บทที่ 5

บทสรุป

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขทางกลศาสตร์ควอนตัมของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติ ในรูป $V(x) = -kx^2 + \lambda x^4$ วิเคราะห์ค่าไอเก้นพลังงานและแสดงฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคภายใต้ปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ หลากหลายด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลข (Numerical Shooting Method) โดยใช้โปรแกรม Mathematica 5.1 ในการแสดงคำตอบเชิงตัวเลขและแสดงฟังก์ชันคลื่นในรูปกราฟ เปรียบเทียบและแสดงค่าความแตกต่างค่าไอเก้นพลังงานที่ได้กับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ (Hill Determinant Approach) [17] ซึ่งมีความแม่นยำสูงในรูปของร้อยละ สรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

สรุปผลการวิจัย

1. วิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่สามารถใช้ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขทางกลศาสตร์ควอนตัมของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติ โดยอาศัยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการแสดงค่าไอเก้นพลังงานเป็นตัวเลขและฟังก์ชันคลื่นในรูปของกราฟได้อย่างแม่นยำ ซึ่งพิจารณาได้จากผลการเปรียบเทียบเปอร์เซนต์ความแตกต่างกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ที่มีความแม่นยำสูง

2. ผลการวิเคราะห์ค่าไอเก้นพลังงานทุกกรณีของอนุภาคภายใต้ปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกันด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขแสดงดังตาราง 2 , ตาราง 3 ส่วนรูปกราฟฟังก์ชันคลื่นบางกรณีของอนุภาคภายใต้ปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกันด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขแสดงดังภาพ 21 ถึง ภาพ 34 ตามลำดับ สอดคล้องตามทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมของปัญหาบ่อศักย์คู่ ดังแสดงตัวอย่างในภาพ 12

3. ผลการเปรียบเทียบค่าไอเก้นพลังงานของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติ เมื่อพิจารณา **จากแต่ละกรณีของค่า k และ λ ที่แตกต่างกัน พบว่า**

กรณี 1 $k = 2.5$, $\lambda = 1.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 10$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 0.762 – 1.96 ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ $3.18 \times 10^{-3} - 7.78 \times 10^{-3}$

กรณี 2 $k = 5.0$, $\lambda = 1.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ และ $n = 1$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 0.113 – 0.166 ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 4.51×10^{-3} – 6.36×10^{-3}

กรณี 3 $k = 7.0$, $\lambda = 1.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 3$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.35×10^{-3} - 4.66×10^{-1} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.42×10^{-4} - 1.76×10^{-2}

กรณี 4 $k = 5.0$, $\lambda = 1.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 5$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 8.71×10^{-4} - 1.75×10^{-1} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.08×10^{-6} - 5.64×10^{-3}

กรณี 5 $k = 25.0$, $\lambda = 1.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 11$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 3.21×10^{-4} - 1.32×10^{-2} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.77×10^{-8} - 2.06×10^{-2}

กรณี 6 $k = 40.0$, $\lambda = 6.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 7$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 6.94×10^{-4} - 2.54×10^{-1} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.05×10^{-6} - 5.86×10^{-3}

กรณี 7 $k = 5.0$, $\lambda = 0.5$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 10$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 3.65×10^{-4} – 4.60 ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.02×10^{-5} - 6.89×10^{-2}

กรณี 8 $k = 15.0$, $\lambda = 1.5$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ และ $n = 1$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 8.59×10^{-4} - 8.60×10^{-4} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.36×10^{-6} - 1.39×10^{-6}

กรณี 9 $k = 30.0$, $\lambda = 5.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 3$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.45×10^{-3} - 1.20×10^{-2} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.09×10^{-6} - 2.49×10^{-5}

กรณี 10 $k = 50.0$, $\lambda = 10.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 5$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.73×10^{-3} - 1.02×10^{-1} ที่ $N = 20{,}000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.69×10^{-6} - 1.99×10^{-3}

