ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญในการประเมินความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. รองศาสตราจารย์เที่ยง ภูมิสะอาด	มหาวิทยาลัยขอนแก่น
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์มารศรี แนวจำปา	มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี
3. ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี	มหาวิทยาลัยนเรศวร

รายนามผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบแผนการจัดการเรียนรู้โดยวิธีการสอนแบบ 4 MAT และคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

1. รองศาสตราจารย์เที่ยง ภูมิสะอาด	มหาวิทยาลัยขอนแก่น
2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์มารศรี แนวจำปา	มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์เผ่าไทย วงศ์เหลา	มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี

ภาคผนวก ข

ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม

ตาราง 8 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม จำนวน 30 ข้อ

คน	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			$\sum R$	IOC
ข้อ	1	2	3		
1	1	1	1	3	1
2	1	1	1	3	1
3	1	1	1	3	1
4	1	1	1	3	1
5	1	1	1	3	1
6	1	1	1	3	1
7	1	1	1	3	1
8	1	1	1	3	1
9	1	1	1	3	1
10	1	1	1	3	1
11	1	1	1	3	1
12	1	1	1	3	1
13	1	1	1	3	1
14	1	1	1	3	1
15	1	1	1	3	1

ตาราง 8 (ต่อ)

คน / ข้อ	ความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			$\sum R$	IOC
	1	2	3		
16	1	1	1	3	1
17	1	1	1	3	1
18	1	1	1	3	1
19	1	1	1	3	1
20	1	1	1	3	1
21	1	1	1	3	1
22	1	1	1	3	1
23	1	1	1	3	1
24	1	1	1	3	1
25	1	1	1	3	1
26	1	1	1	3	1
27	1	1	1	3	1
28	1	1	1	3	1
29	1	1	1	3	1
30	1	1	1	3	1

ตาราง 9 แสดงค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม จำนวน 30 ข้อ

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อที่	แบบทดสอบข้อที่	ผลระดับความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญคนที่			รวม	เฉลี่ย
		1	2	3		
1	1	1	1	1	3	1
2	2	1	1	1	3	1
	3	1	1	1	3	1
3	4	1	1	1	3	1
	5	1	1	1	3	1
	6	1	1	1	3	1
	7	1	1	1	3	1
	8	1	1	1	3	1
4	9	1	1	1	3	1
	10	1	1	1	3	1
	11	1	1	1	3	1
	12	1	1	1	3	1
	13	1	1	1	3	1
5	14	1	1	1	3	1
	15	1	1	1	3	1

ตาราง 9 (ต่อ)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังข้อที่	แบบทดสอบข้อที่	ผลระดับความคิดเห็นผู้เชี่ยวชาญคนที่			รวม	เฉลี่ย
		1	2	3		
6	16	1	1	1	3	1
	17	1	1	1	3	1
7	18	1	1	1	3	1
	19	1	1	1	3	1
	20	1	1	1	3	1
	21	1	1	1	3	1
8	22	1	1	1	3	1
9	23	1	1	1	3	1
	24	1	1	1	3	1
	25	1	1	1	3	1
	26	1	1	1	3	1
10	27	1	1	1	3	1
	28	1	1	1	3	1
	29	1	1	1	3	1
	30	1	1	1	3	1

ภาคผนวก ค

ค่าความยาก (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม

ตาราง 10 แสดงค่าความยาก (p) ค่าอำนาจจำแนก (r) และค่าความเชื่อมั่น (r_{tt}) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค 41202 เรื่อง วงกลม จำนวน 30 ข้อ

ข้อที่	p	r	ข้อที่	P	R
1	0.58	0.50	16	0.50	0.33
2	0.41	0.50	17	0.58	0.50
3	0.58	0.50	18	0.50	0.33
4	0.67	0.33	19	0.67	0.67
5	0.67	0.33	20	0.50	0.67
6	0.66	0.33	21	0.50	0.67
7	0.75	0.50	22	0.50	0.33
8	0.67	0.67	23	0.58	0.50
9	0.67	0.33	24	0.67	0.67
10	0.67	0.33	25	0.50	0.67
11	0.50	0.67	26	0.50	0.33
12	0.58	0.50	27	0.58	0.50
13	0.67	0.33	28	0.50	0.33
14	0.50	0.67	29	0.58	0.50
15	0.58	0.50	30	0.33	0.67

ตาราง 11 แสดงค่า p, q และ pq ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม จำนวน 30 ข้อ

ข้อ	P	q = 1-p	pq	ข้อที่	p	q=1-p	pq
1	0.72	0.28	0.20	16	0.39	0.61	0.24
2	0.56	0.44	0.25	17	0.78	0.22	0.17
3	0.61	0.39	0.24	18	0.5	0.5	0.25
4	0.78	0.22	0.17	19	0.56	0.44	0.25
5	0.61	0.39	0.24	20	0.67	0.33	0.22
6	0.56	0.44	0.25	21	0.56	0.44	0.25
7	0.50	0.50	0.25	22	0.61	0.39	0.24
8	0.56	0.44	0.25	23	0.39	0.61	0.24
9	0.78	0.22	0.17	24	0.50	0.50	0.25
10	0.72	0.28	0.20	25	0.56	0.44	0.25
11	0.67	0.33	0.22	26	0.44	0.56	0.25
12	0.83	0.17	0.14	27	0.44	0.56	0.25
13	0.67	0.33	0.22	28	0.50	0.50	0.25
14	0.72	0.28	0.20	29	0.56	0.44	0.25
15	0.67	0.33	0.22	30	0.50	0.50	0.25

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง วงกลม

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left[1 - \frac{\sum pq}{s_t^2}\right]$$

$$= \frac{30}{30-1}\left[1 - \frac{6.81}{4.62}\right]$$

$$= 0.91$$

นั่นคือ ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.91

ภาคผนวก ง

คะแนนก่อนเรียนและหลังเรียนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม ของกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยใช้
คอมพิวเตอร์ช่วยสอน และกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดย
ใช้รูปแบบการสอนแบบ 4 MAT

ตาราง 12 แสดงคะแนนก่อนเรียนและคะแนนหลังเรียน ที่ได้จากแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม ของกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่องวงกลม		อัตราการเพิ่ม (ร้อยละ)
	คะแนนก่อนเรียน	คะแนนหลังเรียน	
1	15	27	40.00
2	13	25	40.00
3	14	26	40.00
4	12	25	43.33
5	13	24	36.67
6	12	24	40.00
7	11	23	40.00
8	8	22	46.67
9	10	20	33.33
10	10	20	33.33
11	9	21	40.00
12	9	24	50.00
13	11	23	40.00
14	9	22	43.33
15	12	23	36.67

ตาราง 12 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่องวงกลม		อัตราการเพิ่ม (ร้อยละ)
	คะแนนก่อนเรียน	คะแนนหลังเรียน	
16	9	23	46.67
17	8	21	43.33
18	9	23	46.67
19	10	21	36.67
20	10	21	36.67
21	7	23	53.33
22	10	24	46.67
23	8	23	50.00
24	8	23	50.00
25	9	21	40.00
26	8	22	46.67
27	7	20	43.33
28	8	19	36.67
29	6	18	40.00
30	4	17	43.33

ตาราง 13 แสดงคะแนนก่อนเรียนและคะแนนหลังเรียน ที่ได้จากแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม ของกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยใช้รูปแบบการสอนแบบ 4 MAT

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่องวงกลม		อัตราการเพิ่ม (ร้อยละ)
	คะแนนก่อนเรียน	คะแนนหลังเรียน	
1	15	28	43.33
2	14	26	40.00
3	13	26	43.33
4	11	25	46.67
5	12	26	46.67
6	14	25	36.67
7	10	26	53.33
8	11	24	43.33
9	10	27	56.67
10	9	26	56.67
11	11	25	46.67
12	12	25	43.33
13	10	24	46.67
14	11	23	40.00
15	9	22	43.33

ตาราง 13 (ต่อ)

คนที่	คะแนนจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่องวงกลม		อัตราการเพิ่ม (ร้อยละ)
	คะแนนก่อนเรียน	คะแนนหลังเรียน	
16	9	23	46.67
17	12	22	33.33
18	8	23	50.00
19	11	24	43.33
20	9	20	36.67
21	10	25	50.00
22	9	20	36.67
23	8	22	46.67
24	12	23	36.67
25	9	21	40.00
26	8	19	36.67
27	7	21	46.67
28	10	23	43.33
29	6	21	50.00
30	7	22	50.00

ตาราง 14 แสดงคะแนนหลังเรียนที่ได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม ของกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยสอน และกลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยใช้รูปแบบการสอนแบบ 4 MAT

กลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยรูปแบบการสอนแบบ 4 MAT		กลุ่มตัวอย่างที่สอนโดยคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	
คนที่	คะแนนหลังเรียน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)	คนที่	คะแนนหลังเรียน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)
1	28	1	27
2	26	2	25
3	26	3	26
4	25	4	25
5	26	5	24
6	25	6	24
7	26	7	23
8	24	8	22
9	27	9	20
10	26	10	20
11	25	11	21
12	25	12	24
13	24	13	23
14	23	14	22
15	22	15	23
16	23	16	23
17	22	17	21
18	23	18	23
19	24	19	21
20	20	20	21

ตาราง 14 (ต่อ)

กลุ่มตัวอย่างที่สอนโดย รูปแบบการสอนแบบ 4 MAT		กลุ่มตัวอย่างที่สอนโดย คอมพิวเตอร์ช่วยสอน	
คนที่	คะแนนหลังเรียน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)	คนที่	คะแนนหลังเรียน (คะแนนเต็ม 30 คะแนน)
21	25	21	23
22	20	22	24
23	22	23	23
24	23	24	23
25	21	25	21
26	19	26	22
27	21	27	20
28	23	28	19
29	21	29	18
30	22	30	17

ภาคผนวก จ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202
เรื่อง วงกลม จำนวน 30 ข้อ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน กลุ่มสาระคณิตศาสตร์
วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม

1. ถ้าเราใช้ระนาบตัดกรวยในแนวตั้งฉากกับแกนของกรวยรอยตัดที่ได้จะเกิดเป็นรูปอะไร

ก. วงกลม
ข. วงรี
ค. พาราโบลา
ง. ไฮเพอร์โบลา

2. ข้อใดเป็นสมการของวงกลม

ก. $x^2+y^2+4x-6y-17=0$
ข. $x^2+y^2-x+2y+10=0$
ค. $x^2+y^2-2x+3y+12=0$
ง. $x^2+y^2-4x-6y+13=0$

3. ข้อใดเป็นสมการวงกลม

ก. $2-x^2-y^2=0$
ข. $x^2+y^2+8x+6y+25=0$
ค. $x^2+y^2+2xy-5=0$
ง. $3x^2+3y^2+9x-6y+21=0$

4. สมการวงกลม $x^2+y^2+x-3=0$ มีจุดศูนย์กลางตรงกับข้อใด

ก. (1 , 0)
ข. (-1 , 0)
ค. $(\frac{1}{2},0)$
ง. $(-\frac{1}{2},0)$

5. วงกลมในข้อใดมีรัศมียาวที่สุด

ก. $x^2+y^2=5$
ข. $x^2+y^2-x-2=0$
ค. $x^2+y^2+4y+3=0$
ง. $x^2+y^2+x+y-4=0$

6. ข้อใดเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $5(x+1)^2+5(y-3)^2=2$

ก. (1 , 3)
ข. (1 , - 3)
ค. (-1 , -3)
ง. (-1 , 3)

7. จงหาความยาวรัศมีของสมการวงกลม $2x^2+2y^2-3y=5$

ก. $\frac{3}{4}$
ข. $\frac{7}{4}$
ค. 5
ง. $\frac{5}{4}$

8. จุดศูนย์กลางของวงกลม $3x^2+3y^2-15x+12y+24=0$ อยู่บนเส้นตรงในข้อใด

ก. $4x+3y+4=0$
ข. $2x-y-7=0$
ค. $4x-3y-4=0$
ง. $2x+y+7=0$

9. ข้อใดเป็นสมการวงกลม ที่มีจุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่ (3 , 5) และ (-1 , 3)

ก. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 2 = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 4 = 0$

10. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1 , 2) และรัศมี 5 หน่วย

ก. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$ ข. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5^2$

ค. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ ง. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$

11. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (-2, 0) และมีรัศมี 2 หน่วย คือความสัมพันธ์ใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 + 4y = 0\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 + 4x = 0\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 - 4y = 0\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 - 4x = 0\}$

12. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (-4, 3) มีรัศมี 7 หน่วย คือข้อใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 = 0\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 + 8x - 6y + 24 = 0\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R | 2x^2 + 2y^2 + 16x - 12y - 48 = 0\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R | 2x^2 + 2y^2 - 16x + 12y + 48 = 0\}$

13. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 3) และมีรัศมี 3 หน่วย คือความสัมพันธ์ใด

ก. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 - 6y = 0\}$

ข. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 - 6x = 0\}$

ค. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 + 6y = 0\}$

ง. $\{(x,y) \in R \times R | x^2 + y^2 + 6x = 0\}$

14. ค่าของ m จะต้องมีค่าเท่าไรจึงจะทำให้สมการวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2my - 12 = 0$ มีรัศมียาว 5 หน่วย

ก. -3 ข. 3

ค. 9 ง. ถูกทั้งข้อ ก และ ข

15. ข้อใดเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (0, 0) และรัศมียาว 5 หน่วย

ก. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ ข. $x^2 + (y-5)^2 = 25$

ค. $(x-5)^2 + y^2 = 25$ ง. $x^2 + y^2 = 25$

16. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (-1 , 2) และเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 6 หน่วย

ก. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ ข. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

ค. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ ง. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$

17. ข้อใดเป็นความสัมพันธ์ของวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $2x - y = 4$ และเส้นตรง $3x + y = 6$

ก. $\{(x, y) \in R \times R / x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0\}$

ข. $\{(x, y) \in R \times R / x^2 + y^2 - 4x = 0\}$

ค. $\{(x, y) \in R \times R / x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0\}$

ง. $\{(x, y) \in R \times R / x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0\}$

18. วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (5 , -3) มีพื้นที่ 154 ตารางหน่วย และผ่านจุด (5 , k) แล้ว k มีค่าตรงกับข้อใด

ก. –10 , -4 ข. –10 , 4

ค. 10 , -4 ง. 10 , 4

19. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0 , 0) และผ่านจุด (5 , -12)

ก. $x^2 + y^2 = 25$ ข. $x^2 + y^2 = 144$

ค. $x^2 + y^2 = 169$ ง. $x^2 + y^2 = 12$

20. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 3) และสัมผัสเส้นตรง $x + y + 2 = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$ ข. $2x^2 + 2y^2 - 12y - 7 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 6y + 11 = 0$ ง. $4x^2 + 4y^2 - 24y + 11 = 0$

21. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (3, -2) และสัมผัสกับเส้นตรง $2x - y = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

ค. $3x^2 + 3y^2 - 26x - 4y + 55 = 0$ ง. $5x^2 + 5y^2 - 30x + 20y + 1 = 0$

22. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 11 = 0$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y + 17 = 0$

ก. $x^2 + y^2 - 5x + 6y - 3 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 8x + 3y - 9 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 3x + 4y + 9 = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

23. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และสัมผัสกับเส้นตรง $5x + 12y = 26$

ก. $x^2 + y^2 = 9$ ข. $x^2 + y^2 = 4$

ค. $x^2 + y^2 = 16$ ง. $x^2 + y^2 = 3$

24. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, 2) และสัมผัสแกน Y

ก. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ ข. $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$

ค. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2^2$ ง. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$

25. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่ผ่านจุด (0, 0), (1, 0) และ (0, 1)

ก. $x^2 + y^2 - 10y = 0$ ข. $x^2 + y^2 + 6y = 0$

ค. $x^2 + y^2 - x - y = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

26. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด (-2, 8), (2, 6) และ (-7, 3)

ก. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 12x + 2y - 10 = 0$

27. ข้อใดเป็นสมการของวงกลมที่ผ่านจุด A(4, 3), B(-2, 1) และ C(2, -3) ซึ่งเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC

ก. $x^2 + y^2 - 5x - y + 10 = 0$ ข. $x^2 + y^2 - 4x + 3y - 2 = 0$

ค. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 4 = 0$ ง. $x^2 + y^2 - 3x - y - 10 = 0$

28. กำหนดจุด P(1, 7), Q(8, 6) และ R(7, -1) ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่าน P, Q และ R แล้ว C จะอยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทางกี่หน่วย

ก. 4 ข. 5

ค. $3\sqrt{2}$ ง. $4\sqrt{2}$

29. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัสที่วัดจากจุด A บนเส้นสัมผัสไปถึงจุดสัมผัสบนวงกลม เมื่อกำหนดให้สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 9$ และ A(7, 8)

ก. $2\sqrt{26}$ ข. $2\sqrt{3}$

ค. 9 ง. 5

30. ข้อใดเป็นจำนวนจริง k ที่ทำให้ความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 + 2ky = 0$ ที่วัดจากจุด A(5, 4) บนเส้นสัมผัสไปยังจุดสัมผัสมีความยาว 1 หน่วย

ก. -5 ข. -4

ค. 6 ง. 3

เฉลยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค41202
เรื่อง วงกลม

1.	ก	7.	ข	13.	ก	19.	ค	25.	ค
2.	ก	8.	ข	14.	ง	20.	ข	26.	ก
3.	ก	9.	ก	15.	ง	21.	ง	27.	ง
4.	ง	10.	ค	16.	ค	22.	ง	28.	ข
5.	ก	11.	ข	17.	ข	23.	ข	29.	ก
6.	ง	12.	ค	18.	ข	24	ก	30.	ก

ภาคผนวก ฉ

แผนการจัดการเรียนรู้วิธีการสอนแบบ 4 MAT วิชาคณิตศาสตร์ ค41202
เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 4
สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม **รหัส** ค41202
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 **วงกลม** **การเรียนรู้รายภาค**
เรื่อง สมการวงกลม **จำนวน** 2 **ชั่วโมง**

