศัยสมการที่ (3.22) แทนใน สมการที่ (3.26) จะได้

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)h(t-t_0)dt_0 \qquad (3.27)$$

เมื่อแทนที่ $t_0$ ด้วย $\tau$ จะเห็นได้ว่าสมการที่ (3.25) ก็คือ สมการที่ (3.19) ตามต้องการ ความสัมพันธ์ของสมการที่ (3.19) นี้ มีประโยชน์ที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้มาก

ควรสังเกตว่าการอินติเกรตในลักษณะสมการที่ (3.19) นั้นมีชื่อเรียกว่า การคอนโวลูชัน (convolution) ระหว่าง x(t) และ h(t) ซึ่งมีสัญลักษณ์แทน คือ

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad (3.28)$$

1.3 ลักษณะจำเพาะของระบบ LTI ในโดเมนความถี่

ในส่วนนี้ เราจะพิจารณาหาลักษณะจำเพาะในโดเมนความถี่ของระบบ LTI เมื่อสัญญาณที่ใช้กระตุ้นระบบเป็นสัญญาณเอกซ์โพเนนเชียลหรือสัญญาณซายน์ ลักษณะจำเพาะของระบบจะถูกแสดงในรูปฟังก์ชันของตัวแปรความถี่ ω ซึ่งเรียกว่าการตอบสนองความถี่ ซึ่งก็คือการแปลงฟูเรียร์ ของการตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ

เนื่องจากการตอบสนองความถี่แสดงลักษณะจำเพาะของระบบ โดยไม่ขึ้นอยู่กับอินพุทของระบบ เราจะได้ศึกษาถึงการตอบสนองของระบบต่อสัญญาณอินพุทลักษณะต่างๆ กัน

1.3.1 การตอบสนองต่อสัญญาณเอกซ์โพเนนเชียลและสัญญาณซายน์ : การตอบสนองความถี่

โดยที่เราทราบว่า การตอบสนอง y(t) ของระบบ LTI ที่หยุดนิ่ง ใดๆ ต่อ สัญญาณอินพุท x(t) ใดๆ จะหาได้จากคอนโวลูชั่น

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{3.29}$$

เมื่อ h(t) เป็นการตอบสนองอิมพัลส์ ถ้าให้อินพุทที่เข้าสู่ระบบเป็นเอกซ์โพเนนเชียลเชิงซ้อน ที่เวลา $t = -\infty$

$$x(t) = Ae^{j\omega t} \tag{3.30}$$

เมื่อ A เป็นขนาดและ ω เป็นความถี่ใดๆ โดยการแทนสมการที่ (3.30) ในสมการที่ (3.29) จะได้

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)[Ae^{j\omega(t-\tau)}]d\tau \\ &= A[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau]e^{j\omega t} \\ &= x(t)[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau] \end{aligned} \tag{3.31}$$

จะเห็นว่าเทอมในวงเล็บเป็นฟังก์ชันของตัวแปรซึ่งเป็นความถี่ ω ซึ่งเทอมนี้ก็คือการแปลงฟูเรียร์ของการตอบสนองอิมพัลส์ h(t) ของระบบนั่นเอง ดังนั้นเราเขียนแสดงฟังก์ชันนี้โดย

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{3.32}$$

และเรียก H(ω) ว่าการตอบสนองความถี่ของระบบ โดยใช้สมการที่ (3.32) ทำให้เราสามารถคำนวณการตอบสนองความถี่โดยตรงในเทอมของการตอบสนองอิมพัลส์ โดยปกติ H(ω) จะเป็นปริมาณเชิงซ้อน

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \tag{3.33}$$

โดยจะเรียก $|H(\omega)|$ ว่า การตอบสนองขนาด (amplitude response) และ $\theta(\omega)$ ว่าการตอบสนองเฟส (phase response) ถ้าหากเขียน

$$H(\omega) = H_r(\omega) + jH_i(\omega) \tag{3.34}$$

เมื่อ $H_r(\omega)$ และ $H_i(\omega)$ แทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $H(\omega)$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$|H(\omega)| = \sqrt{H_r^2(\omega) + H_i^2(\omega)} \tag{3.35}$$

$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{H_i(\omega)}{H_r(\omega)}\right] \tag{3.36}$$

ค่าของ $|H(\omega)|$ และ $\theta(\omega)$ ที่ ω ที่จำเพาะค่าหนึ่งจะเรียกว่าการขยาย (gain) และการเลื่อนเฟส (phase shift) ตามลำดับโดยการแทน สมการที่ (3.32) ใน (3.31) จะได้

$$y(t) = Ae^{j\omega t}H(\omega) = x(t)H(\omega) \tag{3.37}$$

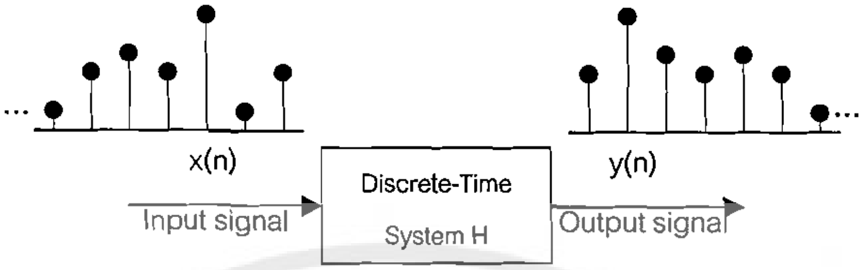
2. **ระบบเวลาเป็นช่วง** (Discrete-Time System)

ระบบเวลาเป็นช่วง คือ อุปกรณ์หรืออัลกอริธึมที่กระทำต่อสัญญาณเวลาเป็นช่วง เรียกว่า อินพุท หรือ การกระตุ้น ทำให้เกิดสัญญาณเวลาเป็นช่วงอีกสัญญาณหนึ่ง เรียกว่า เอาท์พุท หรือ การตอบสนองของระบบ โดยทั่วไปเรามองระบบเสมือนการดำเนินการหรือชุดของการดำเนินการที่กระทำต่อสัญญาณอินพุท x(n) เพื่อให้เกิดสัญญาณเอาท์พุท y(n) เราบอกว่าสัญญาณอินพุท x(n) ถูกแปลงโดยระบบเป็น y(n) ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้

$$y(n) \equiv H[x(n)] \tag{3.38}$$

โดย n เป็นค่าจำนวนเต็มใดๆ

เมื่อสัญลักษณ์ H แสดงการแปลง หรือการประมวลผลที่กระทำโดยระบบต่อ x(n) เพื่อให้เกิด y(n) ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในสมการ (3.38) ได้แสดงโดยภาพ 20




ภาพ 20 บล็อคไดอะแกรมแทนระบบเวลาเป็นช่วง

## 2.1 การจำแนกระบบเวลาเป็นช่วง

### 2.1.1 ระบบสแตติค (static) กับระบบไดนามิค (dynamic)

ระบบจะเรียกว่าสแตติค ถ้าเอาท์พุทของมันที่ขณะ n ใดๆ ขึ้นอยู่กับตัวอย่างของอินพุทที่เวลาเดียวกัน แต่ไม่ขึ้นอยู่กับตัวอย่างในอดีตหรืออนาคตของอินพุท ระบบจะเรียกว่าไดนามิค ถ้าเอาท์พุทของระบบที่เวลา n สามารถหาได้อย่างสมบูรณ์โดยตัวอย่างของอินพุทในช่วงจาก n-N ถึง n($N \geq 0$) จะบอกว่าระบบมีความจำที่มีช่วง N ถ้า N=0 ระบบจะเป็นสแตติค