กรณี 11 $k = 100.0$, $\lambda = 15.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 11$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.24×10^{-3} - 2.87×10^{-1} ที่ $N = 20,000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.98×10^{-6} - 1.45×10^{-3}

กรณี 12 $k = 150.0$, $\lambda = 25.0$ พิจารณาที่ระดับพลังงาน $n = 0$ ถึง $n = 11$ ที่ $N = 800$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 1.37×10^{-3} - 2.28×10^{-1} ที่ $N = 20,000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างร้อยละ 2.19×10^{-6} - 4.46×10^{-4}

อภิปรายผลการวิจัย

ในการอภิปรายผลการวิจัยครั้งนี้จะพิจารณาการเปรียบเทียบค่าไอเก้นพลังงานของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกัน และพิจารณาการคำนวณโดยใช้จำนวนช่วงจุด (Element) ต่างกัน โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. จากผลการวิเคราะห์ค่าไอเก้นพลังงานด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขของเกือบทุกกรณีทั้งที่ $N = 800$ และ $N = 20,000$ พบว่าค่าไอเก้นพลังงานที่ระดับพลังงานสถานะสมมาตร (Symmetric) และระดับพลังงานสถานะปฏิสมมาตร (Asymmetric) ที่อยู่ถัดกัน (เช่น n=0 กับ n=1 หรือ n=2 กับ n=3 เป็นต้น) จะอยู่ในระดับชิดกันมาก ตัวอย่างเช่น กรณี 4 $k = 10.0$, $\lambda = 1.0$ ที่ $N = 800$ ค่าไอเก้นพลังงาน ที่ระดับพลังงานสถานนะพื้น (n=0) เท่ากับ -20.633761083520948 และค่าไอเก้นพลังงานที่ระดับพลังงานสถานนะกระตุ้นแรก (n=1) เท่ากับ -20.633726656436917 (ในหน่วยไม่เจาะจง) หรือกรณี 5 $k = 25.0$, $\lambda = 1.0$ ที่ $N = 20,000$ ค่าไอเก้นพลังงานที่ระดับพลังงานสถานนะพื้น (n=0) เท่ากับ -149.21945611569225 และค่าไอเก้นพลังงานที่ระดับพลังงานสถานนะกระตุ้นแรก (n=1) เท่ากับ -149.21945611569038 (ในหน่วยไม่เจาะจง) เป็นต้น มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นที่ค่าไอเก้นพลังงานของระดับพลังงานสถานะสมมาตรและระดับพลังงานสถานะปฏิสมมาตรที่อยู่ใกล้กันอยู่ค่อนข้างห่างกัน คือกรณี 1 $k = 2.5$ และ $\lambda = 1.5$ ดังแสดงในตาราง 2 และ 3

2. เมื่อพิจารณาผลการเปรียบเทียบค่าไอเก้นพลังงานของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกันทุกกรณี ด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ที่ $N = 800$ มีค่าเปอร์เซนต์ความแตกต่างกันอยู่ระหว่างในระดับ 10^{-4} ถึง 10^{0} ส่วนผลการเปรียบเทียบค่าไอเก้นพลังงานของปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกันทุกกรณี ด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ที่ $N = 20,000$ มีความแตกต่างกันอยู่ระหว่างในระดับ 10^{-8} ถึง 10^{-2} จะเห็นได้ว่าค่าไอเก้นพลังงานของแต่ละกรณีที่ระดับ

พลังงานต่างๆ เมื่อคำนวณโดยใช้จำนวนช่วงจุดมากๆ จะมีค่าเปอร์เซนต์ความแตกต่างกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ซึ่งมีความแม่นยำสูง น้อยกว่าการคำนวณซึ่งใช้จำนวนช่วงจุดน้อยๆ และแสดงให้เห็นได้ว่าการแก้ปัญหาบ่อศักย์คู่กำลังสี่ 1 มิติด้วยวิธีการยิงคำตอบผลที่ได้มีความแม่นยำสูง