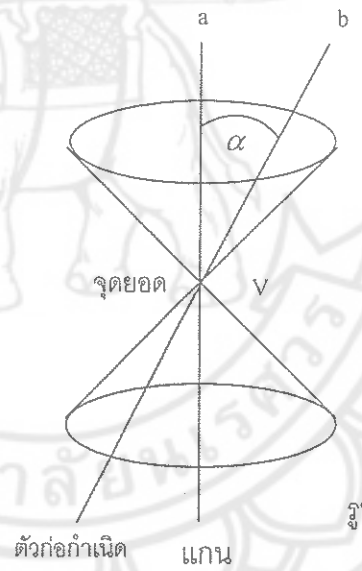
แผนผังความคิด
(Mind Mapping)

1. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมี
2. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน
3. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและสมการเส้นสัมผัสวงกลมนั้น
4. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่วงกลมสัมผัส
5. เมื่อทราบจุดที่วงกลมผ่าน 3 จุด

1. **มาตรฐานการเรียนรู้ หรือจุดประสงค์การเรียนรู้**
   1. สามารถบอกผลที่เกิดจากการตัดกรวย ในแนวระนาบต่าง ๆ เกิดเป็นรูปอะไรบ้าง
   2. สามารถบอกความหมายของวงกลมในเชิงเรขาคณิตได้
2. **สาระการเรียนรู้**
   1. ภาคตัดกรวย (Cone Section)

การศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้วิธีการเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้

ให้ a และ b เป็นเส้นตรงใด ๆ สองเส้นตัดกันที่จุด V เป็นมุมแหลม α ให้เส้นตรง a และจุด V ตรึงอยู่กับที่ผิวที่เกิดจากการหมุนของเส้นตรง b รอบเส้นตรง a (โดยมุม α ระหว่างเส้นตรง a และ b มีขนาดคงตัว) เรียกว่า กรวยกลมตรง (Right Circular cone) ดังแสดงในรูปที่ 1 ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรวยกลมตรงเท่านั้น และจะเรียกสั้น ๆ ว่า กรวย เส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า แกน (axis) ของกรวย จุด V เรียกว่า จุดยอด (Vertex) เส้นตรง b ที่ผ่านจุด V



รูปที่ 1

ทำมุม α กับแกนกรวย เรียกว่า ตัวก่อกำเนิด (generator) ของกรวย จุดยอด V แบ่งกรวยออกเป็นสองข้าง (napes) ซึ่งอยู่คนละด้านของจุดยอด

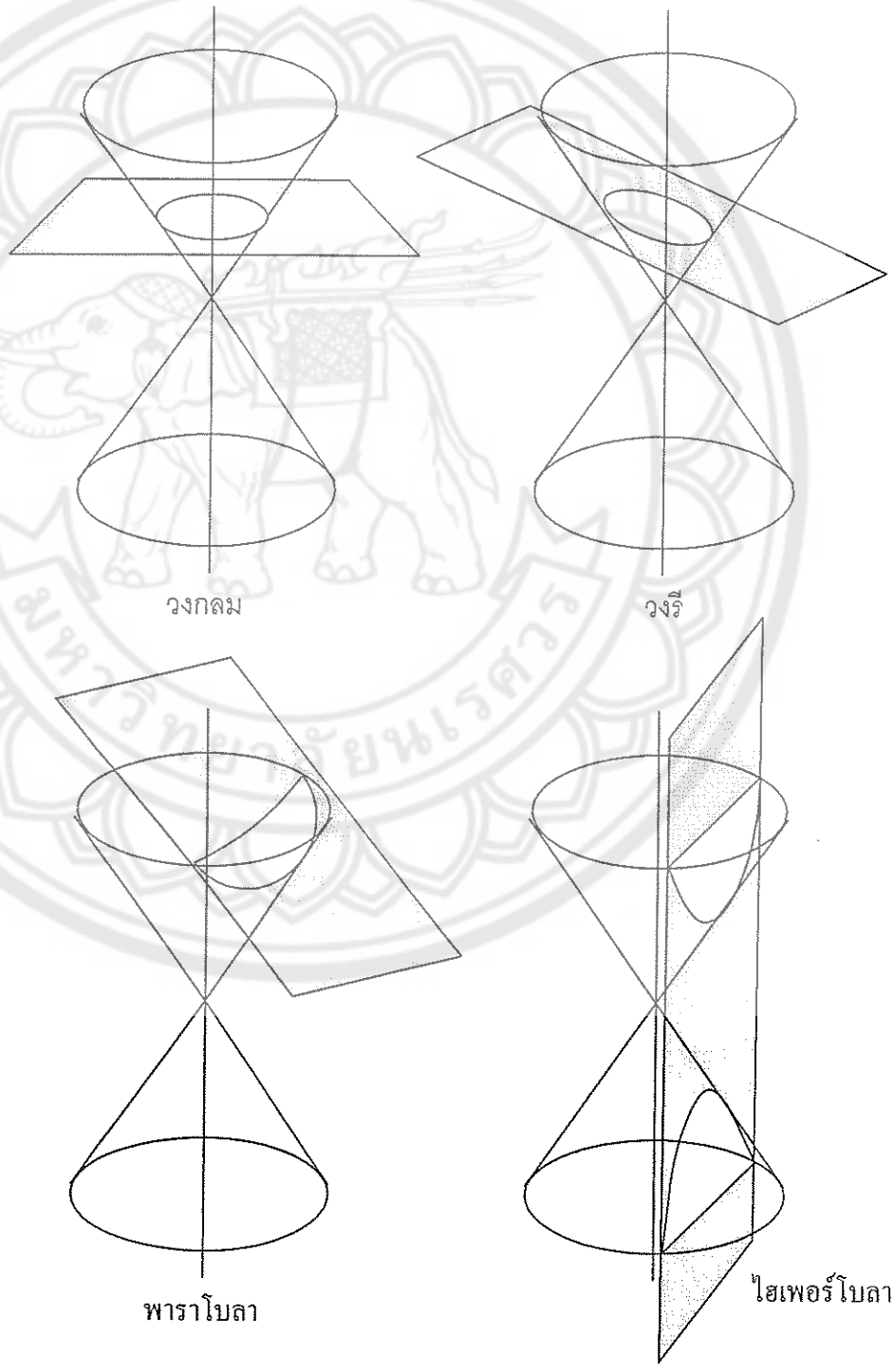
ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษาจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยดังแสดงในรูปที่ 2

1.) เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม (Circle)

2.) เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี (ellipse)

3.) เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวยระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา (parabola)

4.) เมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)



รูปที่ 2

1.1 วงกลม

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม

วงกลม (Circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

3. ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี

1. สามารถบอกผลที่เกิดจากการตัดกรวยในแนวระนาบต่าง ๆ ว่าเกิดเป็นรูปอะไรบ้าง
2. สามารถบอกความหมายของวงกลมในเชิงเรขาคณิตได้

4. การวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้ที่คาดหวัง (พฤติกรรมที่ระบุไว้ในผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง)

4.1 ด้านความรู้ (K)	เข้าใจหลักการและความสำคัญของภาคตัดกรวย
4.2 ด้านเจตคติ (A)	มีนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ เสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีต่อการคิดคำนวณ
4.3 ด้านทักษะ (P)	การนำเอาภาคตัดกรวยไปใช้ในชีวิตประจำวัน หรือการนำไปศึกษาระดับสูงต่อไป

5. สาระการเรียนรู้รายปี

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ให้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 : ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

6. กระบวนการจัดการเรียนรู้ (กิจกรรมการเรียนรู้)

ขั้นนำ

1 R

ชั่วโมงที่ 1 (ครูสั่งล่วงหน้าให้นักเรียนนำดินเหนียวหรือดินน้ำมันมา)

1. ครูถามนักเรียนว่านักเรียนรู้จักกรวยไหม ? (ถ้าไม่รู้จักให้ครูนำกรวยจำลองที่สร้างขึ้นให้นักเรียนดู)
2. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 – 5 คน ให้ทำตามคำสั่งในใบงานที่ 1

2 L

3. ให้นักเรียนภายในกลุ่มอภิปรายแลกเปลี่ยนคำตอบซึ่งกันและกันในใบงานที่ 1 แล้วสรุปเป็นคำตอบของกลุ่มตัวเองเขียนสรุปเป็นหลักเกณฑ์ของกลุ่มของตนเอง

ขั้นสอน

3 R

4. ให้แต่ละกลุ่มนำเสนอแนวความคิด หลักเกณฑ์ที่คิดได้หน้าชั้นเรียนและโชว์ผลงานไว้โต๊ะกลางให้กลุ่มอื่นศึกษา แลกเปลี่ยนซักถาม
5. ครูเขียนสรุปผลงานของนักเรียนทุกกลุ่มไว้บนกระดานดำและร่วมกับนักเรียนจัดกลุ่มผลงานที่ทำขึ้นในกลุ่มที่เหมือนกันและแยกกลุ่มที่แตกต่างกัน

4 R

6. ครูแจกใบความรู้ที่ 1 เนื้อหาเกี่ยวกับภาคตัดกรวยในเชิงเรขาคณิตให้แต่ละกลุ่มศึกษาและพิจารณาชิ้นงานของตนเองว่าแตกต่างกับเนื้อหาในใบงานหรือไม่ และศึกษาในใบความรู้ที่ 1 ให้เข้าใจ

5 L

7. ครูให้นักเรียนในกลุ่มช่วยกันเขียนนิยาม (ความหมายของการตัดกรวยในแนวตั้งฉากกับแกนของรอยตัดที่เกิดขึ้น

6 R

8. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปองค์ความรู้ที่ได้เรียนในชั่วโมงนี้พร้อมด้วยนิยามของวงกลมที่แต่ละกลุ่มได้คิดขึ้น

ขั้นสรุป

7 L

9. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มนำเสนอผลงานของตัวเองหน้าชั้นเรียน
10. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายนิยามของกลุ่มอื่นว่ามีลักษณะอย่างไร ? และสรุปเป็นนิยามของวงกลมร่วมกัน
11. ครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันสรุปกลุ่มที่ให้นิยามของวงกลมถูกต้อง ชัดเจน ครอบคลุมมากที่สุดได้ที่ 1 และที่ 2, ... ตามลำดับ

8 L

12. ครูและนักเรียนทั้งชั้นดูอุปกรณ์ในชีวิตประจำวันชิ้นใดบ้างที่อาศัยความรู้ใน เรื่อง ภาคตัดกรวย

ตารางกำหนดกิจกรรมการสอน

7. **สื่อการเรียนการสอน**

7.1 ประเภทสื่อ

7.1.1 ใบความรู้ที่ 1

7.1.2 ใบงานที่ 1

7.2 วัสดุ / อุปกรณ์

7.2.1 ดินเหนียว / ดินน้ำมัน

7.2.2 กระดาษชาร์ทขาวแผ่นใหญ่

7.2.3 ปากกาเคมี

7.2.4 มีด

7.2.5 กระดาษหนังสือพิมพ์

7.3 แหล่งการเรียนรู้

7.3.1 ห้องสมุด

7.3.2 ครู ผู้ปกครอง

7.3.3 อุปกรณ์ที่ใช้ในชีวิตประจำวัน

8. การวัดและประเมินผล

8.1 การตั้งคำถาม และการตอบคำถามอย่างมีเหตุผล

8.2 การตรวจแบบฝึกหัด

8.3 ความตั้งใจในการเรียน การแสดงความคิดเห็น

8.4 มีไหวพริบปฏิภาณ

9. การเชื่อมโยงบูรณาการกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น

10. คุณธรรม จริยธรรมที่สอดแทรก

10.1 เสริมสร้างนิสัยให้รู้จักการให้เหตุผล

10.2 รู้จักคิดประยุกต์เกี่ยวกับภาคตัดกรวยมาใช้ในชีวิตประจำวัน

11. กิจกรรมเสนอแนะ

การเรียนการสอนเรื่องนี้ ควรกำหนดให้นักเรียนทำกิจกรรมอย่างรัดกุม การนับเวลาและการทำความเข้าใจในเนื้อหาเพื่อสรุปเป็นองค์ความรู้ของตนเองให้มากที่สุด

12. บันทึกผลหลักการสอน

- ผลการสอน

.....

.....

.....

- ปัญหา / อุปสรรค

.....

.....

- ข้อเสนอแนะแนวทางแก้ไข

.....

.....

ลงชื่อ.....

( )

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

13. ความคิดเห็นของหัวหน้าสถานศึกษาหรือผู้ที่ได้รับมอบหมาย

(ตรวจ / นิเทศ / เสนอแนะ / รับรอง)

.....

.....

ลงชื่อ.....

( )

ตำแหน่ง.....

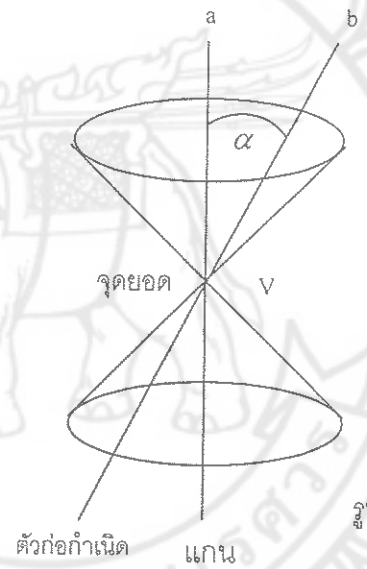
วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ใบความรู้ที่ 1
เรื่อง ภาคตัดกรวย

1. **ภาคตัดกรวย** (Cone Section)

การศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้วิธีการเรขาคณิตวิเคราะห์ ดังนี้

ให้ a และ b เป็นเส้นตรงใด ๆ สองเส้นตัดกันที่จุด V เป็นมุมแหลม α ให้เส้นตรง a และจุด V ตรึงอยู่กับที่ผิวที่เกิดจากการหมุนของเส้นตรง b รอบเส้นตรง a (โดยมุม α ระหว่างเส้นตรง a และ b มีขนาดคงตัว) เรียกว่า กรวยกลมตรง (Right Circular cone) ดังแสดงในรูปที่ 1 ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรวยกลมตรงเท่านั้น และจะเรียกสั้น ๆ ว่า กรวย เส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า แกน (axis) ของกรวย จุด V เรียกว่า จุดยอด (Vertex) เส้นตรง b ที่ผ่านจุด V



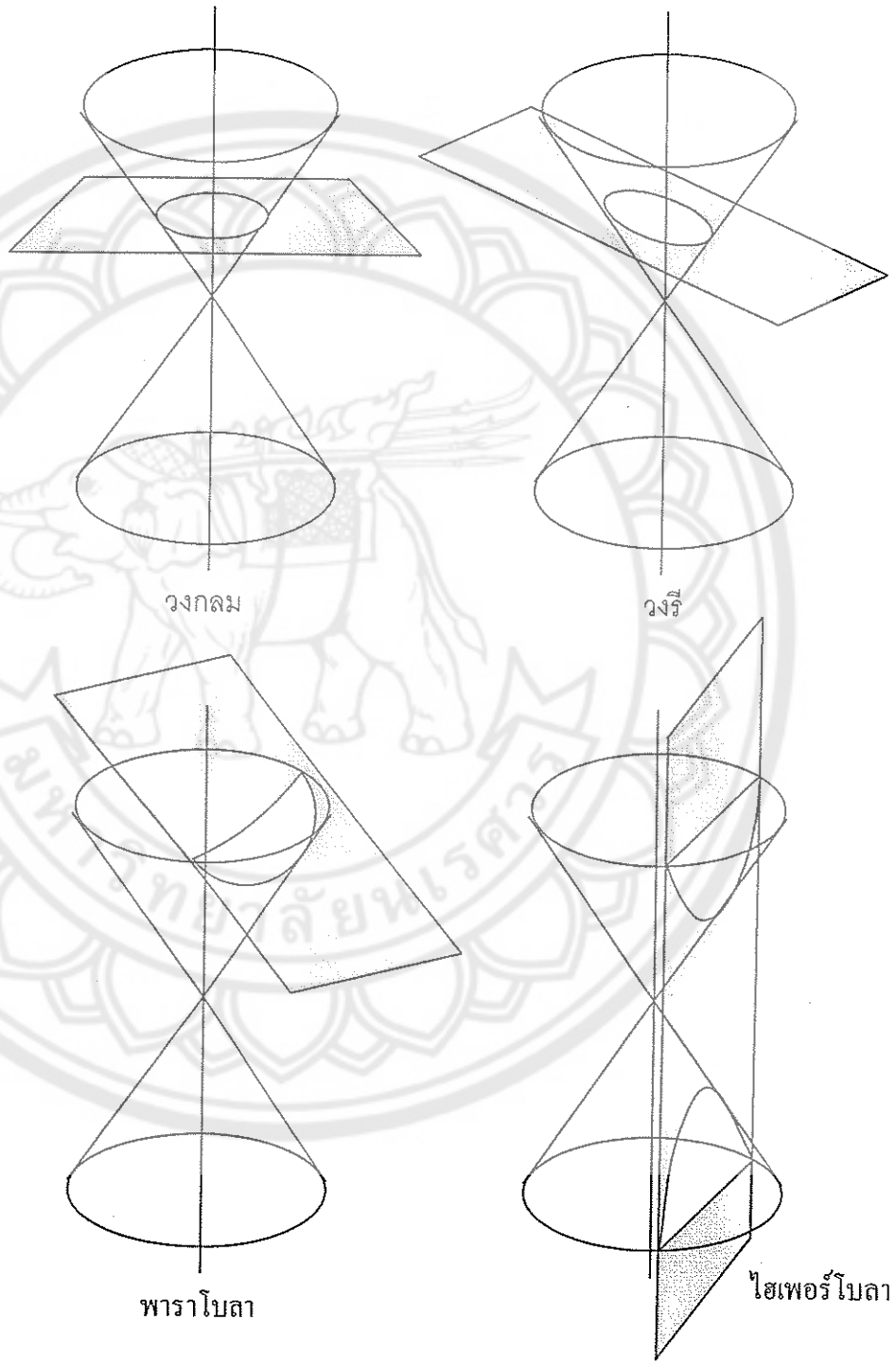
รูปที่ 1

ทำมุม α กับแกนกรวย เรียกว่า ตัวก่อกำเนิด (generator) ของกรวย จุดยอด V แบ่งกรวยออกเป็นสองข้าง (napes) ซึ่งอยู่คนละด้านของจุดยอด

ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษาจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยดังแสดงในรูปที่ 2

1) เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม (Circle)
2) เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี (ellipse)
3) เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวยระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา (parabola)

4) เมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)



รูปที่ 2

1.1 วงกลม

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม

วงกลม (Circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (Center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

ใบงานที่ 1

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกกลุ่ม

1. ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น ม.4/..... เลขที่.....
2. ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น ม.4/..... เลขที่.....
3. ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น ม.4/..... เลขที่.....
4. ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น ม.4/..... เลขที่.....
5. ชื่อ – นามสกุล.....ชั้น ม.4/..... เลขที่.....

ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตัดกรวยที่นักเรียนสร้างขึ้นด้วยระนาบในแนวต่าง ๆ กับแกนของกรวย เส้นประกอบรูปกรวย แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. รอยตัดที่เกิดขึ้นเกิดเป็นรูปอะไร และวาดรูปจากรอยตัดที่ได้

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. นักเรียนมีหลักเกณฑ์ในการแบ่งชนิดของรอยตัดที่เกิดขึ้นอย่างไร

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. นักเรียนคิดว่าเรานำความรู้ในเรื่องภาคตัดกรวยไปใช้ในชีวิตประจำวันในเรื่องใดได้บ้าง

.....

.....

.....

.....

.....

แบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แบบทดสอบที่ 1

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 1 สามารถบอกผลที่เกิดจากการตัดกรวยในแนวระนาบต่าง ๆ เกิดเป็นรูปอะไรบ้าง

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 2 สามารถบอกความหมายของวงกลมในเชิงเรขาคณิตได้

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ขนานกับแกนของกรวยจะเกิดเป็นเส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
   ก. วงกลม
   ข. วงรี
   ค. พาราโบลา
   ง. ไฮเปอร์โบลา
2. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยจะเกิดเป็นเส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
   ก. วงกลม
   ข. วงรี
   ค. พาราโบลา
   ง. ไฮเปอร์โบลา
3. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยจะเกิดเป็นเส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
   ก. วงกลม
   ข. วงรี
   ค. พาราโบลา
   ง. ไฮเปอร์โบลา
4. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบเพียงส่วนเดียวโดยไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและไม่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยจะเกิดเป็นรูปตรงกับข้อใด
   ก. วงกลม
   ข. วงรี
   ค. พาราโบลา
   ง. ไฮเปอร์โบลา

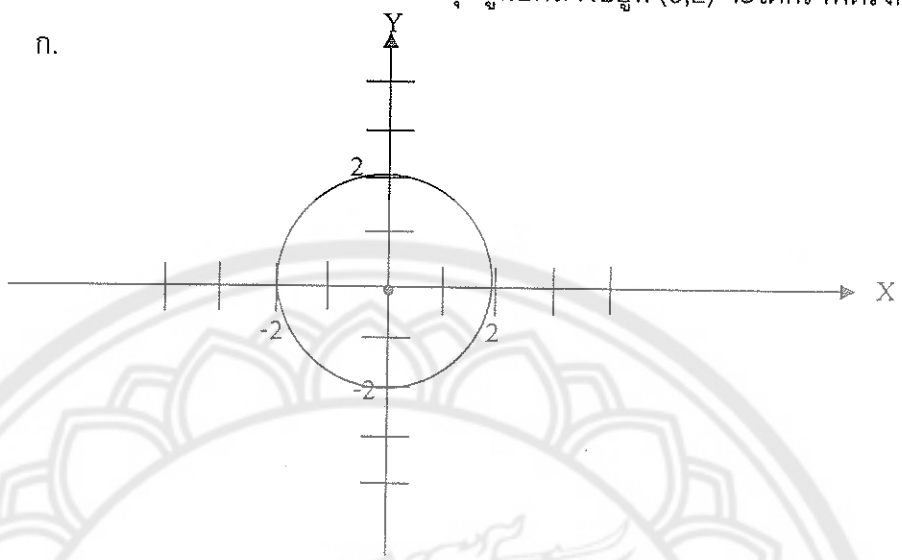
ใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 5 – 9

"เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน (คงที่) เสมอ"

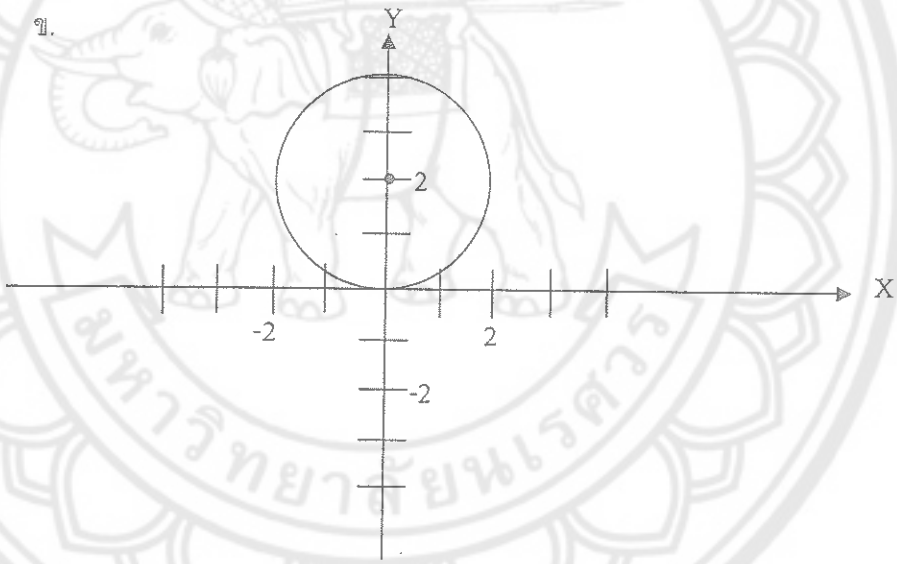
5. เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบจะทำให้เกิดเส้นรอบวงของวงกลมเมื่อเป็นไปตามข้อใด
   ก. จุด ๆ หนึ่งต้องอยู่คงที่
   ข. จุด ๆ หนึ่งต้องเป็นสมาชิกในเซตของจุด
   ค. ถูกทั้งข้อ ก และ ข
   ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง
6. กรณีที่เซตของจุดดังกล่าวที่ทำให้เกิดวงกลม เซตของจุดจะเป็นส่วนใดของวงกลม ตรงกับข้อใด
   ก. รัศมี
   ข. จุดโฟกัส
   ค. จุดศูนย์กลาง
   ง. พื้นที่ของวงกลม
7. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วจุด ๆ หนึ่งที่คงที่มีความหมายตรงกับข้อใด
   ก. รัศมี
   ข. จุดโฟกัส
   ค. เส้นรอบวง
   ง. จุดศูนย์กลาง
8. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วระยะทางที่คงที่มีความหมายตรงกับข้อใด
   ก. รัศมี
   ข. จุดโฟกัส
   ค. เส้นรอบวง
   ง. จุดศูนย์กลาง
9. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเซตของจุดนี้มีความหมายตรงกับข้อใด
   ก. เส้นรอบวง
   ข. จุดศูนย์กลาง
   ค. พื้นที่ของวงกลม
   ง. ไม่มีข้อใดถูก

10. จากกราฟวงกลมรัศมี เท่ากับ 2 หน่วย มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,2) จะได้กราฟตรงกับข้อใด

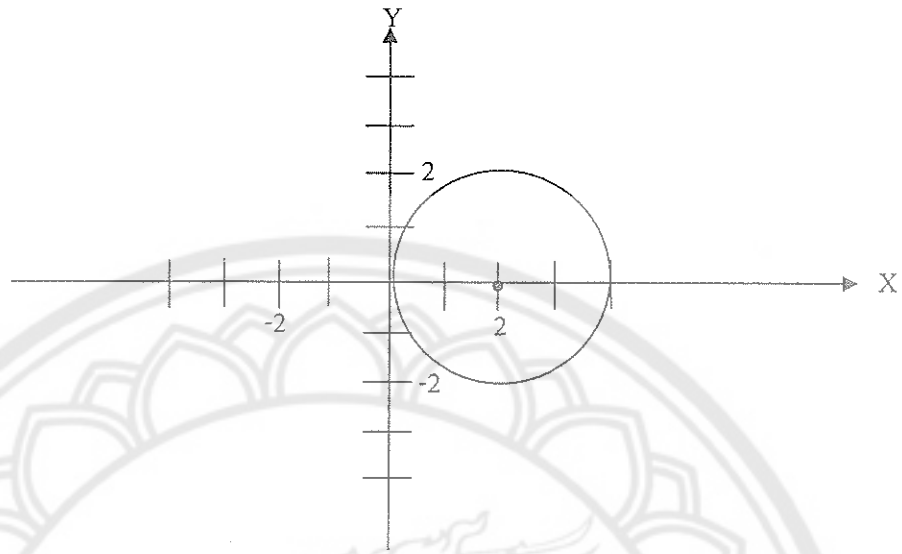
ก.



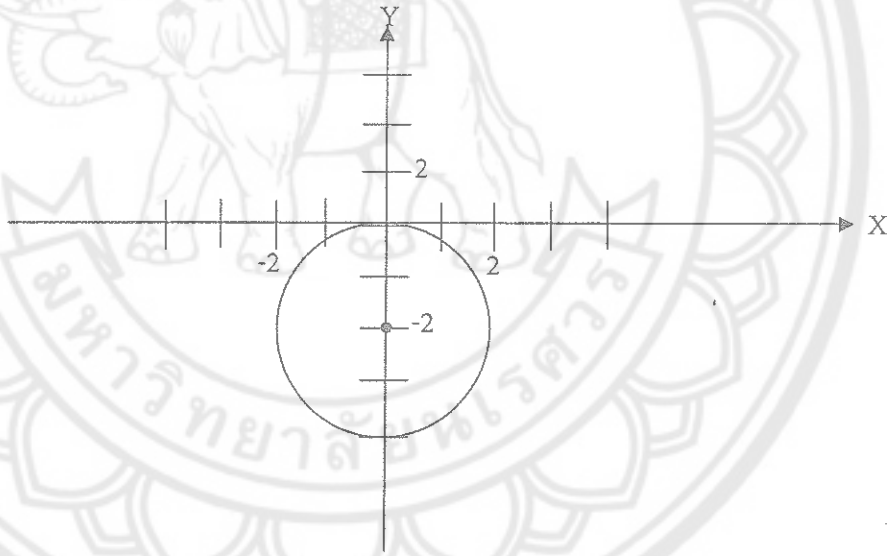
ข.



ค.



ง.



เฉลยแบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
แบบทดสอบที่ 1

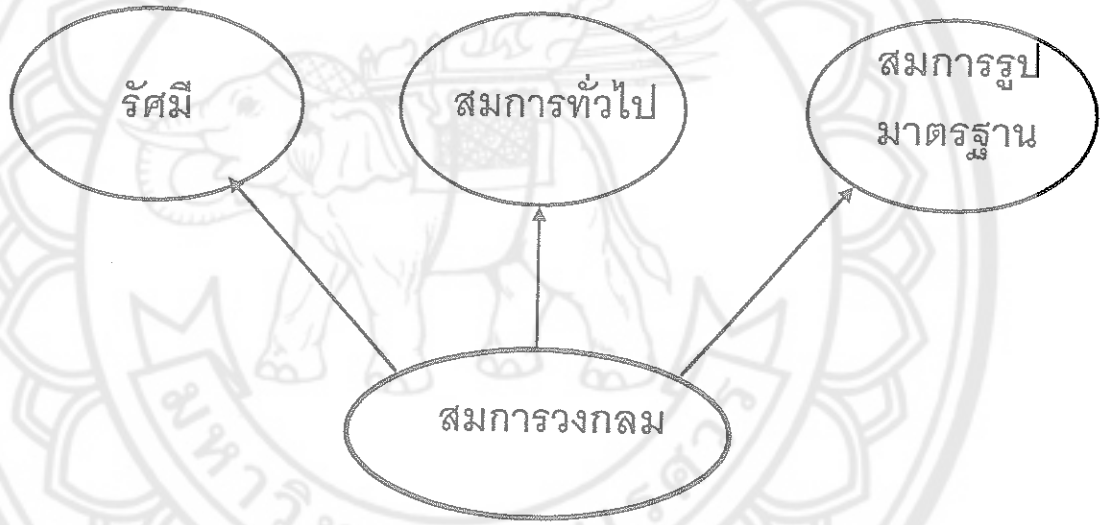
ข้อที่	เฉลย
1	ง
2	ค
3	ก
4	ข
5	ค
6	ง
7	ง
8	ก
9	ก
10	ข

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม รหัส ค41202
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ภาคตัดกรวย การเรียนรู้รายภาค
เรื่อง สมการวงกลม จำนวน 2 ชั่วโมง

แผนผังความคิด

Mind Mapping

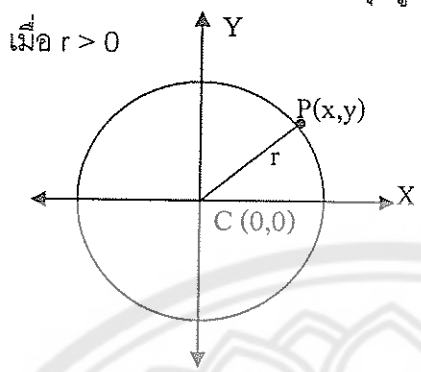


1. มาตรฐานการเรียนรู้หรือจุดประสงค์การเรียนรู้
   1) สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป
   2) สามารถหารัศมีและจุดศูนย์กลางของสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้
2. สาระการเรียนรู้
   1) สมการของวงกลม สมการวงกลมแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1.1 สมการรูปมาตรฐาน (Standard form) ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

(1) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

เมื่อ r > 0



กำหนดจุดศูนย์กลางที่ (0,0) รัศมี (r) คือ ระยะทางระหว่างจุด C(0,0) กับจุด P(x,y) ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

กำหนดให้ $|\overline{PC}|$ = r เป็นรัศมีของวงกลม

$\therefore |\overline{PC}| = r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

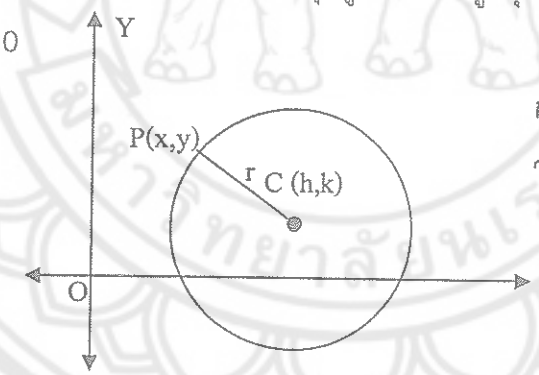
$\therefore r^2 = x^2+y^2$

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ

$$x^2+y^2=r^2$$

(2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย

เมื่อ r > 0



กำหนดให้ $|\overline{PC}| = r$ เป็นรัศมีของวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

ระยะห่างระหว่างจุด P(x,y) และ C(h,k)

$|PC| = r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$\therefore \quad r^2 = (x-h)^2+(y-k)^2$

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

1.2 สมการรูปทั่วไป (General form)

จากสมการที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมี r หน่วย รูปสมการคือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

จะได้ว่า $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า $x^2+y^2-2hx-2ky+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการและการนำไปใช้

ถ้ากำหนดให้

$D=-2h$ หรือ $h=\frac{D}{-2}$

$E=-2k$ หรือ $k=\frac{E}{-2}$

$F=h^2+k^2-r^2$ หรือ $r^2=h^2+k^2-F$

$\therefore$ จะได้สมการในรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

ลักษณะกราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

กราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อเขียนวงกลมบนพื้นระนาบแกนมุมฉาก กราฟนั้นจะเป็นอย่างไรขึ้นอยู่กับรัศมีของวงกลม คือ $r=\sqrt{h^2+k^2-F}$ ดังนั้น

1) ถ้า $h^2+k^2-F>0$ จะมีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) หรือ $\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ และรัศมี $r=\sqrt{h^2+k^2-F}$

2) ถ้า $h^2+k^2-F<0$ ไม่สามารถหาค่ารัศมี r ได้ จึงไม่สามารถเขียนกราฟบนระนาบจำนวนจริงได้ เพราะรัศมี r ไม่เป็นจำนวนจริง แต่เป็นจำนวนจินตภาพ

3) ถ้า $h^2+k^2-F=0$ กราฟของสมการวงกลมจะเป็นเพียงจุดเดียวเท่านั้น คือ จุด $\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ และเรียกจุดนี้ว่า "จุดวงกลม (Point Circle)" เพราะว่ารัศมี r ไม่มีความยาวจึงไม่ถือว่าเป็นวงกลม

ข้อสังเกต จะพบว่าในการหาสมการวงกลม ไม่ว่าจะอยู่ในรูปใดก็ตามสิ่งสำคัญที่สุดที่ต้องทราบคือ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม จึงจะสามารถหาสมการวงกลมได้

1.3 การหาสมการวงกลม

ก. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี

หลักการพิจารณา

1) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) รัศมี r หน่วย ใช้สมการ $x^2+y^2=r^2$ โดยแทนค่า r ตามโจทย์ลงในสมการ

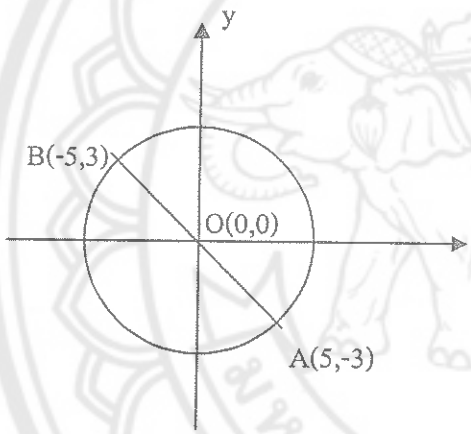
2) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) หาสมการได้ 2 แบบ