### 2.1.2 ระบบแปรตามเวลา (time or shift variant) และไม่แปรตามเวลา (time or shift invariant)

ระบบจะเรียกว่าไม่แปรตามเวลา ถ้าลักษณะจำเพาะอินพุท-เอาท์พุทของมันไม่เปลี่ยนตามเวลา เพื่อเป็นการขยายความ สมมติว่า มีระบบ H ที่หยุดนิ่ง โดย

$$x(n) \xrightarrow{H} y(n)$$

ถ้าระบบไม่แปรตามเวลา จะได้

$$x(n-k) \xrightarrow{H} y(n-k)$$

สำหรับทุกอินพุท x(n) และทุกๆ ค่าของ k (k เป็นจำนวนเต็มใดๆ)

2.1.3 ระบบเชิงเส้น (linear) และไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear)

มีคำนิยามดังนี้ คือ ระบบเชิงเส้น หมายถึงระบบที่มีคุณสมบัติตามความสัมพันธ์ดังนี้ คือ ถ้า

$$y_1(n) = H[x_1(n)] \tag{3.39}$$

และ

$$y_2(n) = H[x_2(n)]$$

ถ้าระบบ H เป็นระบบเชิงเส้นแล้ว จะได้ผลว่า

$$y_1(n) + y_2(n) = H[x_1(n) + x_2(n)] \tag{3.40}$$

อธิบายได้ว่าถ้า $y_1(n)$ และ $y_2(n)$ เป็นสัญญาณเอาท์พุทของระบบ H ซึ่งเกิดจากอินพุท $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ ตามลำดับแล้ว เมื่อมีการป้อน $x_1(n)$ และ $x_2(n)$ รวมกันสู่ระบบ H นั้น ถ้าระบบ H เป็นระบบเชิงเส้นแล้วจะได้เอาท์พุทเท่ากับ $y_1(n)$ รวมกับ $y_2(n)$

จาก (3.39) และ (3.40) นี้เราจะพิสูจน์ได้ว่า สำหรับระบบเชิงเส้นนั้นเมื่อ

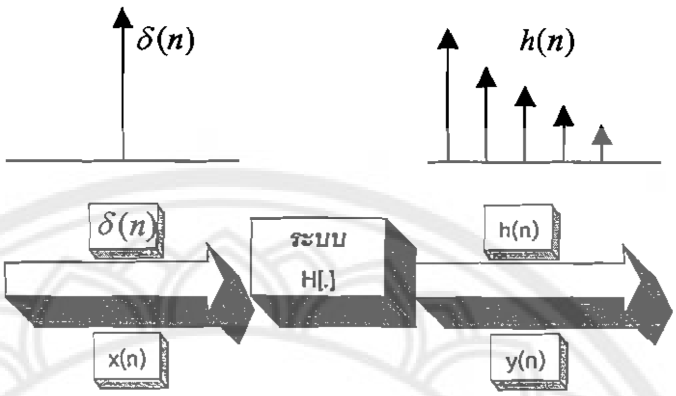
$$y(n) = H[x(n)]$$

แล้วจะต้องได้

$$ay(n) = H[ax(n)] \qquad \text{เมื่อ a เป็นค่าคงที่ใดๆ}$$

ระบบใดๆ ที่ไม่มีคุณสมบัติของระบบเชิงเส้นดังกล่าวแล้วถูกจัดเป็น ระบบไม่เชิงเส้นทั้งสิ้น

## 2.2 ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ




ภาพ 21 แผนผังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุทและเอาท์พุทของระบบ

เมื่อพิจารณาระบบ $H[.]$ ดังแสดงในภาพ 21 ผลตอบสนองของระบบ $H[.]$ นี้ที่เกิดขึ้นจากสัญญาณอินพุทที่ฟังก์ชันอิมพัลส์หนึ่งหน่วย $\delta(n)$ จะถูกนิยามเรียกว่า ผลตอบสนองอิมพัลส์ ของระบบ ในภาพที่ 21 นี้ ใช้ $h(n)$ เป็นสัญลักษณ์แทนผลตอบสนองอิมพัลส์ กล่าวคือ

$$h(n) = H[\delta(n)] \tag{3.41}$$

ผลตอบสนองอิมพัลส์ของระบบสามารถใช้เป็นตัวแทนของระบบ เพราะมันสามารถบอกคุณสมบัติของระบบนั้นได้ และโดยเฉพาะเมื่อระบบภายใต้การพิจารณาเป็นระบบเชิงเส้นไม่เปลี่ยนตามเวลา ค่าเอาท์พุท y(n) ของระบบที่เกิดจากสัญญาณอินพุท x(n) ใดๆ นั้นจะสามารถเขียนเป็นความสัมพันธ์ได้ดังนี้ คือ

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{3.42}$$

ถ้าไม่จำกัดว่า x(n) เริ่มมีค่าที่ n=0 ก็จะได้เป็นสมการทั่วไปของผลตอบสนองของระบบเป็น

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{3.43}$$

ขอนิยามการกระทำระหว่าง x(n) และ h(n) ในสมการนี้ว่า คอนโวลูชันแบบไม่ต่อเนื่อง *(discrete convolution) ผู้ที่เคยศึกษาเรื่องระบบแบบต่อเนื่องมาจะพบว่า สมการนี้คล้ายกับ* คอนโวลูชันแบบต่อเนื่องมาก เพียงแค่เปลี่ยนจากการบวก เป็นการอินทิเกรตเท่านั้น เราจะใช้สัญลักษณ์ * แทนการกระทำคอนโวลูชันนี้ และสามารถเขียนสมการของ y(n) ได้ใหม่เป็น

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{3.44}$$

ถ้าเราแทน k ด้วย n-k ในสมการของคอนโวลูชัน จะได้ว่า

$$y(n) = \sum_{n-k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(n-(n-k))$$

$$y(n) = \sum_{k=n-\infty}^{n+\infty} h(k)x(n-k)$$

เนื่องจาก n เป็นปริมาณที่จำกัด ดังนั้น n-∞ จึงมีค่าเทียบเท่ากับ -∞ และ n+∞ ก็มีค่าเทียบเท่ากับ ∞ จะได้ว่า สมการนี้กลายเป็น

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \tag{3.45}$$

สมการที่ (3.42) และ (3.45)นี้ แสดงให้เห็นว่าการคูณคอนโวลูชัน มีคุณสมบัติสลับที่ของตัวถูกคูณได้ หรือ $y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$ แต่สมการที่ (3.45) นี้ จะสามารถนำมาใช้งานได้สะดวกกว่าในการประมวลผลแบบเวลาจริง

2.3 ผลตอบสนองความถี่ของระบบ

จากทฤษฎีคอนโวลูชันของระบบเชิงเส้น และไม่แปรตามเวลา ในสมการที่ (3.42) จะให้ความสัมพันธ์ที่ต้องการในโดเมนความถี่ดังนี้

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \tag{3.46}$$

จากนิยามการแปลง z ของซีเควนซ์ (sequence) {y(n)} ซึ่งเขียนแทนโดย Y(z) จะถูกนิยามเป็น