3. **เมื่อพิจารณาค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างของค่าไอเก้นพลังงานของปัญหาบ่อศักย์คู่**กำลังสี่ 1 มิติที่มีค่า k และ λ แตกต่างกันทุกกรณี ด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ที่ N = 800 กับ N = 20,000 ทั้งสองกรณี พบว่าที่สถานะต่ำๆ (n = 0 ถึง n = 2) มีค่าเปอร์เซ็นต์ความแตกต่างน้อยกว่าที่สถานะสูงๆ (n = 7 ขึ้นไป)

4. การเลือกจำนวนช่วงจุดในการคำนวณมีการเลือกจำนวนช่วงจุดโดยมีการพิจารณาคือที่ N= 800 พิจารณาในกรณีของการแก้ปัญหาเดียวกันนี้โดยใช้วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element Method) [2] พบว่าจำนวนช่วงจุดสูงสุดที่สามารถหาค่าไอเก้นพลังงานได้คือ จำนวนช่วงจุดเท่ากับ 800 ช่วงจุด ส่วนกรณีของการใช้จำนวนช่วงจุดที่ N = 20,000 นั้น ผู้วิจัยได้ทำการทดลองยิงคำตอบโดยเพิ่มจำนวนช่วงจุดจาก 800 เป็น 1,000 , 5,000 , 10,000 , 20,000 และ 25,000 พบว่าที่ N = 20,000 ใช้เวลาในการยิงคำตอบเหมาะสมที่สุด

5. ค่าเปอร์เซนต์ความแตกต่างของค่าไอเก้นพลังงานที่ได้จากวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขบนครึ่งโดเมนกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์เกิดขึ้นเนื่องจากในวิธีวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขบนครึ่งโดเมนนั้นมีการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ (สมการ (16)) เป็นสมการในรูปผลต่างไฟไนต์ (สมการ (17)) ซึ่งในการคำนวณโดยสมการ (17) นั้นย่อมเกิดค่าความคลาดเคลื่อน

ข้อเสนอแนะ

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้มีข้อเสนอแนะในการทำวิจัยซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. การคำนวณค่าไอเก้นพลังงานควรใช้จำนวนช่วงจุด ที่มากกว่า 20,000 ได้ซึ่งจะทำให้ได้ผลที่มีความแม่นยำสูงมากขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการฮิลล์ดีเทอร์มิแนนท์ที่มีความแม่นยำสูง ทั้งนี้ถ้าสามารถประมวลผลบนเครื่องคอมพิวเตอร์ขนาดใหญ่ เช่น Work Station หรือใช้ระบบ**คอมพิวเตอร์คู่ขนาน** (Parallel Computer System) ได้

2. **การเริ่มต้นการยิงคำตอบต้องอาศัยค่าเริ่มต้นจากวิธีอื่นที่มีความแม่นยำสูงจึงจะทำให้เสียเวลาในการยิงไม่นาน**

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. การแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ควอนตัมด้วยวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขกับปัญหาอื่นในส่วนการคำนวณควรใช้จำนวนช่วงจุดมากๆ จึงจะได้ผลที่มีความแม่นยำสูงเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีอื่นที่มีความแม่นยำสูง

2. ในการแสดงผลการคำนวณค่าไอเก้นพลังงานกับฟังก์ชันคลื่นในรูปกราฟนั้นต้องประมวลผลโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ดังนั้นใช้คอมพิวเตอร์ควรมีสมรรถนะในการประมวลผลสูงกว่า Pentium 4 ถ้าเป็นไปได้อาจเป็น Work Station หรือใช้ระบบคู่ขนาน (Parallel System) ได้

3. ควรนำวิธีการยิงคำตอบเชิงตัวเลขใช้กับปัญหารูปแบบเดียวกันในกรณี 2 และ 3 มิติ