1.1 ใช้สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ แทนค่า h, k และ r ตามโจทย์กำหนดให้ลงในสมการ

1.2 ใช้สมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $D=-2h$, $E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(5,-3)$ และ $B(-5,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

วิธีทำ กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่างจุด A และ B



หาจุดกึ่งกลางจาก $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}, \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}$

จะได้ว่า $h=\frac{-5+5}{2}=0$

$k=\frac{3+(-3)}{2}=0$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (0,0)

$r=\sqrt{(5-0)^2+((-3)-0)^2}$

$r=\sqrt{34}$

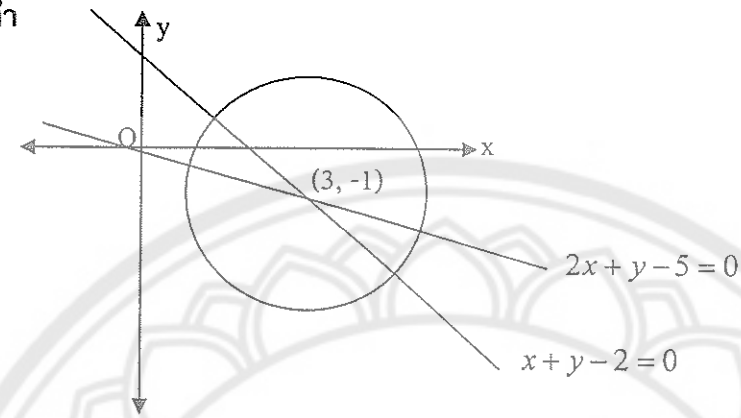
จากสมการวงกลม $x^2+y^2=r^2$

แทนค่า $r=\sqrt{34}$

$\therefore$ สมการของวงกลมคือ $x^2+y^2=34$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้สมการเส้นตรงสองเส้นคือ $2x+y-5=0$ และ $x+y-2=0$ จงหาสมการวงกลมที่มีจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและมีรัศมี 2 หน่วย

วิธีทำ



กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม หาจุดตัดของกราฟทั้งสองโดยแก้สมการ

$2x+y=5$ ——— (1)

$x+y=2$ ——— (2)

(1) − (2) $x=3$

แทนค่า x ใน 2 จะได้ว่า $3+y=2$

$y=-1$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(3,-1)$ และรัศมี 2 หน่วย

มีวิธีหาสมการวงกลมได้ 2 แบบ คือ

1) ใช้รูปสมการมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=4$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

2) ใช้รูปสมการทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

โดยที่ $D=-2h$ $\therefore D=-2(3)=-6$

$E=-2k$ $\therefore E=-2(-1)=2$

$F=h^2+k^2-r^2$ $\therefore F=9+1-4=6$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี**

1) สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

2) สามารถหารัศมี และจุดศูนย์กลางของสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้

4. **การวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้ที่คาดหวัง (พฤติกรรมที่ระบุไว้ในผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง)**

1) ด้านความรู้ (K) เข้าใจหลักการและความสำคัญของสมการวงกลม

2) ด้านเจตคติ (A) มีนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ เสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีต่อการคิดคำนวณ

3) ด้านทักษะ (P) การนำเอาความรู้เรื่องวงกลมไปศึกษาในระดับสูงต่อไป

5. **สาระการเรียนรู้รายปี**

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 6 : ทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

6. **กระบวนการจัดการเรียนรู้ (กิจกรรมการเรียนรู้)**

ขั้นนำ

1 R

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องวงกลมโดยการถามนักเรียนดังนี้

1.1 นักเรียนจงบอกนิยามวงกลมที่สรุปได้จากคาบเรียนที่แล้วได้อย่างไร

1.2 ครูให้นักเรียนบอกส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลม

2 L

2. ครูยกโจทย์ตัวอย่างที่ 1 ให้นักเรียนทำตามใบงานที่ 2 เป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 – 5 คน

ขั้นสอน

3 R

3. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน ครูและนักเรียนกลุ่มอื่น ๆ ร่วมกันวิเคราะห์และสรุปเพิ่มเติม (วิเคราะห์ถึงความเหมือน, ความแตกต่าง, และเหตุผลในการหาคำตอบในใบงานที่ 1)

4. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนข้อสรุปกันและกันแล้วอภิปรายปรับปรุงแก้ไขผลงานของกลุ่มที่ตนแลกเปลี่ยน

4 L

5. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 2 (เนื้อหาเหมือนสาระการเรียนรู้) และศึกษาตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 จากใบความรู้ที่ 2

5 L

6. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 โดยการถามกลุ่มใหญ่และกลุ่มเล็กบ้าง

6 R

7. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบงานที่ 3 อาศัยความรู้ในใบงานที่ 2 และจากการอภิปราย
8. และให้นักเรียนเตรียมตัวออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียนแล้วเขียนผลงานที่ได้ใส่กระดาษ A3 ปิดหน้าชั้นเรียนให้กลุ่มอื่นศึกษาก่อนมานำเสนอหน้าชั้นเรียน

7 L

9. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียนโดยให้นักเรียนกลุ่มอื่นซักถามอภิปราย ประเมิน ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องและสมเหตุสมผลของขั้นตอนการหาคำตอบที่ได้
10. ครูสรุปคะแนนในแต่ละกลุ่มโดยเขียนลงกระดาษที่ติดหน้าชั้นเรียนจัดลำดับความถูกต้องมากไปหาน้อย

ขั้นสรุป

8 R

11. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปหาลำดับขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาของการหาสมการวงกลมในลักษณะโจทย์ที่เป็นตัวอย่างและในใบงานที่ 3
12. ครูและนักเรียนทั้งชั้นช่วยกันสรุปวิธีการหาคำตอบ (ขั้นตอนการแก้ไขปัญหา)ที่คิดว่าถูกต้องสมเหตุสมผลมากที่สุด

ตารางกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน

7. สื่อการเรียนการสอน

7.1 ประเภทสื่อ

7.1.1 ใบความรู้ที่ 2

7.1.2 ใบงานที่ 2

7.1.3 ใบงานที่ 3

7.2 วัสดุ / อุปกรณ์

7.2.1 กระดาษ A3

7.2.2 ปากกาเมจิก

7.2.3 ไม้บรรทัด

7.2.4 วงเวียน

7.3 แหล่งเรียนรู้

7.3.1 ครู ผู้ปกครอง

7.3.2 ห้องสมุด

7.3.3 เพื่อนต่างกลุ่ม

8. การวัดและประเมินผล

8.1 การตั้งคำถามและการตอบคำถามอย่างมีเหตุผล

8.2 การตรวจแบบฝึกหัด

8.3 การตั้งใจในการเรียน การแสดงความคิดเห็น การนำเสนอหน้าชั้นเรียน

8.4 มีไหวพริบปฏิภาณ

9. การเชื่อมโยงบูรณาการกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น ๆ

10. คุณธรรม จริยธรรมที่สอดแทรก

10.1 เสริมสร้างนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ

10.2 ส่งเสริมความมีเหตุผล และยอมรับในการทำงานร่วมกับผู้อื่น

10.3 มีเจตคติที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์และการทำงานร่วมกับผู้อื่น

11. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

12. บันทึกผลหลังการสอน

- ผลการสอน

.....

.....

.....

- ปัญหา / อุปสรรค

.....

.....

.....

- ข้อเสนอแนะแนวทางแก้ไข

.....

.....

ลงชื่อ.....

( )

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

13. ความคิดเห็นของหัวหน้าสถานศึกษาหรือผู้ที่ได้รับมอบหมาย

(ตรวจ / นิเทศ / เสนอแนะ / รับรอง)

.....

.....

ลงชื่อ.....

( )

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ใบความรู้ที่ 2

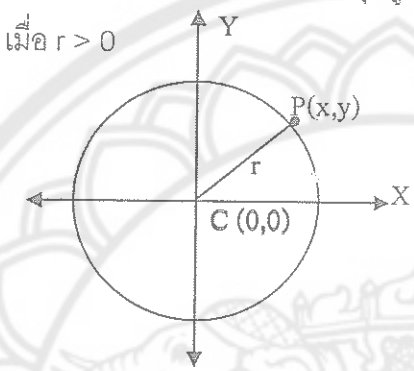
เรื่อง ภาคตัดกรวย

1. สมการวงกลม

1) สมการของวงกลม สมการวงกลมแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

1.1 สมการรูปมาตรฐาน (Standard form) ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ

(1) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย เมื่อ r > 0



กำหนดจุดศูนย์กลางที่ (0,0) รัศมี (r) คือ ระยะทางระหว่างจุด C (0,0) กับจุด P (x,y) ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

กำหนดให้ $|\overline{PC}|$ = r เป็นรัศมีของวงกลม

$$\therefore |\overline{PC}| = r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

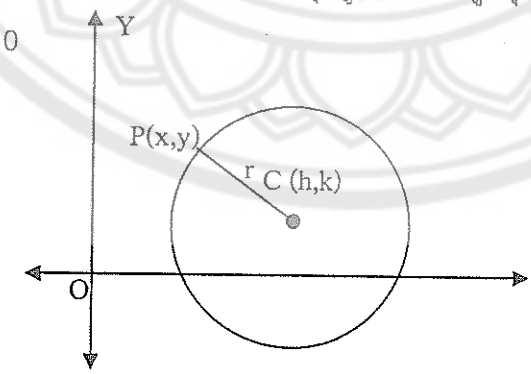
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\therefore r^2 = x^2+y^2$$

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

(2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (h,k) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย เมื่อ r > 0



กำหนดให้ $|\overline{PC}| = r$ เป็นรัศมีของวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k)

ระยะห่างระหว่างจุด P(x,y) และ C(h,k)

$$|PC| = r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$\therefore \quad r^2 = (x-h)^2+(y-k)^2$$

สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=r^2}$$

1.2 สมการรูปทั่วไป (General form)

จากสมการที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมี r หน่วย รูปสมการคือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

จะได้ว่า $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า $x^2+y^2-2hx-2ky+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการและการนำไปใช้

ถ้ากำหนดให้

$$D=-2h \qquad \text{หรือ } h=\frac{D}{-2}$$

$$E=-2k \qquad \text{หรือ } k=\frac{E}{-2}$$

$$F=h^2+k^2-r^2 \text{ หรือ } r^2=h^2+k^2-F$$

$\therefore$ จะได้สมการในรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

ลักษณะกราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

กราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อเขียนวงกลมบนพื้นระนาบแกนมุมฉาก กราฟนั้นจะเป็นอย่างไรขึ้นอยู่กับรัศมีของวงกลม คือ $r=\sqrt{h^2+k^2-F}$ ดังนั้น

1) ถ้า $h^2+k^2-F>0$ จะมีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) หรือ $\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ และรัศมี $r=\sqrt{h^2+k^2-F}$

2) ถ้า $h^2+k^2-F<0$ ไม่สามารถหาค่ารัศมี r ได้ จึงไม่สามารถเขียนกราฟบนระนาบจำนวนจริงได้ เพราะรัศมี r ไม่เป็นจำนวนจริง แต่เป็นจำนวนจินตภาพ

3) ถ้า $h^2+k^2-F=0$ กราฟของสมการวงกลมจะเป็นเพียงจุด จุดเดียวเท่านั้น คือ จุด $\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2}\right)$ และเรียกจุดนี้ว่า "จุดวงกลม (Point Circle)" เพราะว่ารัศมี r ไม่มีความยาวจึงไม่ถือว่าเป็นวงกลม

ข้อสังเกต จะพบว่าในการหาสมการวงกลม ไม่ว่าจะอยู่ในรูปใดก็ตามสิ่งสำคัญที่สุดที่ต้องทราบคือ จุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม จึงจะสามารถหาสมการวงกลมได้

1.3 การหาสมการวงกลม

ก. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี

หลักการพิจารณา

3) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) รัศมี r หน่วย ใช้สมการ $x^2+y^2=r^2$ โดยแทนค่า r ตามโจทย์ลงในสมการ

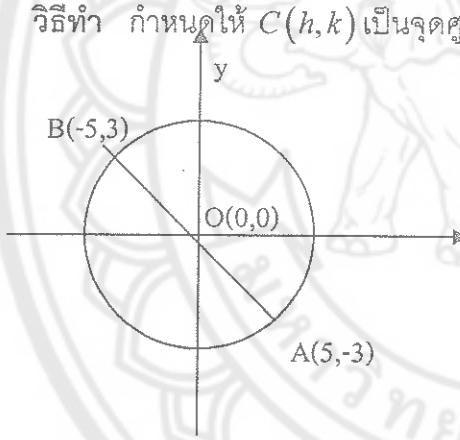
4) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) หาสมการได้ 2 แบบ

1.3 ใช้สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ แทนค่า h, k และ r ตามโจทย์กำหนดให้ลงในสมการ

1.4 ใช้สมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $D=-2h$, $E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(5,-3)$ และ $B(-5,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

วิธีทำ กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งอยู่กึ่งกลางระหว่างจุด A และ B



หาจุดกึ่งกลางจาก $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}, \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}$

จะได้ว่า $h=\frac{-5+5}{2}=0$

$$k=\frac{3+(-3)}{2}=0$$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (0,0)

$$r=\sqrt{(5-0)^2+((-3)-0)^2}$$

$$r=\sqrt{34}$$

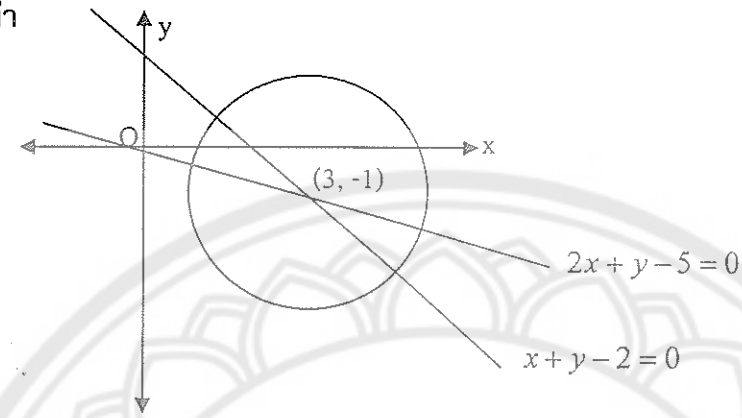
จากสมการวงกลม $x^2+y^2=r^2$

แทนค่า $r=\sqrt{34}$

$\therefore$ สมการของวงกลมคือ $x^2+y^2=34$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้สมการเส้นตรงสองเส้นคือ $2x+y-5=0$ และ $x+y-2=0$ จงหาสมการวงกลมที่มีจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและมีรัศมี 2 หน่วย

วิธีทำ



กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม หาจุดตัดของกราฟทั้งสองโดยแก้สมการ

$$2x+y=5 \quad \text{——} (1)$$

$$x+y=2 \quad \text{——} (2)$$

$$(1)-(2) \quad x=3$$

แทนค่า x ใน 2 จะได้ว่า $3+y=2$

$$y=-1$$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(3,-1)$ และรัศมี 2 หน่วย

มีวิธีหาสมการวงกลมได้ 2 แบบ คือ

3) ใช้รูปสมการมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$$

$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=4$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

4) ใช้รูปสมการทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

โดยที่ $D=-2h \quad \therefore D=-2(3)=-6$

$E=-2k \quad \therefore E=-2(-1)=2$

$F=h^2+k^2-r^2 \quad \therefore F=9+1-4=6$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$

ใบงานที่ 2

ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามคำสั่งต่อไปนี้

จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(5,-3)$ และ $B(-5,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

1. ให้นักเรียนวาดกราฟ (สร้างรูปบนแกน x แกน y)

2. ให้นักเรียนหาจุดศูนย์กลางของวงกลมจากโจทย์

3. ให้นักเรียนหารัศมีของวงกลมจากโจทย์

ใบงานที่ 3

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกกลุ่ม

1.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

2.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

3.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

4.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

5.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $(-4,3)$ มีรัศมี 7 หน่วย

วิธีทำ

2. วงกลมผ่านจุด $(1,-2)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ มีรัศมียาวเท่าใด

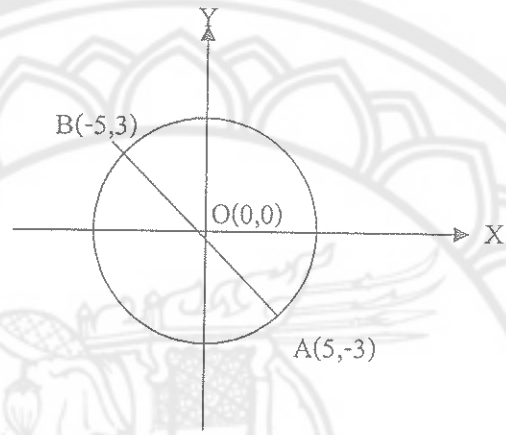
วิธีทำ

เฉลยใบงานที่ 2

ให้นักเรียนทำกิจกรรมตามคำสั่งต่อไปนี้

จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(5,-3)$ และ $B(-5,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

1. ให้นักเรียนวาดกราฟ (สร้างรูปบนแกน x แกน y)



2. ให้นักเรียนหาจุดศูนย์กลางของวงกลมจากโจทย์

หาจุดกึ่งกลางจาก $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}, \bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}$

จะได้ว่า $h=\frac{-5+5}{2}=0$

$$k=\frac{3+(-3)}{2}=0$$

$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (0,0)

3. ให้นักเรียนหารัศมีของวงกลมจากโจทย์

จาก $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$\therefore$ $r=\sqrt{(5-0)^2+((-3)-0)^2}$