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \tag{3.47}$$

แทนค่าสมการที่ (3.46) ในสมการที่ (3.47) จะได้

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \sum_{n-\infty}^{\infty} h(n-k)z^{-(n-k)}z^{-k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \\ &= X(z)H(z) \end{aligned} \tag{3.48}$$

เพราะว่า

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$$

ขณะนี้จะเห็นได้ว่า เราสามารถหาทรานสเฟอร์ฟังก์ชันจากการตอบสนองอิมพัลส์ที่กำหนด โดยการคำนวณการแปลง z โดยที่ H(z) จะแทนการกำหนดลักษณะจำเพาะของระบบในโดเมน z ขณะที่ h(n) จะแทนการกำหนดลักษณะจำเพาะของระบบในโดเมนเวลา

จากสมการที่ (3.48) เราสามารถแปลงหาผลตอบสนองในโดเมนความถี่ได้ดังต่อไปนี้

เราสามารถแปลความหมายของ Y(z) เป็นการแปลงฟูเรียร์จาก

$$Y(z)\big|_{z=e^{j\Omega}} \equiv Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\Omega n} \tag{3.49}$$

โดยที่ $\Omega = \dfrac{2\pi}{N}$ คือความถี่เชิงมุมสำหรับสัญญาณเวลาเป็นช่วง โดยมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $\pi$ และ N คือจำนวน sample ของสัญญาณ 1 คาบ

แทนค่าสมการที่ (3.46) ในสมการที่ (3.49) จะได้

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n-k)e^{-j\Omega n} \end{aligned}$$

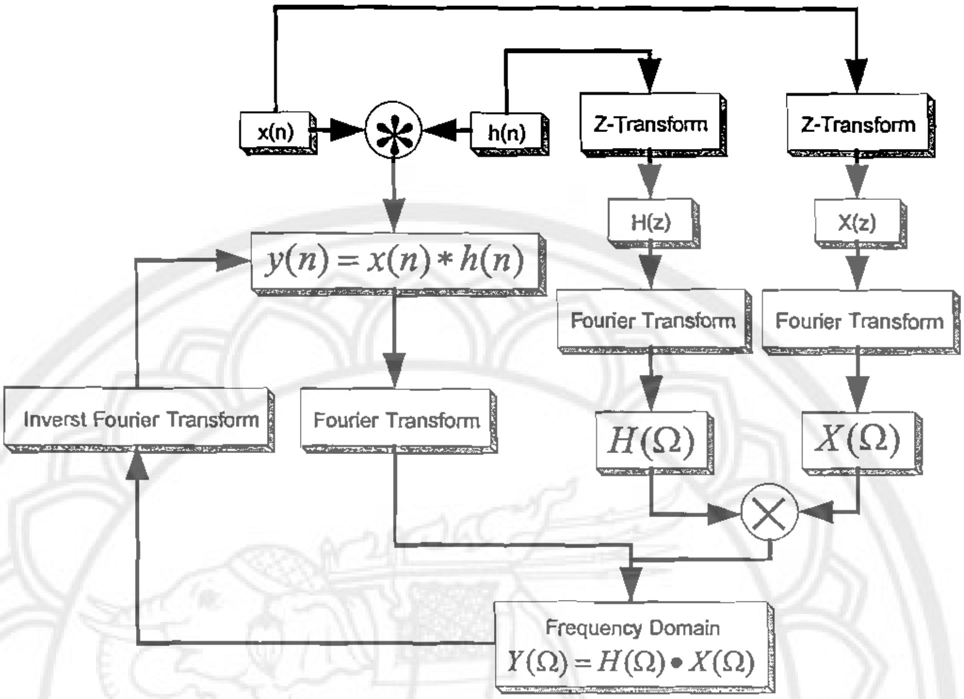
แทนค่า m=n-k จะได้

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\Omega m}\right\}e^{-j\Omega k} \\ &= H(\Omega)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\Omega k} \\ &= H(\Omega)X(\Omega) \end{aligned} \tag{3.50}$$

จากสมการที่ (3.50) จะพบว่าค่า $H(\Omega)$ จะเป็นค่าของผลตอบสนองในโดเมนความถี่ของระบบ ซึ่งเราสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้เป็นบล็อคไดอะแกรมดังนี้

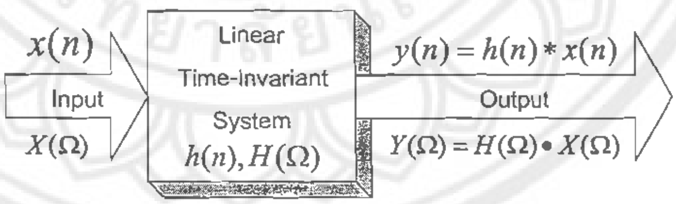
$$X(\Omega) \rightarrow \boxed{H(\Omega)} \rightarrow Y(\Omega)$$

จากสมการที่ (3.50) สามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ได้ดังแผนผังต่อไปนี้




ภาพ 22 แผนผังแสดงความสัมพันธ์การคูณคอนโวลูชันโดยการใช้ Fourier Transform Theorems

เพราะฉะนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์อินพุท และเอาท์พุทในโดเมนเวลาและความถี่ของระบบได้ดังนี้




ภาพ 23 ความสัมพันธ์อินพุท และเอาท์พุทในโดเมนเวลาและความถี่ของระบบ

จะเห็นว่าในการวิเคราะห์ในโดเมนเวลาเราจะเกี่ยวข้องกับคอนโวลูชันของสัญญาณอินพุทกับการตอบสนองอิมพัลส์ของระบบ เพื่อให้ได้ซีเควนซ์เอาท์พุทของระบบ ในขณะที่การวิเคราะห์ในโดเมนความถี่ เราจะเกี่ยวข้องกับสเปคตรัมของสัญญาณอินพุท $X(\Omega)$ และการตอบสนองความถี่ $H(\Omega)$ ของระบบ ซึ่งสัมพันธ์กันโดยการคูณเพื่อให้ได้สเปคตรัมของสัญญาณเอาท์พุทของระบบ

3. การแปลง DFT (Discrete Fourier Transform)

การแปลง DFT เท่านั้นที่มีทั้งสัญญาณในเชิงเวลา และในเชิงความถี่เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง จุดนี้เป็นจุดที่สำคัญมาก เพราะมันบ่งบอกว่า เราสามารถจะทำการแปลงโดยใช้การคำนวณ (การคูณ และบวก) ทางดิจิตอลได้ ซึ่งสามารถประยุคได้สะดวกมากในคอมพิวเตอร์ หรือในฮาร์ดแวร์โดยตรงก็ได้ การแปลงแบบอื่นมีสัญญาณแบบต่อเนื่องเกี่ยวข้องด้วยซึ่งทำให้การแปลงต้องใช้วิธีอินทิเกรตซึ่งยุ่งยากกว่ามาก

สมมติให้ x(n) เป็นสัญญาณในเชิงเวลา และ X(k) เป็นสัญญาณในเชิงความถี่ที่เกิดจาก DFT โดย k แทนตัวชี้ลำดับของสัญญาณทางด้านความถี่ ทั้งสองสัญญาณมีความยาวเท่ากัน คือ N เราจะเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า

$$x(n) \xleftrightarrow{DFT;N} X(k)$$

เราจะได้ว่า x(n) และ X(k) มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} \qquad (3.51)$$

เพื่อจัดรูปแบบสมการให้ง่ายขึ้น ขอนิยามให้ $W_N = e^{-j2\pi/N}$ เป็นค่าที่ขึ้นกับ N เท่านั้น สำหรับในการแปลงครั้งหนึ่งๆ N จะมีค่าคงที่ ดังนั้น $W_N$ จึงเสมือนเป็นค่าคงที่ เราสามารถเขียนการแปลง DFT ได้ใหม่เป็น

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \qquad (3.52)$$

4. การแปลง FFT (Fast Fourier Tranform)

เนื่องจาก การแปลง DFT มีประโยชน์ในการใช้งานมาก จึงมีได้มีความพยายามคิดค้นหาวิธีที่จะคำนวณ DFT ให้เร็วขึ้น และมีประสิทธิภาพขึ้นกว่าปกติ การแปลง FFT ก็คือชื่อที่ใช้เรียก "วิธีการคำนวณ DFT อย่างรวดเร็ว" กว่าการคิดปกตินั่นเอง เพราะฉะนั้น เมื่อกล่าวถึงการแปลงFFT โดยหลักการแล้วขอให้นึกถึงว่ามันคือ การแปลง DFT นั่นเอง และการแปลง FFT ไม่ใช่การแปลงชนิดใหม่แต่อย่างใด

การคำนวณ DFT โดยตรงจากนิยาม ถ้าสัญญาณมีความยาวเท่ากับ N จะต้องใช้การคำนวณถึงประมาณ $N^2 CMACs$ (CMAC คือ Complex Multiplication and Accumulation,เป็นหน่วยวัดการคำนวณ ซึ่ง 1 CMAC เท่ากับการกระทำทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยการคูณเลขเชิงซ้อน 2 จำนวน เสร็จแล้วนำเอาผลลัพธ์ที่ได้ไปบวกสมทบเข้ากับเลขเชิงซ้อนอีกจำนวนหนึ่ง) ซึ่งมีค่าที่มาก โดยเฉพาะเมื่อ N มีค่าสูงๆ การใช้ FFT จะช่วยลดจำนวน CMAC ที่ต้องใช้ลงได้มาก

ในปัจจุบันได้มีผู้คิดค้นการคำนวณ DFT อย่างรวดเร็วได้หลายวิธี วิธีทำ FFT วิธีพื้นฐานวิธีหนึ่ง คือวิธี radix-2 แบบ decimation-in-time (แตกเป็นส่วนย่อยทางฝั่งเวลา)

เราลองย้อนกลับไปดูการแปลง DFT ในสมการที่ (3.52) คือ

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} \quad \text{โดยที่ } W_N = e^{-j2\pi/N} \text{ และ } k = 0,1,\ldots N-1$$

ถ้าให้ N เป็นเลขคู่ เราสามารถกระจาย $X(k)$ ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเทอมที่ n เป็นคู่และเทอมที่ n เป็นคี่ได้ ดังนี้

$$X(k)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk}}_{\substack{\text{เทอมคู่} \\ \text{มาจาก } x(0),x(2),x(4),\ldots}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{(2n+1)k}}_{\substack{\text{เทอมคี่} \\ \text{มาจาก } x(1),x(3),x(5),\ldots}} \tag{3.53}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)W_N^{2nk}W_N^{k} \tag{3.54}$$

ถ้าพิจารณาเทอม $W_N^{ab}$ ที่มี a และ b เป็นจำนวนใดๆ ที่ไม่เท่ากับ 0 จะพบว่าเราสามารถย้ายตัวยกกำลังของ W ไปเป็นตัวหารของ N ได้ดังนี้

$$W_N^{ab} = e^{-j\frac{2\pi}{N}ab} = e^{-j\frac{2\pi}{N/b}a} = W_{N/b}^{a} \tag{3.55}$$

เราใช้ความจริงในข้อนี้ แทนค่าเทอม $W_N^{2nk}$ ด้วย $W_{N/2}^{nk}$ ในสมการที่ (3.54) จะได้

$$X(k)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n)W_{N/2}^{nk}}_{\text{DFT N/2 จุด}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2n+1)W_{N/2}^{nk}}_{\text{DFT N/2 จุด}}\times\underbrace{W_N^k}_{\text{สัมประสิทธิ์พิเศษใช้คูณเทอมคี่}} \qquad (3.56)$$

จะเห็นได้ว่า X(k) ได้กลายเป็นผลบวกของสองเทอม แต่ละเทอมเป็นรูปแบบของการคำนวณ DFT N/2 จุด โดยเทอมแรกกระทำกับสัญญาณ x(0), x(2), ...,x(N-2) และเทอมที่สองกระทำกับสัญญาณ x(1), x(3), ...,x(N-1)

ถ้าเรายุติการแตกกระจายเป็นเทอมย่อยแต่เพียงเท่านี้ และคำนวณ DFT โดยใช้สมการที่ (3.56) จะได้ว่า เราต้องคำนวณ DFT N/2 จุด เป็นจำนวน 2 ชุด ซึ่งแต่ละชุดจะต้องใช้จำนวน CMAC ในการคำนวณเท่ากับ $(N/2)^2$ ดังนั้น ต้องใช้จำนวน CMAC ในการคำนวณทั้งสิ้นประมาณ $2\left(\frac{N}{2}\right)^2=\frac{N^2}{2}$

สรุปว่า การหา X(k) ซึ่งเป็น DFT N จุด สามารถกระจายให้อยู่ในเทอมของ DFT N/2 จุด ซึ่งจะทำให้จำนวน CMAC ที่ต้องใช้ลดประมาณครึ่งหนึ่ง เช่นเดียวกับ ถ้าเราทำการแตกเทอม DFT N/2 จุดที่อยู่ในสมการที่ (3.56) นี้ต่อไป แต่ละเทอมก็จะสามารถกระจายให้กลายเป็นผลบวกของ DFT N/4 จุดสองเทอม ซึ่งจะทำให้จำนวน CMAC ที่ต้องใช้ลดลงอีกประมาณครึ่งหนึ่ง เราสามารถกระจายเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งทุกตัวอยู่ในรูปของ DFT 2 จุด ซึ่ง DFT 2 จุดสามารถคำนวณได้ง่ายๆ ดังนี้

สมมติให้ x(n) ยาว 2 จุด จะได้ $X(k)=\sum_{n=0}^{1}x(n)W_2^{kn}$ (3.57)

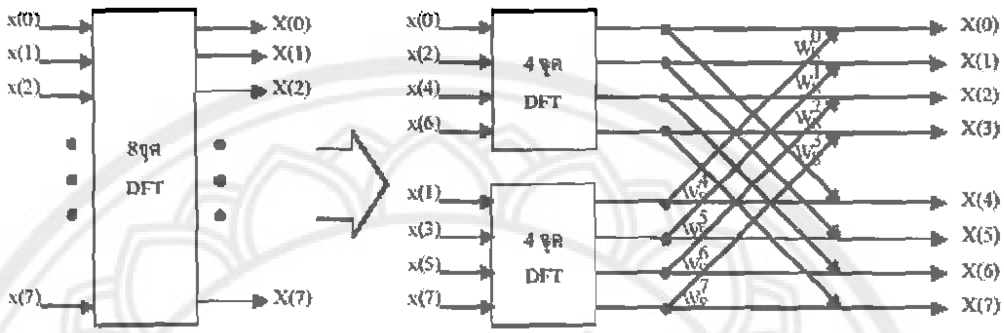
อาศัยความจริงที่ว่า $W_2^0=1$ และ $W_2^1=e^{-j\pi}=-1$ จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}X(0)&=x(0)+x(1)\\X(1)&=x(0)-x(1)\end{aligned}\right\} \qquad (3.58)$$