$\therefore$ $r=\sqrt{34}$

เฉลยใบงานที่ 3

1. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $(-4,3)$ มีรัศมี 7 หน่วย

วิธีทำ จากโจทย์ $(h,k)=(-4,3)$ มีรัศมี 7 หน่วย

รัศมี $r = 7$

สมการวงกลมมีรูปแบบ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$(x+4)^2+(y-3)^2=7^2$$

$$x^2+8x+16+y^2-6y+9=49$$

$$x^2+y^2+8x-6y=49-25$$

$\therefore$ สมการวงกลมมีความสัมพันธ์ $x^2+y^2+8x-6y-24=0$

2. วงกลมผ่านจุด $(1,-2)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ มีรัศมียาวเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ จุดศูนย์กลางคือ จุด $(0,0)$

และวงกลมผ่านจุด $(1,-2)$

นั่นคือ รัศมีคือระยะทางจากจุด $(0,0)$ และ $(1,-2)$

กำหนดให้ $A=(0,0)$ และ $B=(1,-2)$

$$|AB|=\sqrt{(0-1)^2+(0-(-2))^2}$$

$$=\sqrt{1^2+2^2} \quad =\sqrt{5}$$

$\therefore$ รัศมี $=\sqrt{5}$ หน่วย

แบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แบบทดสอบที่ 2

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 3 สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ ในรูปมาตรฐาน และรูปทั่วไป (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 4 สามารถหารัศมี และจุดศูนย์กลางของสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-2,0)$ และรัศมี 2 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
   - ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4y=0\}$
   - ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4x=0\}$
   - ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4y=0\}$
   - ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4x=0\}$
2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,3)$ และรัศมี 3 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
   - ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6y=0\}$
   - ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x=0\}$
   - ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6y=0\}$
   - ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x=0\}$
3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-2,3)$ และรัศมี 4 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
   - ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4x+6y=3\}$
   - ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4x-6y=3\}$
   - ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4x+6y=3\}$
   - ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4x-6y=3\}$

4. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-1,-2)$ และมีรัศมี 5 หน่วย คือความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x-4y=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x+2y+20=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x+4y-20=0\}$

   ง. ไม่มีข้อใดถูก

5. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1,2)$ และมีรัศมียาว 3 หน่วย คือความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x-4y-4=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x+4y-4=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x-4y-4=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+4y-4=0\}$

6. จากสมการวงกลม $(x-3)^2+(y-5)^2=5$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

   ก. จุดศูนย์กลาง $(-3,5)$, รัศมี = 5

   ข. จุดศูนย์กลาง $(-3,5)$, รัศมี = $\sqrt{5}$

   ค. จุดศูนย์กลาง $(3,-5)$, รัศมี = 5

   ง. จุดศูนย์กลาง $(3,-5)$, รัศมี = $\sqrt{5}$

7. จากสมการวงกลม $3x^2+3y^2-18x+24y+45=0$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด

   ก. จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี = $\sqrt{10}$

   ข. จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี = 10

   ค. จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี = $\sqrt{10}$

   ง. จุดศูนย์กลาง $(-3,-4)$, รัศมี = 10

8. กำหนดสมการเป็นวงกลม $x^2+y^2-x-7=0$ จงพิจารณาว่ามีจุดศูนย์กลางตรงกับข้อใด

   ก. $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ ข. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

   ค. $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ง. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

9. กำหนดสมการวงกลม $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ ความยาวรัศมีวงกลมตรงกับข้อใด

ก. $\sqrt{5}$ ข. 4

ค. 5 ง. 8

10. สมการวงกลม $x^2+y^2+3x+2y-23=0$ จงพิจารณาว่าจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมตรงกับข้อใด

ก. $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{79}{2}$ ข. $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{\sqrt{79}}{2}$

ค. $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{79}{2}$ ง. $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{\sqrt{79}}{2}$

เฉลยแบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
แบบทดสอบที่ 2

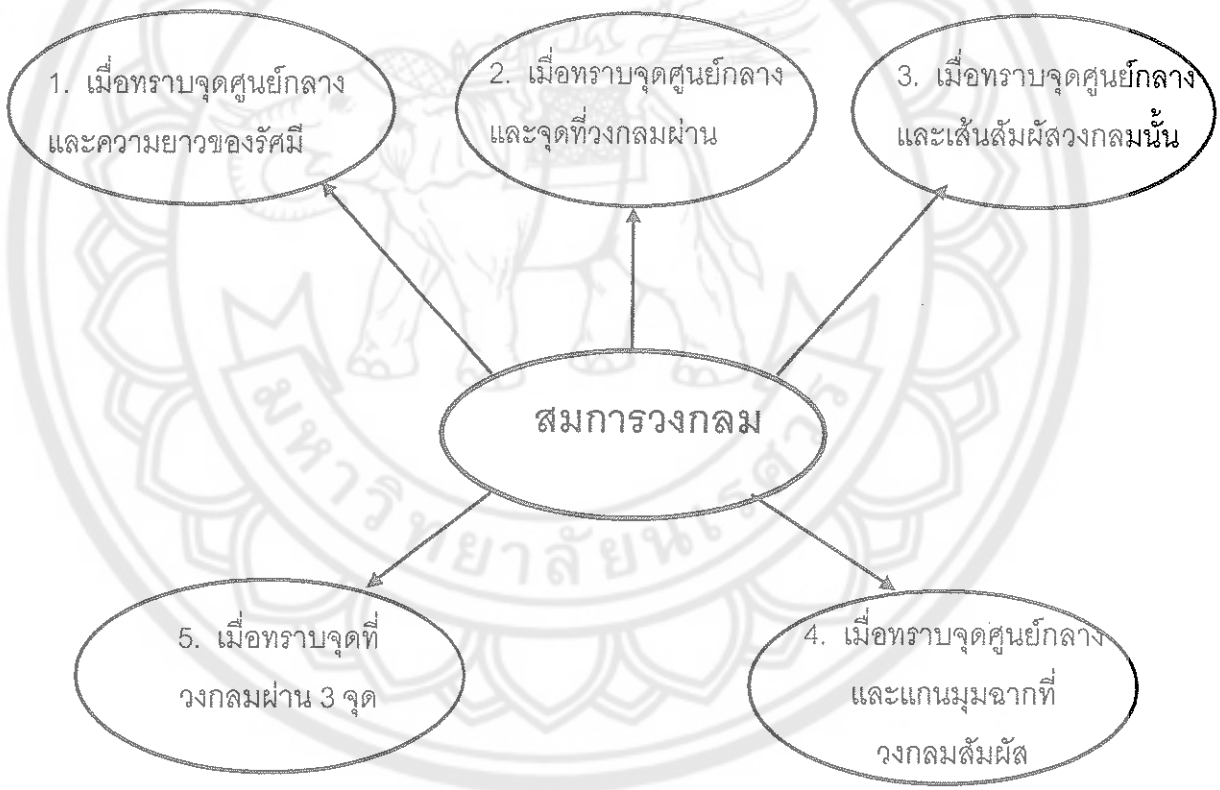
ข้อที่	เฉลย
1	ข
2	ก
3	ง
4	ค
5	ก
6	ง
7	ก
8	ค
9	ก
10	ง

มหาวิทยาลัยนเรศวร

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 4
สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม **รหัส** ค41202
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ภาคตัดกรวย **การเรียนรู้รายภาค**
เรื่อง การหาสมการวงกลม **จำนวน** 2 ชั่วโมง

แผนผังความคิด
Mind Mapping



1. **มาตรฐานการเรียนรู้หรือจุดประสงค์การเรียนรู้**
   1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้
2. **สาระการเรียนรู้**
   2. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน

หลักการพิจารณา

(1) หาค่ารัศมี r จากสูตรหาความยาวระหว่างจุด (h,k) และจุดที่กำหนดให้ $P(x,y)$

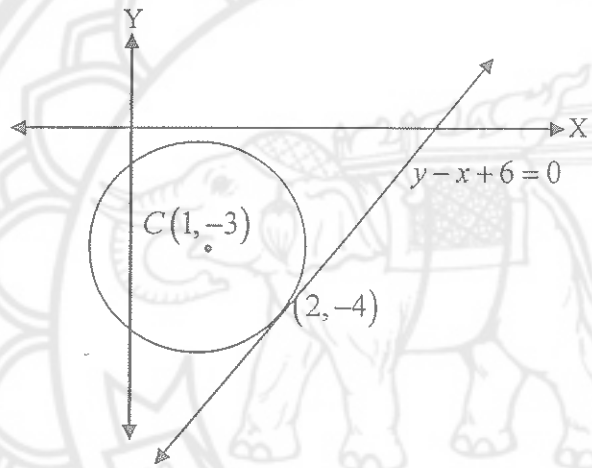
จะได้ว่า $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$$\therefore r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

หาค่า r^2 ได้โดยการแทนค่า h,k จากจุดศูนย์กลางและ x,y จากจุดผ่าน

(2) หาสมการวงกลมโดยใช้สูตร $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสเส้นตรง $y-x+6=0$ ที่จุด $(2,-4)$ จงหาสมการวงกลม



วิธีทำ จากรูป $C(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A(2,-4)$ เป็นจุดสัมผัส

$\therefore |AC|=r$ เป็นรัศมีของวงกลม

$$r^2=(2-1)^2+((-4)+3)^2$$

$$r^2=1+1=2$$

รูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$D=-2h=-2(1)=-2$

$E=-2k=-2(-3)=6$

$F=h^2+k^2-r^2=1+9-2=8$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-2x+6y+8=0$

3. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมนั้น

หลักการพิจารณา

1. หาความยาวของรัศมี r ของวงกลม คือระยะทางจากจุด $C(h,k)$ ไปยังเส้นสัมผัส

$Ax+By+C=0$

$$r=\frac{\left|A(h)+B(k)+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ใช้สมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $D=-2h, E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,2)$ และสัมผัสเส้นตรง $4x+3y-4=0$

วิธีทำ หารัศมี r ของวงกลม จากสูตร

$$r=\frac{\left|A(h)+B(k)+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

แทนค่า $A=4, B=3, C=-4, h=-3, k=2$

$\therefore$ จะได้ว่า $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{16+9}$

$$r=\frac{\left|-12+6-4\right|}{5}=\frac{10}{5}=2$$

จากรูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$\therefore D=-2h=-2(-3)=6$

$E=-2k=-2(2)=-4$

$F=h^2+k^2-r^2=9+4-4=9$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี**

   1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

4. **การวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้ที่คาดหวัง (พฤติกรรมที่ระบุไว้ในผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง)**

   1) ด้านความรู้ (K) เข้าใจหลักการและความสำคัญของสมการวงกลม

   2) ด้านเจตคติ (A) มีนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ เสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีต่อการคิดคำนวณ

   3) ด้านทักษะ (P) การนำเอาความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ศึกษาในระดับสูงต่อไป

5. **สาระการเรียนรู้รายปี**

   สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (Visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (Spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (Geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (Pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

6. กระบวนการจัดการเรียนรู้ (กิจกรรมการเรียนรู้)

ขั้นนำ

1 R

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเรื่องการหาสมการวงกลมโดยการถามนักเรียนดังนี้
   1.1 ในสมการวงกลมส่วนประกอบที่สำคัญของวงกลมมีอะไรบ้าง (ครูวาดรูปวงกลมขึ้นบนกระดาน) (เส้นรอบวง, รัศมี, จุดศูนย์กลาง)
   1.2 จากสมการวงกลมในรูปทั่วไป และรูปมาตรฐานมีสัมประสิทธิ์หน้าตัวแปรที่ต้องการทราบอะไรบ้าง (r = รัศมี, (h,k) จุดศูนย์กลาง)
   1.3 ครูยกตัวอย่างโจทย์ให้นักเรียนหาสมการวงกลมในรูปแบบใดก็ได้
   1. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-3)$ รัศมี 3

   วิธีทำ 1. ในรูปมาตรฐาน $(x-2)^2+(y+3)^2=3^2$
   2. ในรูปทั่วไป $x^2+y^2-4x+6y+4=0$

ขั้นสอน

2 L

2. จากตัวอย่างครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายในตัวอย่างโจทย์ทบทวนความรู้เดิมว่าการหาสมการวงกลมนั้นจำเป็นต้องทราบค่าอะไรเป็นสำคัญ
3. ครูถามว่าถ้าโจทย์ไม่บอกรัศมีและจุดศูนย์กลางมาพร้อมกันแต่บอกเส้นสัมผัสวงกลมหรือจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม
4. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 – 5 คน ช่วยกันหารัศมี และจุดศูนย์กลางจากเงื่อนไขจากข้อ 3 (10 นาที)

3 R

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอหน้าชั้นเรียน (หารัศมีและจุดศูนย์กลางเมื่อทราบจุดหรือเส้นตรงที่ผ่านวงกลม โดยอาศัยความรู้จากเรขาคณิตวิเคราะห์

6. นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนข้อสรุปกันและกันแล้วอภิปรายปรับปรุงแก้ไขผลงานของกลุ่มที่ตนแลกเปลี่ยน

4 L

7. ให้นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 3
8. ครูยกตัวอย่างที่ 1 พร้อมกับอภิปรายกับนักเรียนทั้งชั้นในการหาสมการวงกลม ดังนี้
   8.1 โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง (จุดศูนย์กลาง, สมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม,จุดสัมผัสวงกลมจากเส้นสัมผัสวงกลม, ฯลฯ)
   8.2 โจทย์ต้องการทราบอะไร (สมการวงกลม)
   8.3 สมการวงกลมมีแบบฟอร์มอย่างไร หาค่าได้อย่างไร (สมการรูปมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, (h,k) จุดศูนย์กลาง, $r=$ รัศมี, สมการรูปทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$)
   8.4 ครูหาอาสาสมัครออกมาวาดรูปเพื่อหาสมการต่อไป
   8.5 เหลืออะไรที่ต้องการหาก่อนหาสมการ (r) หาได้อย่างไร (หาได้โดยหาระยะทางจากจุดสองจุดค่าที่ได้คือ รัศมี)
   8.6 ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปคำตอบที่ได้

5 L

9. ครูยกตัวอย่างที่ 2 แล้วแจกใบงานที่ 4 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลองทำแล้วนำเสนอหน้าชั้นเรียนโดยเขียนไว้บนกระดาน

6 R

10. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอภิปรายถึงการหาคำตอบของกลุ่มอื่น ๆ เปรียบเทียบกับกลุ่มของตนเอง

7 L

11. นักเรียนในกลุ่มอื่น ๆ ช่วยกันให้คะแนนความถูกต้องของเนื้อหา ลำดับขั้นตอน ในการหาคำตอบ พิจารณา ประเมินผลงาน

ขั้นสรุป

8 R

12. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มอภิปราย เกี่ยวกับความรู้ที่ได้เรียนในคาบนี้
13. ครูช่วยชี้แนะแนวทางให้เป็นกลุ่มเป็นพวก
14. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปเป็นลำดับขั้นตอนในการแก้ปัญหาเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาต่อไป

ตารางกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน

7. สื่อการเรียนการสอน

7.1 ประเภทสื่อ

7.1.1 ใบความรู้ที่ 3

7.1.2 ใบงานที่ 4

7.1.3 ตัวอย่างหนังสืออ่านนอกเวลา

7.2 วัสดุ / อุปกรณ์

7.2.1.1 กระดาษ A3

7.2.1.2 ปากกาเมจิก

7.2.1.3 ไม้บรรทัด

7.2.1.4 วงเวียน

7.3 แหล่งการเรียนรู้

7.3.1.1 ครู ผู้ปกครอง

7.3.1.2 ห้องสมุด

7.3.1.3 เพื่อนในชั้นเรียน

8. การวัดผลและประเมินผล

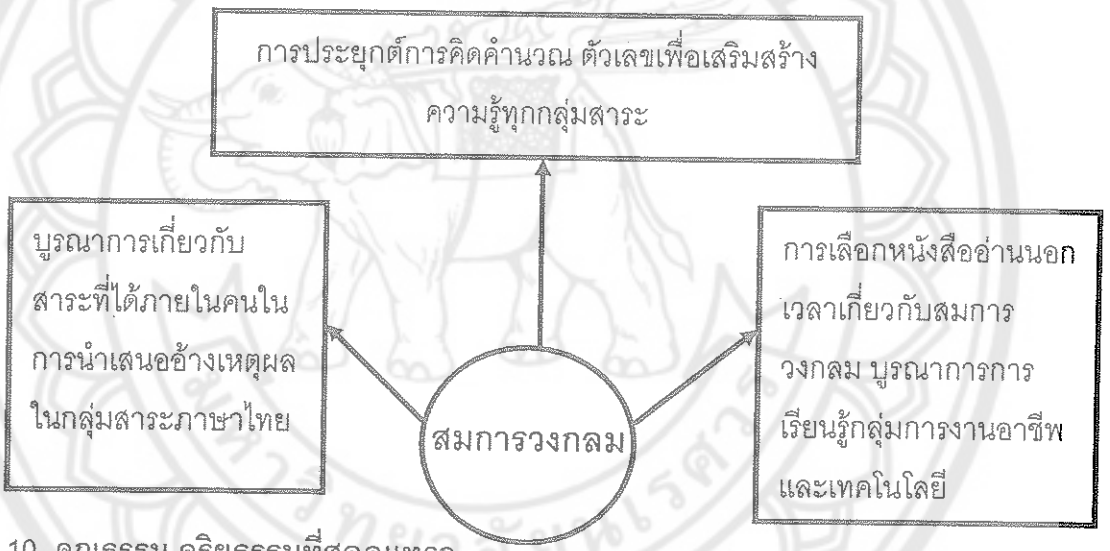
1) การตั้งคำถามและการตอบคำถาม

2) ตรวจแบบฝึกหัด

3) ความตั้งใจในการเรียน การแสดงความคิดเห็น การนำเสนอหน้าชั้นเรียน

4) การมีไหวพริบปฏิภาณ

9. การเชื่อมโยงบูรณาการกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น ๆ



10. คุณธรรม จริยธรรมที่สอดแทรก

1) เสริมสร้างนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ

2) ส่งเสริมความมีเหตุผล และยอมรับฟังเหตุผลในการทำงานร่วมกับผู้อื่น

3) มีเจตคติที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์และทำงานร่วมกับผู้อื่น

11. กิจกรรมเสนอแนะ

.....