ขั้นตอนที่ได้อธิบายมาทั้งหมดนี้รวมเรียกว่า การแปลง FFT เรามักเขียนวิธีคำนวณ FFT โดยใช้แผนภาพที่เรียกว่า แผนภาพผีเสื้อ (butterfly diagram) ดังแสดงได้จากตัวอย่างดังต่อไปนี้

**ตัวอย่างที่** 1 จงแสดงขั้นตอนของการคิดแผนภาพผีเสื้อสำหรับการแปลง FFT เมื่อ N=8

การกระจาย DFT 8 จุด ให้อยู่ในรูปของ DFT 4 จุด สองเทอมบวกกัน สามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้




ภาพ 24 การกระจาย DFT 8 จุด เป็น DFT 4 จุด

ขอนิยามสัญลักษณ์ ที่ใช้แทนแผนภาพผีเสื้อ ดังนี้


ก่อนจะกระจายต่อไป เราสามารถทำสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่ในแผนภาพในภาพ 24 ให้ง่ายลงได้ โดยใช้คุณสมบัติความสมมาตรของ $W_N$ ดังนี้

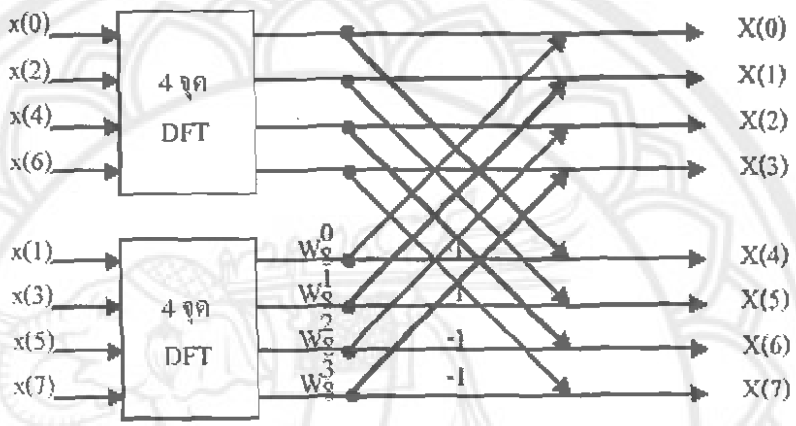
$$W_N^{k+N/2} = W_N^k W_N^{N/2} = W_N^k(-1) = -W_N^k \tag{3.59}$$

ใช้คุณสมบัติตามสมการที่ (3.59) จะได้ว่า

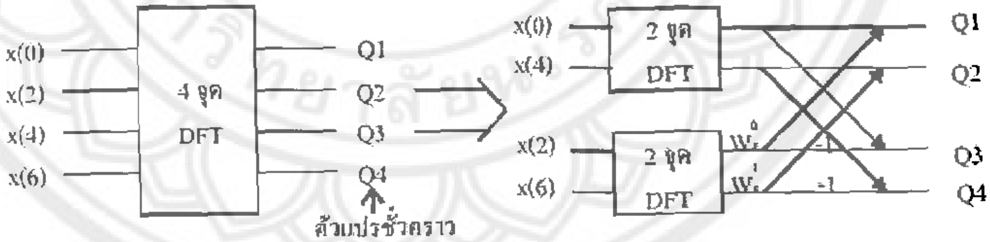
$$W_8^4 = -W_8^0, W_8^5 = -W_8^1, W_8^6 = -W_8^2 \text{ และ } W_8^7 = -W_8^3 \tag{3.60}$$

แทนค่าทั้งหมดลงในแผนภาพในภาพ 24 จะได้แผนภาพดังภาพ 25

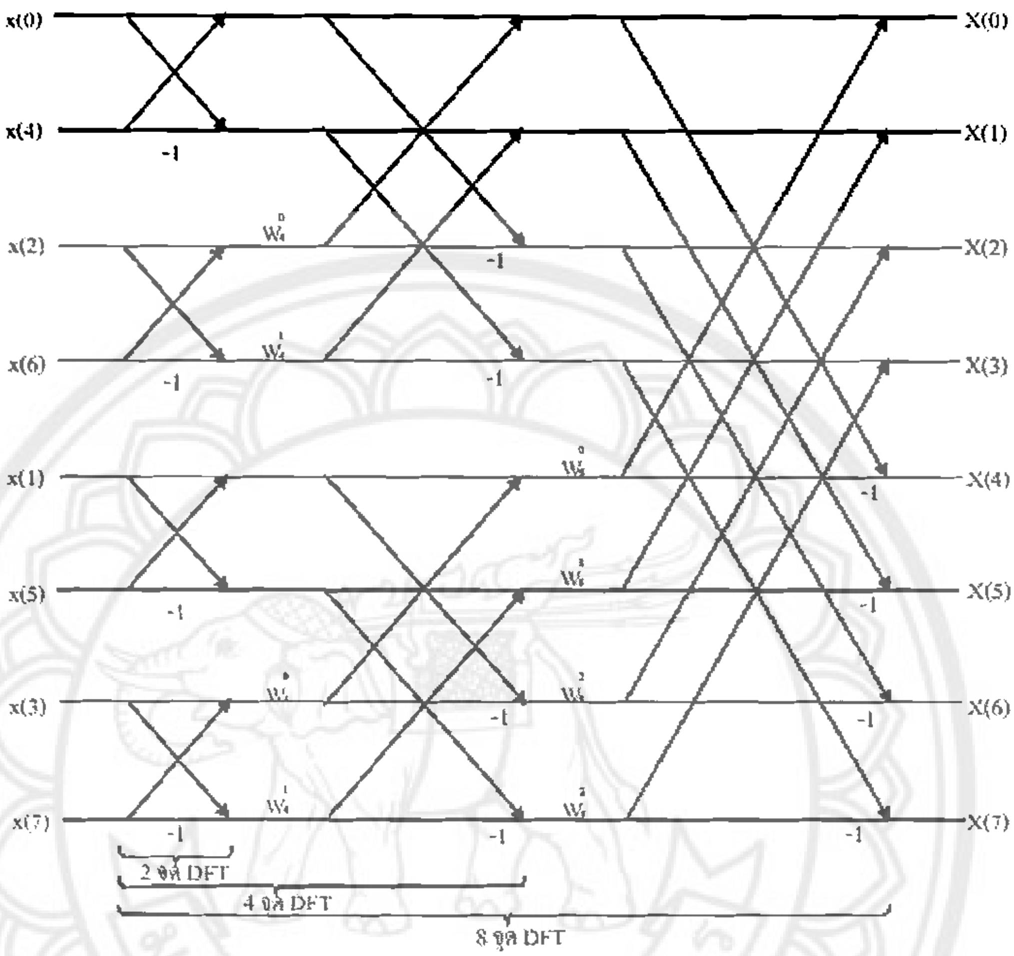
ในทำนองเดียวกัน DFT 4 จุดก็สามารถกระจายเป็น DFT 2 จุดได้ดังภาพ 26 และเมื่อรวมผลลัพธ์แต่ละส่วนเข้าเป็นแผนภาพเดียวกัน ก็จะปรากฏดังภาพ 26 จากภาพ 26 นี้เราสามารถใช้เป็นแนวทางในการเขียนแผนภาพสำหรับ FFT N จุดใดๆ ได้ทันที โดยไม่จำเป็นต้องเริ่มต้นจากการกระจายทีละขั้นตอนดังที่ได้แสดงมา รวมทั้งใช้เป็นแนวทางในการเขียนโปรแกรมเพื่อคำนวณ FFT N จุดใดๆ ได้




ภาพ 25 การกระจาย DFT 8 จุด เป็น DFT 4 จุด หลังจากใช้คุณสมบัติความสมมาตร




ภาพ 26 การกระจาย DFT 4 จุด เป็น DFT 2 จุด




ภาพ 27 แผนภาพรวมของการคำนวณ FFT 8 จุด

จุดที่ควรสังเกตจากแผนภาพผีเสื้อของการคำนวณ FFT มีดังนี้คือ

1. ถ้าต้องการได้ผลตอบในเชิงความถี่เรียงตามลำดับจาก $X(0), X(1), ..., X(7)$ เรา**ต้อง**ทำการเรียงลำดับสัญญาณขาเข้าใหม่ เป็นดังนี้ $X(0), X(4), X(2), X(6), X(1), X(5), X(3),$ และ $X(7)$ ลองเขียนลำดับเหล่านี้ในเลขฐานสองจะได้ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 2 แสดงลำดับเลขฐานสอง

| ลำดับใหม่ฐานสิบ | ลำดับใหม่ฐานสอง | ลำดับปกติฐานสิบ | ลำดับปกติฐานสอง |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 0 | 000 |
| 4 | 100 | 1 | 001 |
| 2 | 010 | 2 | 010 |
| 6 | 110 | 3 | 011 |
| 1 | 001 | 4 | 100 |
| 5 | 101 | 5 | 101 |
| 3 | 011 | 6 | 110 |
| 7 | 111 | 7 | 111 |

จะเห็นได้ว่าลำดับใหม่เกิดจากการเรียงลำดับบิตจากหลังไปหน้าของลำดับปกติ (bit-reversed order) ซึ่งข้อนี้พบว่าเป็นจริงสำหรับ FFT ที่จำนวนจุดใดๆ ด้วย

2. ค่าคงที่ W ที่ใช้คูณกับส่วนคี่ สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ $W_8$ ได้ทั้งหมด โดยคูณตัวห้อยและตัวยกกำลังด้วยค่าเดียวกัน ดังในตัวอย่างเราสามารถเปลี่ยนเทอมต่อไปนี้ได้

$$W_4^0 \rightarrow W_8^0 \text{ และ } W_4^1 \rightarrow W_8^2$$

ดังนั้นสามารถใช้ $W_8$ แทนค่าได้ทั้งหมด ซึ่งเราสามารถคำนวณ $W_8$ ที่ k ต่างๆ นี้ไว้ล่วงหน้าได้ และใช้มันเสมือนเป็นค่าคงที่สำหรับ FFT 8 จุด ข้อนี้ก็เป็นจริงเช่นกันสำหรับ FFT จำนวน N จุด ใดๆ

3. พิจารณาโดยรวมแล้ว จะได้ว่าการคำนวณ FFT N จุด ถูกแบ่งเป็น $\log_2 N$ ขั้นตอน โดยอาจประมาณได้ว่าแต่ละขั้นตอนมีการคำนวณเท่ากับ N CMAC's (มีเส้นแทยงในแผนภาพ N เส้นในทุกๆ ขั้นตอน) ดังนั้นจะได้ว่า

$$\text{จำนวน CMAC ที่ต้องใช้ในการคำนวณ FFT N จุด } = N\log_2 N \qquad (3.61)$$

4. วิธี radix-2 นี้ใช้ได้ก็ต่อเมื่อค่า N เท่ากับ $2^b$ โดย b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่งข้อนี้ไม่เป็นปัญหา เนื่องจาก ถ้าไม่สามารถแบ่งสัญญาณให้มีความยาวเท่ากับ $2^b$ ได้ ก็ใช้วิธีเติมศูนย์เพิ่มไปในสัญญาณให้ได้ความยาวตามที่ต้องการ

5. การแปลง DFT และFFT ผกผัน (Inverse Discrete Fourier Transform , Inverse Fast Fourier Transform)

ลองพิจารณา สูตรของ IDFT เทียบกับ DFT จะพบว่ามีความคล้ายกันมาก ซึ่งก็พบว่าการหา IDFT สามารถหาได้โดยการใช้ DFT ดังสมการต่อไปนี้

$$x = IDFT(X) = \frac{1}{N}\left(DFT(X^*)\right)^* \qquad (3.62)$$

แทนค่า $X^*$ ลงในสมการที่ (3.51) จะได้

$$DFT(X^*) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)^* e^{-j2\pi kn/N}$$

ดังนั้น จะได้ $\frac{1}{N}\left(DFT(X^*)\right)^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{X(k)^* e^{-j2\pi kn/N}\right\}^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $IDFT(X) = x(n)$ จริงตามสมการที่ (3.62)

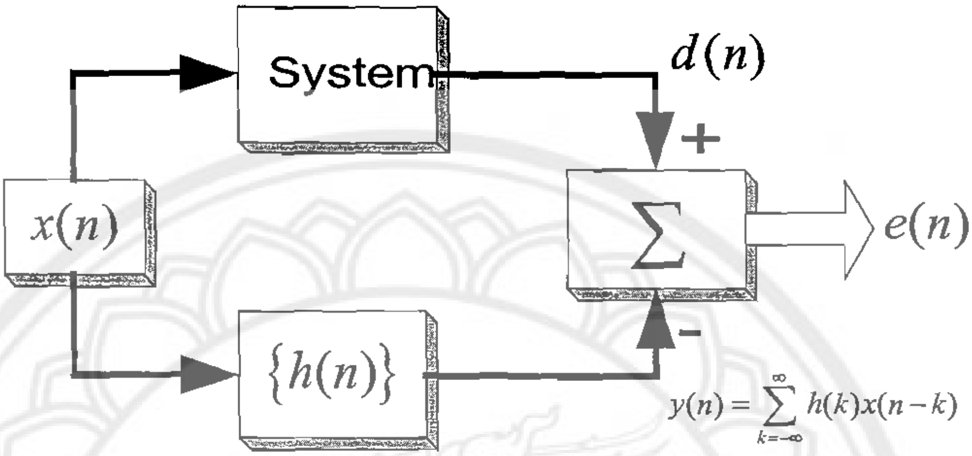
ในทำนองเดียวกัน IFFT ซึ่งมีความหมายเดียวกับ IDFT และสามารถหาได้จากการคำนวณ FFT ดังสมการต่อไปนี้

$$x = IFFT(X) = \frac{1}{N}\left(FFT(X^*)\right)^* \qquad (3.63)$$

6. CORRELATION OF DISCRETE TIME SIGNAL

คอร์รีเลชัน (correlation) เป็นฟังก์ชันที่บอกความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณใดๆ สองสัญญาณว่ามีความสัมพันธ์กันมากน้อยเพียงใด โดยหากว่าสัญญาณใดสองสัญญาณนั้น ทำการหาค่า คอร์รีเลชัน แล้วได้ค่ามากจะแสดงว่าสัญญาณทั้งสองนั้นมีความสัมพันธ์กันมาก การคอร์รีเล