.....

.....

.....

12. บันทึกผลหลังการสอน

- ผลการสอน

.....

.....

.....

- ปัญหา / อุปสรรค

.....

.....

.....

- ข้อเสนอแนะแนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

( )

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

13. ความคิดเห็นของหัวหน้าสถานศึกษาหรือผู้ที่ได้รับมอบหมาย

(ตรวจ / นิเทศ / เสนอแนะ / รับรอง)

.....

.....

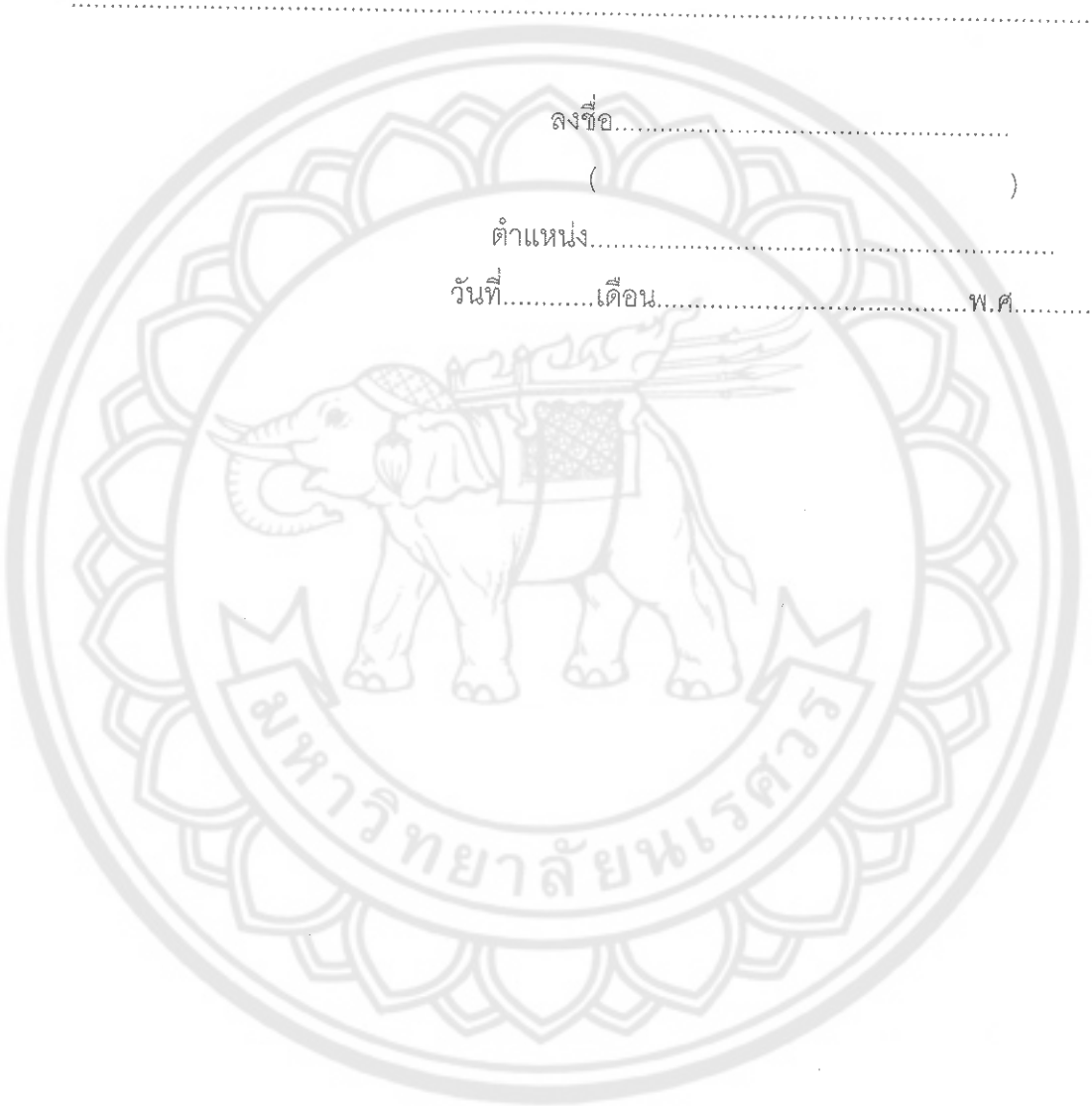
.....

ลงชื่อ.....

( )

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....



ใบความรู้ที่ 3

เรื่อง ภาคตัดกรวย

2. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน

หลักการพิจารณา

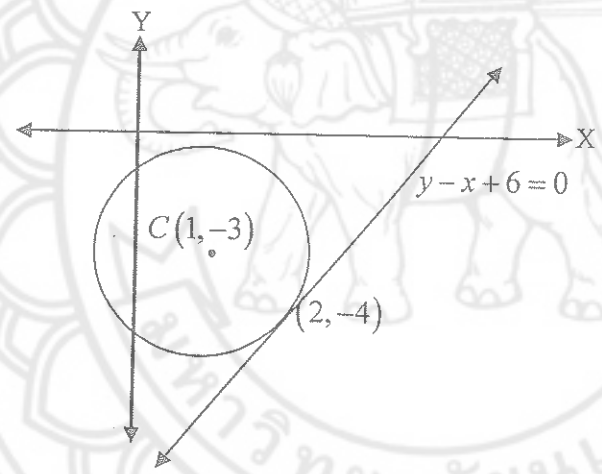
1) หาค่ารัศมี r จากสูตรหาความยาวระหว่างจุด (h,k) และจุดที่กำหนดให้ $P(x,y)$ จะได้ว่า $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

$$\therefore r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

หาค่า r^2 ได้โดยการแทนค่า h,k จากจุดศูนย์กลางและ x,y จากจุดผ่าน

2) หาสมการวงกลมโดยใช้สูตร $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสเส้นตรง $y-x+6=0$ ที่จุด $(2,-4)$ จงหาสมการวงกลม



วิธีทำ จากรูป $C(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A(2,-4)$ เป็นจุดสัมผัส

$\therefore |AC|=r$ เป็นรัศมีของวงกลม

$$r^2=(2-1)^2+((-4)+3)^2$$

$$r^2=1+1=2$$

รูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$$D=-2h=-2(1)=-2$$

$$E=-2k=-2(-3)=6$$

$$F=h^2+k^2-r^2=1+9-2=8$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-2x+6y+8=0$

3. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมนั้น

หลักการพิจารณา

a. หาความยาวของรัศมี r ของวงกลม คือระยะทางจากจุด $C(h,k)$ ไปยังเส้นสัมผัส $Ax+By+C=0$

$$r=\frac{|A(h)+B(k)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

b. ใช้สมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $D=-2h, E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,2)$ และสัมผัสเส้นตรง $4x+3y-4=0$

วิธีทำ หารัศมี r ของวงกลม จากสูตร

$$r=\frac{|A(h)+B(k)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

แทนค่า $A=4, B=3, C=-4, h=-3, k=2$

$\therefore$ จะได้ว่า $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{16+9}$

$$r=\frac{|-12+6-4|}{5}=\frac{10}{5}=2$$

จากรูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$\therefore D=-2h=-2(-3)=6$

$E=-2k=-2(2)=-4$

$F=h^2+k^2-r^2=9+4-4=9$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

ใบงานที่ 4

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกกลุ่ม

1.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

2.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

3.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

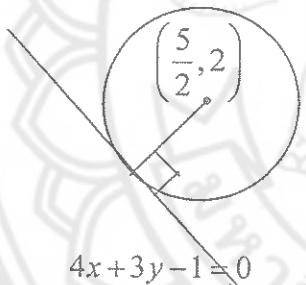
4.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

5.....ชั้น ม.4/.....เลขที่.....

1. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(\frac{5}{2},2\right)$ และเส้นสัมผัสเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(4,-5)$ เฉลย

วิธีทำ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,-5)$ และ $(-2,3)$ คือ $m=\frac{(-5)-3}{4-(-2)}=\frac{-4}{3}$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,3)$ และมีความชัน $m=\frac{-4}{3}$



$$y-3=-4(x+2)$$

$$3y-9=-4x-5$$

$$4x+3y-1=0$$

รัศมี r คือระยะทางระหว่างจุด $\left(\frac{5}{2},2\right)$ กับเส้นตรง $4x+3y-1=0$

$$r=\frac{\left|4\left(\frac{5}{2}\right)+3(2)-1\right|}{\sqrt{16+9}}$$

$$r=\frac{|15|}{5}=3$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=9$

$$x^2-2\left(\frac{5}{2}\right)x+\frac{25}{4}+y^2-4y+4=9$$

$$x^2+y^2-5x-4y+\frac{25}{4}+4-9=0$$

$$4x^2+4y^2-20x-16y+25+16-36=0$$

$$4x^2+4y^2-20x-16y+5=0$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $4x^2+4y^2-20x-16y+5=0$

แบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แบบทดสอบที่ 3

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 5 สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 6 สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางของสมการเส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลมนั้น)

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(1,-2)$ และวงกลมผ่านจุด $(4,-3)$ คือความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+4y-5=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+4y+5=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x-4y-5=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x-4y+5=0\}$

2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-3,6)$ และผ่านจุด $(1,3)$ คือความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x-12y-15=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+12y-15=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x-12y+15=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+12y+15=0\}$

3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) และผ่านจุด $(h+3,k+4)$ ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2hx-2ky-h^2-k^2-25=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2hx+2ky+h^2+k^2+25=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-25=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2hx+2ky-h^2-k^2+25=0\}$

4. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่ $(-3,2)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $21x+20y+197=0$ คือความสัมพันธ์ในข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x-4y+23=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+4y-23=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+4y+23=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x-4y-23=0\}$

5. จงหาสมการวงกลมเมื่อมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,2)$ และผ่านจุด $(-2,-2)$ ตรงกับข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+4y-20=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x-4y-20=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x-4y+20=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x+4y+20=0\}$

6. ความสัมพันธ์ในข้อใดซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมและเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ระหว่างจุด $(3,1)$ และ $(1,-5)$

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+6y+2=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x-6y+2=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-2x+6y-2=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+2x+6y-2=0\}$

7. ความสัมพันธ์ในข้อใดที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,3)$ และสัมผัสกับแกน y

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4x-6y-9=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4x+6y-9=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4x+6y+9=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-4x-6y+9=0\}$

8. ความสัมพันธ์ในข้อใดที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,-1)$ และสัมผัสแกน x

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+2y+9=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x-2y+9=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2-6x+2y-9=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+6x-2y-9=0\}$

9. จงหาสมการวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(3,2)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x+4y+2=0$ ตรงกับข้อใด

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,25x^2+25y^2-150x-100y+36=0\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,25x^2+25y^2+150x+100y+36=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,25x^2+25y^2-150x-100y-36=0\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,25x^2+25y^2+150x+100y-36=0\}$

10. จงหาสมการวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $5x+12y=26$

   ก. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2=4\}$

   ข. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+4=0\}$

   ค. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2=26\}$

   ง. $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x^2+y^2+26=0\}$

เฉลยแบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
แบบทดสอบที่ 3

ข้อที่	เฉลย
1	ก
2	ก
3	ค
4	ง
5	ข
6	ข
7	ง
8	ก
9	ค
10	ก

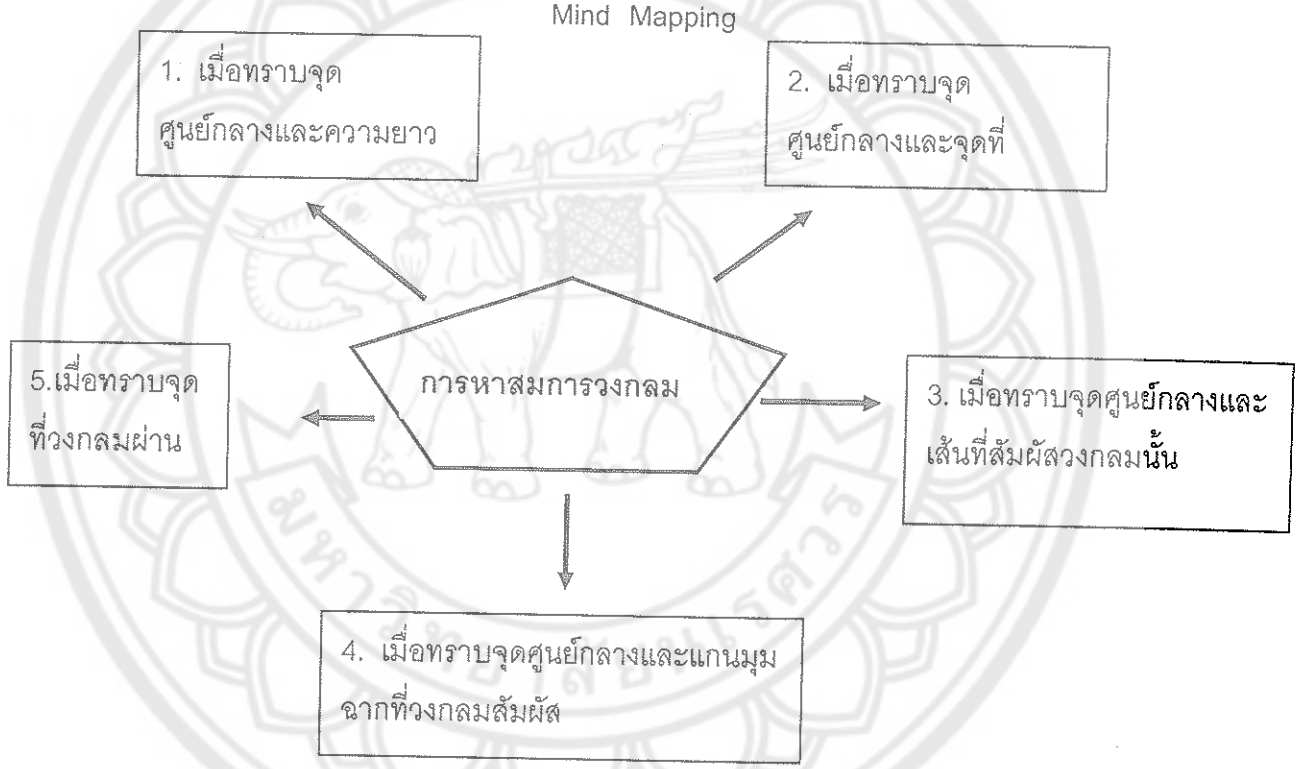
มหาวิทยาลัยนเรศวร

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่** 4
สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม **รหัส** ค41202
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ภาคตัดกรวย **การเรียนรู้รายภาค**
เรื่อง การหาสมการวงกลม จำนวน 2 ชั่วโมง

แผนผังความคิด

Mind Mapping



1. มาตรฐานการเรียนรู้หรือจุดประสงค์การเรียนรู้
   1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้
2. **สาระการเรียนรู้**

4. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่วงกลมสัมผัส

หลักการพิจารณา ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด C (h,k)

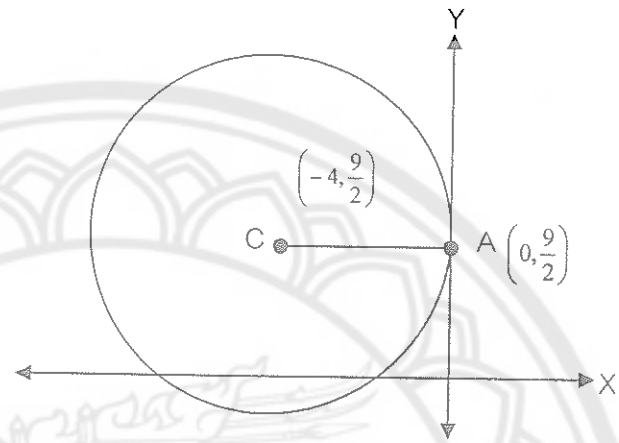
1) ถ้าสัมผัสแกน X ที่จุด (h,0) รัศมี $r = |k|$ หน่วย
2) ถ้าสัมผัสแกน Y ที่จุด (0,k) รัศมี $r = |h|$ หน่วย

3) ใช้สมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

หรือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$ และสัมผัสแกน Y ที่จุด $\left(0,\frac{9}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>



จากรูป $\therefore r=|-4|=4$ หน่วย

จากสมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

$D = -2h = -2(-4) = 8$

$E = -2k = -2\left(\frac{9}{2}\right) = -9$

$F = h^2+k^2-r^2 = 16+\frac{81}{4}-16 = \frac{81}{4}$

แทนค่า D , E และ F สมการ $x^2+y^2+8x-9y+\frac{81}{4}$

$\therefore$ สมการวงกลม คือ $4x^2+4y^2+32x-36y+81=0$

5. เมื่อทราบจุดที่วงกลมผ่าน 3 จุด

หลักการพิจารณา

1) ใช้สมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

2) แทนค่า x , y ใช้สมการด้วยจุดผ่านแต่ละจุดที่กำหนดให้จะได้ 3 สมการ

3) แก้สมการเพื่อหาค่า D,E และ F แล้วนำกลับไปแทนในสมการรูปทั่วไปของวงกลมอีกครั้ง

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $A(1,-2), B(5,4)$ และ $C(10,5)$

วิธีทำ สมการวงกลมในรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ผ่านจุด (1,-2) แทนค่าจะได้ว่า $1 + 4 + D - 2F + F = 0$

จัดสมการ $D - 2E + F = -5$.....(1)

ผ่านจุด (5,4) แทนค่าจะได้ว่า $25 + 16 + 5D + 4F + F = 0$

จัดสมการ $5D + 4E + F = -41$.....(2)

ผ่านจุด (10,5) แทนค่าจะได้ว่า $100 + 25 + 10D + 5E + F = 0$

จัดสมการ $10D + 5E + F = -125$.....(3)

(2) – (1) ; $4D + 6E = -36$.....(4)

(3) – (2) ; $5D + E = -84$.....(5)