ซันสัญญาณนั้นมักพบได้บ่อยในการนำไปใช้เกี่ยวกับ radar, sonar, digital communication เป็นต้น หากเรานำมาเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรมจะได้ดังภาพ 28




ภาพ 28 บล็อกไดอะแกรม correlation

จากภาพ 28 จะพบว่าสิ่งที่เราต้องการคือ $\{h(n)\}$ ที่ทำให้ $y(n)$ เหมือน $d(n)$ มากที่สุด โดยตัววัด"ความเหมือน" คือ $e(n)$

6.1 crosscorrelation and autocorrelation sequence

สมมติลำดับ x(n) และ y(n) เป็นค่าสัญญาณจริงสองสัญญาณ ที่มีค่ากำลังงานจำกัด และลำดับ $r_{xy}(l)$ คือค่าของการ crosscorrelation ระหว่างลำดับ x(n) และ y(n) สามารถอธิบายได้ดังสมการต่อไปนี้

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l) \qquad l = 0,\pm1,\pm2,... \qquad (3.64)$$

หรือเท่ากับ

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)y(n) \qquad l = 0,\pm1,\pm2,... \qquad (3.65)$$

จากสมการจะพบว่าตัวแปร $l$ เป็นตัวชี้ค่าเวลาที่เลื่อนไปของสมาชิกในสัญญาณ และเครื่องหมาย xy ใต้สมการที่ (3.64) และ(3.65) แสดงถึงการ crosscorrelation ของลำดับ x(n) และ y(n) จากสมการที่(3.64)จะพบว่าลำดับ x(n) ไม่มีการเลื่อนทางเวลา และลำดับ y(n) มีการเลื่อนทางเวลาไปจำนวน $l$ เหมือนกับในสมการที่(3.65) ที่ลำดับของ y(n) ไม่มีการเลื่อนทางเวลา และลำดับ x(n) มีการเลื่อนทางเวลาไปจำนวน $l$

ถ้าเรากลับให้ลำดับ y(n) เป็นลำดับอ้างอิงและให้ค่า x(n) เป็นลำดับเลื่อนทางเวลาเราจะได้สมการของการ crosscorrelation ดังสมการต่อไปนี้

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) \tag{3.66}$$

หรือเท่ากับ

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n+l)x(n) \tag{3.67}$$

ทำการเปรียบเทียบสมการที่ (3.64) กับ (3.67) และสมการที่ (3.65) กับ (3.66) เราจะได้ว่า

$$r_{yx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)x(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+(-l))y(n) = r_{xy}(-l)$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้

$$r_{yx}(l) = r_{xy}(-l) \tag{3.68}$$

การคำนวณค่า crosscorrelation ของลำดับ y(n) โดยมีลำดับ x(n) เป็นลำดับอ้างอิง เราสามารถคำนวณกระบวนการของลำดับ x(n) ในรูปแบบของ discrete time system ของผลตอบสนองอิมพัลส์ y(-n) ได้ว่า

$$r_{xy}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(-(l-n))$$

$$= x(l) * y(-l) \tag{3.69}$$

จากสมการที่ (3.69) เราสามารถเขียนแสดงเป็นบล็อคไดอะแกรมได้ว่า

$$x(n) \rightarrow \boxed{y(-n)} \rightarrow r_{xy}(n)$$

ถ้าเราให้ลำดับ y(n) = x(n) มาทำการหาค่า correlation แล้วเราจะเรียกการหาค่า correlation แบบนี้ว่า autocorrelation สามารถแสดงได้ดังสมการต่อไปนี้

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(n-l) \tag{3.70}$$

หรือเท่ากับ

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+l)x(n) \tag{3.71}$$

การคำนวณค่า autocorrelation ของลำดับ x(n) โดยมีลำดับ x(n) เป็นลำดับอ้างอิง เราสามารถคำนวณกระบวนการของลำดับ x(n) ในรูปแบบของ discrete time system ของผลตอบสนองอิมพัลส์ x(-n) ได้ว่า

$$r_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x(-(l-n))$$

$$= x(l) * x(-l) \tag{3.72}$$

จากสมการที่ (3.72) เราสามารถเขียนแสดงเป็นบล็อคไดอะแกรมได้ว่า

$$x(n) \rightarrow \boxed{x(-n)} \rightarrow r_{xx}(n)$$

6.2 **คุณสมบัติของลำดับ** autocorrelation **และ** crosscorrelation

ถ้าเรามีลำดับ x(n) และ y(n) ซึ่งมีค่ากำลังงานจำกัดซึ่งเราจะรวมให้อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นจะได้ว่า

$$ax(n) + by(n-l)$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ และ $l$ เป็นค่าเลื่อนทางเวลา ดังนั้นค่ากำลังงานในสัญญาณคือ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [ax(n)+by(n-l)]^2 = a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) + b^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n-l)$$

$$+2ab \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n-l)$$

$$= a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(l) \tag{3.73}$$

ถ้าเราให้ $r_{xx}(0) = E_x$ และ $r_{yy}(0) = E_y$ ที่ซึ่งคือค่ากำลังงานของ x(n) และ y(n) ตามลำดับ ซึ่งในสมการที่ (3.73) จะมีค่าไม่เป็นลบซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$a^2 r_{xx}(0) + b^2 r_{yy}(0) + 2ab r_{xy}(l) \geq 0 \qquad (3.74)$$

ถ้า $b \neq 0$ ดังนั้นเรานำค่า $b^2$ หารตลอดในสมการที่ (3.74) เราจะได้ว่า

$$r_{xx}(0)(\frac{a}{b})^2 + 2r_{xy}(l)(\frac{a}{b}) + r_{yy}(0) \geq 0 \qquad (3.75)$$

พิจารณาสมการที่ (3.75) เกี่ยวกับค่าสัมประสิทธิ์ของ $r_{xx}(0), 2r_{xy}(l), r_{yy}(0)$ เนื่องจากสมการที่ (3.75) มีค่าไม่เป็นลบสามารถแยกสมการได้เป็น

$$4\left[r^2{}_{xy}(l) - r_{xx}(0) r_{yy}\right] \leq 0 \qquad (3.76)$$

เพราะฉะนั้นลำดับของ crosscorrelation กำหนดเงื่อนไขได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xy}(l) \\ r_{xy}(0) & r_{yy}(0) \end{bmatrix} \geq 0$$

$$r_{xx}(0) r_{yy}(0) - r_{xy}{}^2(l) \geq 0$$

หรือมีค่าเท่ากับ

$$\left| r_{xy}(l) \right| \leq \sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y} \qquad (3.77)$$

ถ้าให้ลำดับ y(n) = x(n) จากสมการที่ (3.77) จะได้

$$r_{xx}(l) \leq r_{xx}(0) = E_x \qquad (3.78)$$

เพราะฉะนั้นค่าของการ crosscorrelation พิจารณาค่าสูงสุดที่ได้จากสมการที่ (3.77) และค่าของการ autocorrelation พิจารณาค่าสูงสุดได้จากสมการที่ (3.78) พิจารณากรณี $E_y = b^2 E_x$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$\sqrt{E_x E_y} = \sqrt{b^2 E_x^{\,2}} = bE_x$$