(5)×(6) จะได้ว่า $30D + 6E = -504$.....(6)

(6) - (4) $26D = -468$

$$D = \frac{-468}{26}$$

$$D = -18$$

แทนค่า D ใน (5)

$$(-90) + E = (-84)$$

$$E = (-84) + 90$$

$$E = 6$$

แทนค่า D และ E ใน (1)

$$(-18) - 12 + F = (-5)$$

$$F = (-5) + 18 + 12$$

$$F = 25$$

แทนค่า D, E และ F ในรูปสมการทั่วไป

$\therefore$ สมการวงกลมที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ทั้ง 3 จุด

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$$

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง**

1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

4. **การวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้ที่คาดหวัง (พฤติกรรมที่ระบุไว้ในผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง)**

1. ด้านความรู้ (K) : เข้าใจหลักการและความสำคัญ ของสมการวงกลม
2. ด้านเจตคติ (A) : มีนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ เสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีต่อการคิดคำนวณ
3. ด้านทักษะ (P) : การนำเอาความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ศึกษาในระดับสูงต่อไป

5. **สาระการเรียนรู้รายปี**

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตศาสตร์สองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric mode) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพนธ์สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

6. **กระบวนการจัดการเรียนรู้**

ขั้นนำ

1 R

1. ครูนำแผ่นภาพรูปกราฟวงกลมที่ทราบจุดศูนย์กลางและทราบจุดสัมผัสแกน x หรือ แกน y จำนวน 5 – 6 รูป (เพื่อให้นักเรียนหาข้อสรุปหลักเกณฑ์ที่แน่นอนในการหารัศมี) เพื่อให้นักเรียนหารัศมีตามวิธีการที่นักเรียนคิดได้

2 L

2. จากข้อ 1 ครูถามนักเรียนว่าในการหาสมการวงกลมแต่ละครั้งต้องทราบองค์ประกอบใดเป็นสำคัญ

ขั้นสอน

3 R

3. จากข้อ 1 และข้อ 2 นักเรียนภิปรายร่วมกันทั้งห้องถึงข้อสรุปที่นักเรียนทุกคนหาได้ว่าถูกต้องเหมาะสมตามหลักการทางคณิตศาสตร์หรือไม่

4 L

4. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 – 5 คน ศึกษาใบความรู้ที่ 4 แล้วสรุปเป็นความรู้ของกลุ่มตนเองอธิบายให้เพื่อนฟังต่อไป

5 L

5. ครูแจกใบงานที่ 5 ให้นักเรียนร่วมกันทำและอภิปรายผลร่วมกัน

6 R

6. ครูและนักเรียนในแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปแนวคิดหรือความคิดรวบยอดที่ได้จากการทดลองปฏิบัติงานในข้อ 5

7 L

7. ครูแจกใบงานที่ 5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำแล้วออกมาเฉลยหน้าชั้นเรียนเพื่อให้เกิดการแลกเปลี่ยนเรียนรู้กับกลุ่มอื่น ๆ

8. ครูและนักเรียนทั้งชั้นร่วมกันเฉลยใบงานที่ 5 พร้อมช่วยกันสรุปว่ากลุ่มใดทำถูกต้องบ้างหรือทำถูกต้องมากที่สุด และกลุ่มใดทำผิดบ้างและทำผิดตรงไหน

ขั้นสรุป

8 R

9. นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความรู้ที่ได้ในคาบนี้ แล้วช่วยกันสรุปเป็นลำดับขั้นตอนในการหาคำตอบ

ตารางกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน

7. **สื่อการเรียนการสอน**

7.1 ประเภทสื่อ

7.1.1 ใบความรู้ที่ 4

7.1.2 ใบงานที่ 5

7.2 วัสดุ/อุปกรณ์

7.2.1 กระดาษ A3

7.2.2 ปากกาเมจิก

7.2.3 ไม้บรรทัด วงเวียน

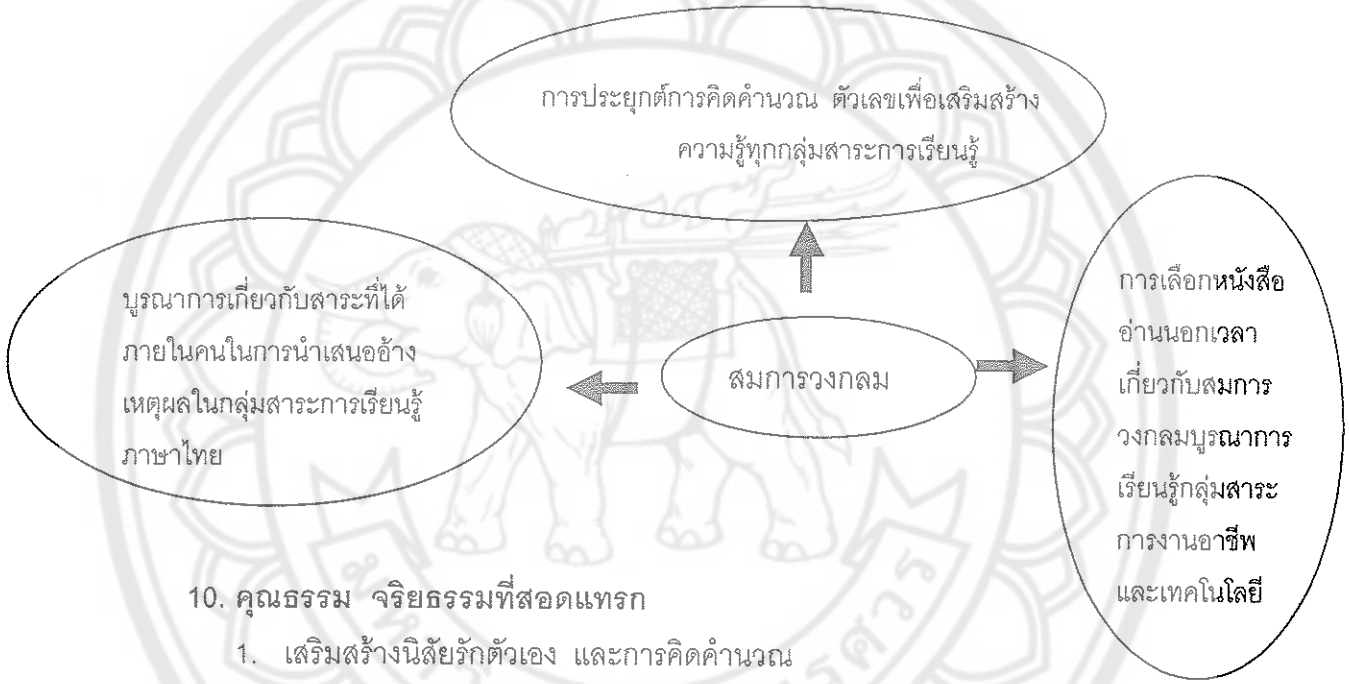
7.3 แหล่งเรียนรู้

7.3.1 ครู ผู้ปกครอง

7.3.2 ห้องสมุด

7.3.3 เพื่อนในชั้นเรียน

8. **การวัดผลและประเมินผล**
   1. การตั้งคำถาม และการตอบคำถามอย่างมีเหตุผล
   2. ตรวจแบบฝึกหัด
   3. ความตั้งใจในการเรียน การแสดงความคิดเห็น การนำเสนอหน้าชั้นเรียน
   4. ความมีปฏิภาณไหวพริบในการตอบคำถามในชั้นเรียน
9. การเชื่อมโยงบูรณาการกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น ๆ



10. **คุณธรรม จริยธรรมที่สอดแทรก**
    1. เสริมสร้างนิสัยรักตัวเอง และการคิดคำนวณ
    2. ส่งเสริมความมีเหตุผล และยอมรับฟังเหตุผลในการทำงานร่วมกับผู้อื่น
    3. มีเจตคติที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์ และทำงานร่วมกับผู้อื่น

11. **กิจกรรมเสนอแนะ**

.....

.....

.....

12. บันทึกผลหลังสอน

ผลการสอน

.....

.....

.....

ปัญหา / อุปสรรค

.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะแนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

13. ความเห็นของหัวหน้าสถานศึกษาหรือผู้ที่ได้รับมอบหมายก่อนสอน

(ตรวจ / นิเทศ /เสนอแนะ / รับรอง)

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ใบความรู้ที่ 4
ประกอบการสอนภาคตัดกรวย เรื่องวงกลม

4) เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่วงกลมสัมผัส

หลักการพิจารณา ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด C (h,k)

1) ถ้าสัมผัสแกน X ที่จุด (h,0) รัศมี $r = |k|$ หน่วย

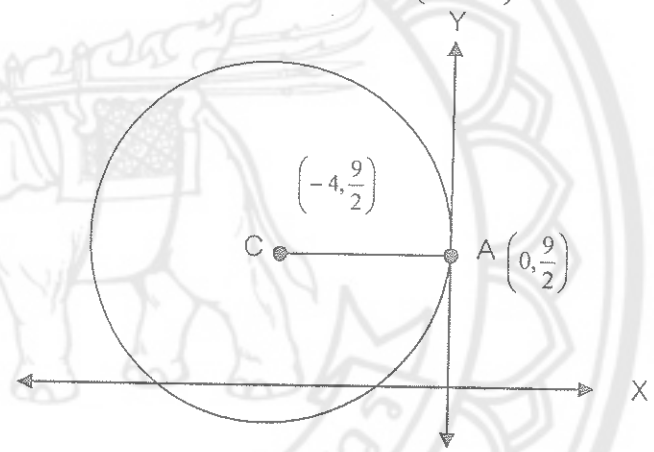
2) ถ้าสัมผัสแกน Y ที่จุด (0,k) รัศมี $r = |h|$ หน่วย

4) ใช้สมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

หรือ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$ และสัมผัสแกน Y ที่จุด $\left(0, \frac{9}{2}\right)$

<u>วิธีทำ</u>



จากรูป $\therefore r = |-4| = 4$ หน่วย

จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$D = -2h = -2(-4) = 8$$

$$E = -2k = -2\left(\frac{9}{2}\right) = -9$$

$$F = h^2 + k^2 - r^2 = 16 + \frac{81}{4} - 16 = \frac{81}{4}$$

แทนค่า D , E และ F สมการ $x^2 + y^2 + 8x - 9y + \frac{81}{4}$

$\therefore$ สมการวงกลม คือ $4x^2 + 4y^2 + 32x - 36y + 81 = 0$

5) เมื่อทราบจุดที่วงกลมผ่าน 3 จุด

หลักการพิจารณา

1) ใช้สมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

2) แทนค่า x , y ใช้สมการด้วยจุดผ่านแต่ละจุดที่กำหนดให้จะได้ 3 สมการ

3) แก้สมการเพื่อหาค่า D, E และ F แล้วนำกลับไปแทนในสมการรูปทั่วไปของวงกลมอีกครั้ง

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $A(1,-2), B(5,4)$ และ $C(10,5)$

วิธีทำ สมการวงกลมในรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ผ่านจุด (1,-2) แทนค่าจะได้ว่า $1 + 4 + D - 2F + F = 0$

จัดสมการ $D - 2E + F = -5$.....(1)

ผ่านจุด (5,4) แทนค่าจะได้ว่า $25 + 16 + 5D + 4F + F = 0$

จัดสมการ $5D + 4E + F = -41$.....(2)

ผ่านจุด (10,5) แทนค่าจะได้ว่า $100 + 25 + 10D + 5E + F = 0$

จัดสมการ $10D + 5E + F = -125$.....(3)

(2) – (1) ; $4D + 6E = -36$.....(4)

(3) – (2) ; $5D + E = -84$.....(5)

(5)×(6) จะได้ว่า $30D + 6E = -504$.....(6)

(6) - (4) $26D = -468$

$$D = \frac{-468}{26}$$

$$D = -18$$

แทนค่า D ใน (5)

$$(-90) + E = (-84)$$

$$E = (-84) + 90$$

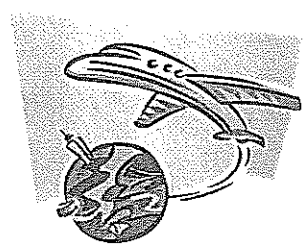
$$E = 6$$

แทนค่า D และ E ใน (1)

$$(-18) - 12 + F = (-5)$$

$$F = (-5) + 18 + 12$$

$$F = 25$$



แทนค่า D, E และ F ในรูปสมการทั่วไป

$\therefore$ สมการวงกลมที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ทั้ง 3 จุด

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$$

****

ใบงานที่ 5

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกกลุ่ม 1.....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

2.....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

3.....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

4.....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

5.....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

1. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด A (-2 , 3) และ B (0 , 1) และจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y+2x=0$

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

มีข้อต่อไปด้านหลัง ☞

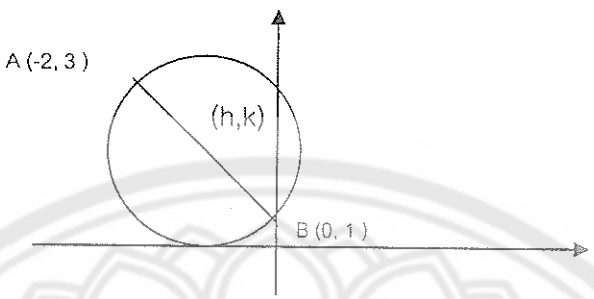
2. จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด 3 จุดคือ (5,3), (6,2) และ (3,1) มีสมการวงกลมตรงกับข้อใด

วิธีทำ .....

เฉลยใบงานที่ 5

1. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด A (-2 , 3) และ B (0 , 1) และจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y+2x=0$

วิธีทำ



กำหนดให้ (h , k) เป็นจุดศูนย์กลาง

$$\therefore |AC| = |BC|$$

$$(h+2)^2 + (k-3)^2 = (h-0)^2 + (k-1)^2$$

$$h^2 + 4h + 4 + k^2 - 6k + 9 = h^2 + k^2 - 2k + 1$$

$$\therefore 4h - 4k = -12$$

$$h - k = -3 \quad \text{.....(1)}$$

จุด (h , k) อยู่บนสมการเส้นตรง $2x + y = 0$

จะได้ว่า $2h + k = 0$ .....(2)

(1) + (2) ; $3h = -3$

$$h = -1$$

แทนค่า h จะได้ k = 2

$\therefore$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1 , - 2)

$$r = |BC| = \sqrt{(0+1)^2 + (1-2)^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$$

2. จงหาสมการวงกลมซึ่งผ่านจุด 3 จุดคือ (5 , 3) , (6 , 2) และ (3 , 1) มี

สมการวงกลมตรงกับข้อใด

วิธีทำ รูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

ผ่านจุด (5 , 3) $\therefore$ จะได้ว่า $25 + 9 + 5D + 3E + F = 0$

$$5D + 3E + F = -34 \quad \text{.....(1)}$$

ผ่านจุด (6 , 2) $\therefore$ จะได้ว่า $36 + 4 + 6D + 2E + F = 0$

$$6D + 2E + F = -40 \quad \text{.....(2)}$$

ผ่านจุด (3 , -1) $\therefore$ จะได้ว่า $9 + 1 + 3D + -E + F = 0$

$$3D - E + F = -10 \quad \text{.....(3)}$$

(2) – (1) ; $$D - E = -6 \quad \text{.....(4)}$$

(1) – (3) ; $$2D + 4E = -24$$

$$D + 2E = -12 \quad \text{.....(5)}$$

(5) – (4) ; $$3E = -6$$

$$E = -2$$

แทนค่า E ใน (4) ; $$D - (-2) = -6$$

$$D = -6 - 2$$

$$D = -8$$

แทนค่า D และ E ใน (3) ; $$3(-8) - (-2) + F = -10$$

$$-24 + 4 + F = -10$$

$$F = -10 + 24 - 4$$

$$F = 10$$

$\therefore$ สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$

แบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

แบบทดสอบที่ 4

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 7 สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่สัมผัส)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 8 สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ (เมื่อทราบจุดที่ผ่านวงกลม 3 จุด)

คำชี้แจง แบบทดสอบนี้เป็นแบบเลือกตอบ 5 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน ให้กากบาทลงในกระดาษคำตอบที่แจกให้

1. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(4,3)$ และสัมผัสแกน y
   - ก. $x^2+y^2-8x-6y-9=0$
   - ข. $x^2+y^2-8x-6y+9=0$
   - ค. $x^2+y^2+8x+6y-9=0$
   - ง. $x^2+y^2+8x+6y+9=0$
2. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(-1,2)$ และสัมผัสแกน x
   - ก. $x^2+y^2-2x+4y-1=0$
   - ข. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$
   - ค. $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
   - ง. $x^2+y^2+2x-4y+1=0$
3. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(1,2)$ และสัมผัสแกน x
   - ก. $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
   - ข. $x^2+y^2+2x+4y+1=0$
   - ค. $x^2+y^2-2x-4y-1=0$
   - ง. $x^2+y^2+2x+4y-1=0$
4. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,-3)$ และสัมผัสแกน y
   - ก. $x^2+y^2-4x+6y+9=0$
   - ข. $x^2+y^2+4x-6y+9=0$
   - ค. $x^2+y^2-4x+6y-9=0$
   - ง. $x^2+y^2+4x-6y-9=0$

5. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(-4,-2)$ และสัมผัสแกน y

ก. $x^2+y^2-8x-4y+4=0$

ข. $x^2+y^2+8x+4y+4=0$

ค. $x^2+y^2-8x-4y-4=0$

ง. $x^2+y^2+8x+4y-4=0$

เฉลยแบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
แบบทดสอบที่ 4

ข้อที่	เฉลย
1	ข
2	ง
3	ก
4	ค
5	ง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**