จากสมการที่ (3.77) จะได้

$$\left| r_{xy}(l) \right| \le \sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)} = \sqrt{E_x E_y}$$

$$-br_{xx}(0) \le r_{xy}(l) \le br_{xx}(0)$$

6.3 Normalize Form of Correlation

การนอร์มอลไลส์ autocorrelation และ crosscorrelation จากขอบเขต –1 ถึง 1 ในเงื่อนไขของการ autocorrelation เราสามารถแบ่งแยกได้อย่างชัดเจนโดย $r_{xx}(0)$ ด้วยเหตุนี้การนอร์มอลไลส์ autocorrelation สามารถแสดงได้ดังสมการ

$$\rho_{xx}(l) = \frac{r_{xx}(l)}{r_{xx}(0)} \tag{3.79}$$

และการนอร์มอลไลส์ crosscorrelation แสดงได้ดังสมการ

$$\rho_{xy}(l) = \frac{r_{xy}(l)}{\sqrt{r_{xx}(0) r_{yy}(0)}} \tag{3.80}$$

โดยที่ $\left| \rho_{xx}(l) \right| \le 1$ และ $\left| \rho_{xy}(l) \right| \le 1$ เพราะฉะนั้นค่าลำดับจึงไม่ขึ้นอยู่กับค่า signal scaling

6.4 Correlation Computation for Power Signal

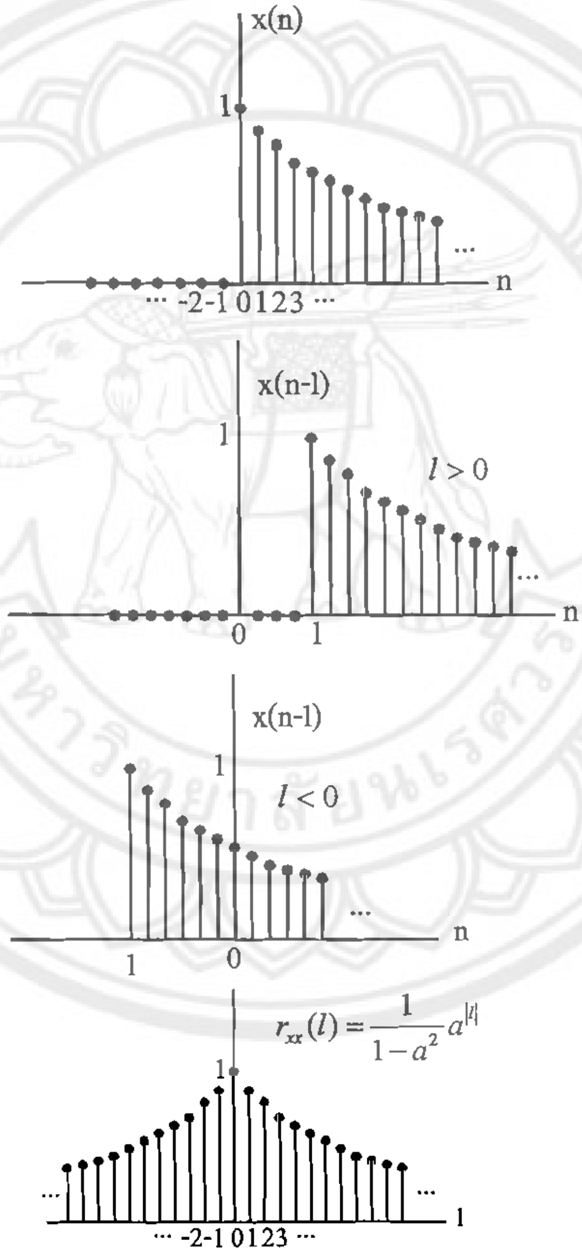
ลำดับของการ crosscorrelation สามารถแสดงค่าของกำลังงานของลำดับ x(n) และ y(n) ได้ดังสมการ

$$r_{xy}(l) = \lim_{K \to \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} x(n) y(n-l) \tag{3.81}$$

ลำดับของการ autocorrelation สามารถแสดงค่าของกำลังงานของลำดับ x(n) ได้ดังสมการ

$$r_{xx}(l) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^{K} x(n)x(n-l) \tag{3.82}$$

ตัวอย่างการคำนวณ autocorrelation ของสัญญาณ $x(n) = a^n, 0 < a < 1$




ภาพ 29 แสดงการคำนวณ autocorrelation ของ $x(n) = a^n, 0 < a < 1$

6.5 Correlation Computation for Periodic Signals

ถ้า x(n) และ y(n) เป็นลำดับซ้ำคาบทั้งสอง จากสมการที่ (3.81) และ (3.82) ถ้าเราพิจารณาคาบของลำดับ x(n) และ y(n) ในหนึ่งคาบจำนวน N samples เราจะสามารถเขียนสมการที่ (3.81) และ (3.82) ได้ใหม่เป็น

$$r_{xy}(l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y(n-l) \tag{3.83}$$

และ

$$r_{xx}(l)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)x(n-l) \tag{3.84}$$

ในสมการที่ (3.83) และ (3.84) เราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการหาค่า คอร์รีเรชัน โดยใช้เป็นตัวชี้คาบในการสังเกตสัญญาณที่ผิดเพี้ยนอันเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนที่ได้มาจากการสุ่มดังตัวอย่างต่อไปนี้ซึ่งเราพิจารณาสัญญาณของลำดับ y(n) จากสมการ

$$y(n)=x(n)+w(n) \tag{3.85}$$

โดยที่ x(n) คือลำดับซ้ำคาบจำนวน N samples และ w(n) แทนการเพิ่มสัญญาณรบกวนที่ได้จากการสุ่ม สมมติ y(n) มีจำนวน M samples โดย $0\le n\le M-1$ และ $M>>N$ เรากำหนดให้ $y(n)=0$ เมื่อ $n<0$ และ $n\ge M$ ดังนั้นการหาค่า autocorrelation ของลำดับ y(n) จะได้ว่า

$$r_{yy}(l)=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}y(n)y(n-l) \tag{3.86}$$

ถ้าเราแทนสมการที่ (3.85) ใน (3.86) จะได้

$$
\begin{aligned}
r_{yy}(l) &= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\left[x(n)+w(n)\right]\left[x(n-l)+w(n-l)\right] \\
&= \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}x(n)x(n-l) \\
&\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}\left[x(n)w(n-l)+w(n)x(n-l)\right] \qquad (3.87) \\
&\quad + \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w(n)w(n-l) \\
&= r_{xx}(l)+r_{xw}(l)+r_{wx}(l)+r_{ww}(l)
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ (3.87) พจน์แรกทางด้านขวามือ คือ autocorrelation ของลำดับ x(n) และในสมการสุดท้ายลำดับ $r_{xx}(l)$ คือลำดับซ้ำคาบที่ N samples และมีค่าสูงสุดที่ $l = 0, N, 2N, \ldots$ โดยมีค่าแอมปลิจูดเหมือนกันที่ $l$ เข้าใกล้ M ถ้าลำดับ $x(n)$ และ $w(n)$ ไม่คอร์รีเลทกัน samples ของ crosscorrelation ของลำดับ $r_{xw}(l)$ และ $r_{wx}(l)$ จะทำให้ค่าแอมปลิจูดของ $r_{xx}(l)$ มีค่าลดลง