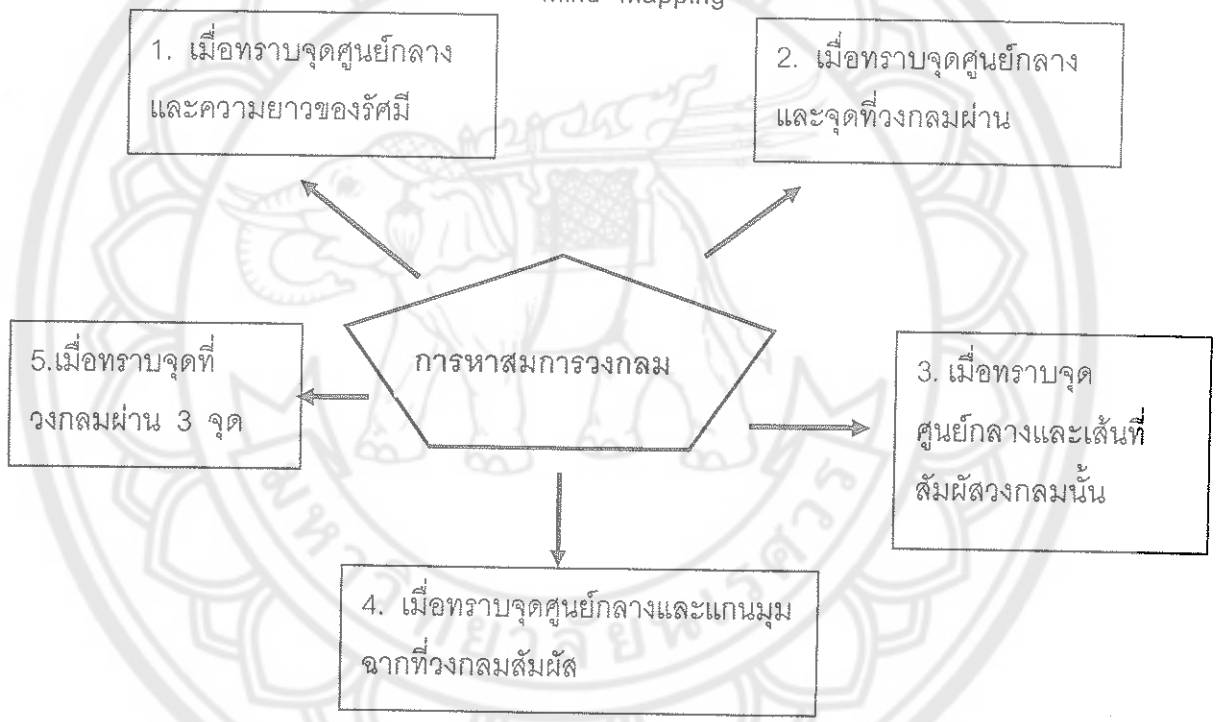
สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม **รหัส ค41202**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ภาคตัดกรวย **การเรียนรู้รายภาค**

เรื่อง การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม **จำนวน 2 ชั่วโมง**

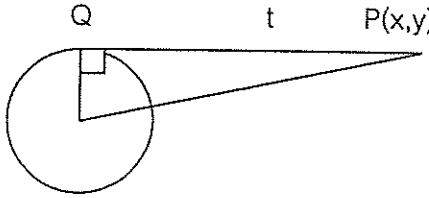
แผนผังความคิด

Mind Mapping



1. มาตรฐานการเรียนรู้หรือจุดประสงค์การเรียนรู้
    1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้
2. สาระการเรียนรู้

การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม



กำหนดให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมลากจาก P ถึง Q และ P (x,y) เป็นจุดภายนอก ที่ลากมาสัมผัสวงกลม C (h,k) เป็นจุดศูนย์กลางในสามเหลี่ยมมุมฉาก PQC

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = \left(\overline{PC}\right)^2 - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k) - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 - 2hx_1 + h^2 + y_1{}^2 - 2ky_1 + k^2 - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 + y_1{}^2 - 2hx_1 - 2ky_1 + +h^2 + k^2 - r^2$$

ถ้ากำหนดให้ $D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$

แทนค่า $\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

$\therefore$ ความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด P ถึง Q คือ

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

หลักการพิจารณา

1. ทำสมการให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
2. แทนค่า x_1 และ y_1 จากจุด $P(x_1, y_1)$ ในสมการวงกลม
3. หาความยาวจากเส้นสัมผัสวงกลม $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

ตัวอย่าง จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด (5 , 3) ไปสัมผัสวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น $(x-3)^2 = 13 - 4y - y^2$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปทั่วไป $x^2 - 6x + 9 = 13 - 4y - y^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

ให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด (5 , 3) ไปสัมผัสวงกลม

จากสูตร $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

แทนค่า $x_1 = 5, y_1 = 3, D = 6, E = 4$ และ $F = -4$

$t = \sqrt{25 + 9 - 6(5) + 4(3) - 4}$

$t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ความยาวของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ $2\sqrt{3}$

3. **ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง**

1. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ในรูปมาตรฐานและรูปทั่วไป

4. การวิเคราะห์พฤติกรรมการเรียนรู้ที่คาดหวัง (พฤติกรรมที่ระบุไว้ในผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง)

1. ด้านความรู้ (K) : เข้าใจหลักการและความสำคัญ ของสมการวงกลม
2. ด้านเจตคติ (A) : มีนิสัยรักตัวเลขและการคิดคำนวณ เสริมสร้างคุณลักษณะที่ดีต่อการคิดคำนวณ
3. ด้านทักษะ (P) : การนำเอาความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ศึกษาในระดับสูงต่อไป

5. สาระการเรียนรู้รายปี

สาระที่ 3 : เรขาคณิต

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตศาสตร์สองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric mode) ในการแก้ปัญหาได้

สาระที่ 4 : พีชคณิต

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพนธ์สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ แทนสถานการณ์ต่าง ๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

6. กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

1 R

1. ครูทบทวนเกี่ยวกับทฤษฎีปิธากอรัสในเรื่องการหาความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากให้นักเรียนโดยการถามมีหลักการคิด หรือพิจารณาอย่างไรบ้าง

2. ครูยกตัวอย่างรูปวงกลมที่มีจุด C (1 ,2) เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาว 3 หน่วย ที่ลากจากจุด P (7, 4) ซึ่งเป็นจุดภายนอกมาสัมผัสวงกลม อยากทราบว่าระยะทางจากจุดภายนอกมาสัมผัสจุดศูนย์กลางวงกลมดังกล่าวมีขนาดยาวเท่าใด

ขั้นสอน

2 L

3. ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ 4 – 5 คน อภิปรายถึงวีการหาคำตอบในข้อที่ 2 และหาวิธีการอื่น ๆ ที่แนวคิดใหม่ในการหาคำตอบเพิ่มเติมอีก

3 R

4. นักเรียนแต่ละกลุ่มแลกเปลี่ยนข้อสรุปกัน และตรวจสอบผลงานที่ตนเองทำ

4 L

5. ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายศึกษาใบงานที่ 5สรุปเป็นลำดับขั้นตอนในการหาคำตอบจากตัวอย่าง

5 L

6. ครูแจกใบงานที่ 6 ให้นักเรียนร่วมกันทำและอภิปรายผลร่วมกันว่ามีขั้นตอนในการแก้ปัญหาอย่างไร

6 R

7. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มร่วมกันอภิปรายและสรุปแนวคิดหรือทฤษฎีที่ได้จากการทำใบงานที่ 6 ในข้อ 6 ร่วมกันภายในกลุ่ม

7 L

8. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มพิจารณาความถูกต้องของตนเองกับกลุ่มอื่น ๆ โดยให้แต่ละกลุ่มเขียนวิธีทำของตนเองหน้าชั้นเรียน

9. ครูและนักเรียนภายในห้องร่วมกันสรุปกลุ่มที่ทำได้ถูกต้องมากที่สุดและครูพิจารณากลุ่มที่ได้ความถูกต้องมากที่สุดได้คะแนนเต็ม 10 ให้คะแนนลดหลั่นลงมาตามส่วนที่ทำผิด (ควรให้คะแนนกลุ่มที่ทำถูกไม่หมดบ้างเพื่อเป็นการเสริมแรงในเบื้องต้นนักเรียนจะได้มีกำลังใจในการเรียน)

ขั้นสรุป

8 R

10. ครูและนักเรียนแต่ละกลุ่มอภิปรายเกี่ยวกับความรู้ที่ได้เรียนเรื่องนี้และแนวทางการนำไปใช้ในชีวิตประจำวันหรือเนื้อหาอื่น ๆ ต่อไป

ตารางกำหนดกิจกรรมการเรียนการสอน

7. สื่อการเรียนการสอน

7.1 ประเภทสื่อ

7.1.1 ใบความรู้ที่ 4

7.1.2 ใบงานที่ 5

7.2 วัสดุ / อุปกรณ์

7.2.1 กระดาษ A 3

7.2.2 ปากกาเมจิก

7.2.3 ไม้บรรทัด วงเวียน

7.3 แหล่งการเรียนรู้

7.3.1 ครู ผู้ปกครอง

7.3.2 ห้องสมุด

7.3.3 เพื่อนในชั้นเรียน

8. **การวัดผลและประเมินผล**

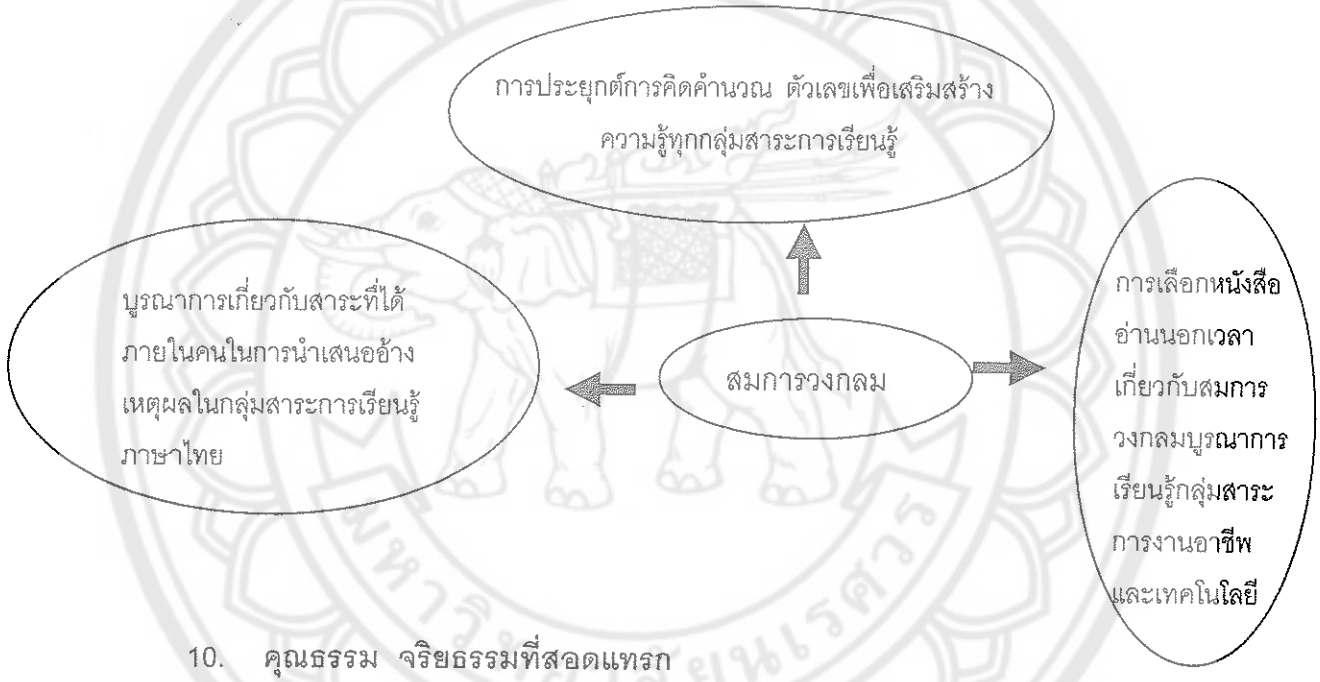
8.1 การตั้งคำถาม และการตอบคำถามอย่างมีเหตุผล

8.2 ตรวจแบบฝึกหัด

8.3 ความตั้งใจในการเรียน การแสดงความคิดเห็น การนำเสนอหน้าชั้นเรียน

8.4 ความมีปฏิภาณไหวพริบ ในการตอบคำถามในชั้นเรียน

9. **การเชื่อมโยงบูรณาการกลุ่มสาระการเรียนรู้อื่น ๆ**



10. **คุณธรรม จริยธรรมที่สอดแทรก**

1. เสริมสร้างนิสัยรักตัวเอง และการคิดคำนวณ
2. ส่งเสริมความมีเหตุผล และยอมรับฟังเหตุผลในการทำงานร่วมกับผู้อื่น
3. มีเจตคติที่ดีในการเรียนคณิตศาสตร์ และทำงานร่วมกับผู้อื่น

11. **กิจกรรมเสนอแนะ**

.....

.....

.....

12. บันทึกผลหลังสอน

ผลการสอน

.....

.....

.....

ปัญหา / อุปสรรค

.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะแนวทางแก้ไข

.....

.....

.....

ลงชื่อ.....ผู้สอน

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

13. ความเห็นของหัวหน้าสถานศึกษาหรือผู้ที่ได้รับมอบหมายก่อนสอน

(ตรวจ / นิเทศ /เสนอแนะ / รับรอง)

.....

.....

.....

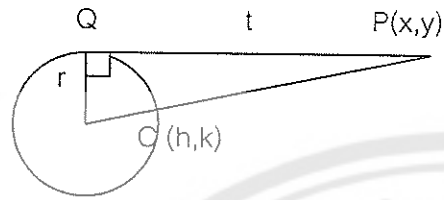
ลงชื่อ.....

(.....)

ตำแหน่ง.....

วันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ใบความรู้ที่ 5
ประกอบการสอนภาคตัดกรวย เรื่องวงกลม
การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม



กำหนดให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมจาก P ถึง Q และ P(x, y) เป็นจุดภายนอกที่ลากมาสัมผัสวงกลม C(h, k) เป็นจุดศูนย์กลางในสามเหลี่ยมมุมฉาก PQC

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = \left(\overline{PC}\right)^2 - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k) - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 - 2hx_1 + h^2 + y_1^2 - 2ky_1 + k^2 - r^2$$
$$\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2hx_1 - 2ky_1 + +h^2 + k^2 - r^2$$

ถ้ากำหนดให้ $D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$

แทนค่า $\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

$\therefore$ ความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด P ถึง Q คือ

$$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$$

หลักการพิจารณา

1. ทำสมการให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
2. แทนค่า x_1 และ y_1 จากจุด $P(x_1, y_1)$ ในสมการวงกลม
3. หาความยาวจากเส้นสัมผัสวงกลม $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

ตัวอย่าง จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด (5, 3) ไปสัมผัสวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น $(x-3)^2 = 13 - 4y - y^2$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปทั่วไป $x^2 - 6x + 9 = 13 - 4y - y^2$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

ให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด (5 , 3) ไปสัมผัสวงกลม

จากสูตร $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

แทนค่า $x_1 = 5, y_1 = 3, D = 6, E = 4$ และ $F = -4$

$t = \sqrt{25 + 9 - 6(5) + 4(3) - 4}$

$t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

ความยาวของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ $2\sqrt{3}$

****

ใบงานที่ 6

ชื่อกลุ่ม.....

สมาชิกกลุ่ม

1. .....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....
2. .....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....
3. .....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....
4. .....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....
5. .....ชั้น ม. 4/..... เลขที่.....

คำสั่ง ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายภายในกลุ่มหาขั้นตอนการหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้

1. ระยะทางที่สั้นที่สุด ที่ลากจากจุด (2,6) มายังวงกลม $(x+3)^2+(y-4)^2=5$ มีความยาวกี่หน่วย

<u>วิธีทำ</u> .....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

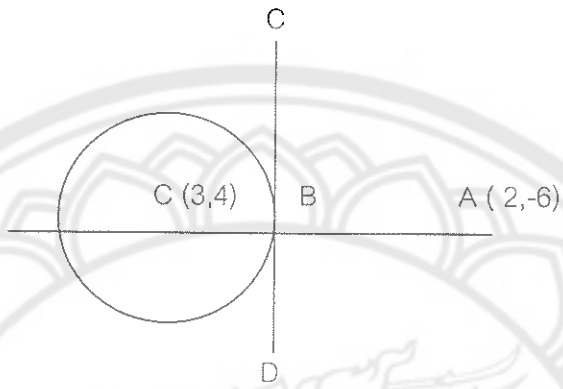
.....

.....

เฉลยใบงานที่ 6

1. ระยะทางที่สั้นที่สุด ที่ลากจากจุด (2,6) มายังวงกลม $(x+3)^2+(y-4)^2=5$ มีความยาวกี่หน่วย

วิธีทำ



จากสมการวงกลม $(x+3)^2+(y-4)^2=5$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (-3 , 4) รัศมี $\sqrt{5}$ หน่วย ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดใด ๆ ภายนอกวงกลมคือ ระยะทางที่ลากจากจุดที่กำหนดให้มาตั้งฉากกับเส้นสัมผัสวงกลม ณ จุดสัมผัส

$\therefore \quad |AB|$ เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด

แต่ $|AB|=|AC|-|BC|$

$$|AC|=\sqrt{(2+3)^2+(-6-4)^2}$$
$$=\sqrt{25+100}$$
$$=\sqrt{125}$$
$$=5\sqrt{5}$$
$$|BC|=\sqrt{5}$$

$\therefore \quad |AB|=5\sqrt{5}-\sqrt{5}$

$=4\sqrt{5}$ หน่วย

แบบทดสอบที่ 5

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 9 สามารถหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุดภายนอกมายังจุดสัมผัส

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 10 สามารถหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมเมื่อกำหนดข้อมูลมาให้

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้เป็นแบบทดสอบชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ให้นักเรียนเลือกข้อที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัสซึ่งวัดจากจุด $A(7,8)$ บนเส้นสัมผัสไปถึงจุดสัมผัสบนวงกลม $x^2+y^2=9$

   ก. $\sqrt{26}$ หน่วย

   ข. 26 หน่วย

   ค. 52 หน่วย

   ง. $2\sqrt{26}$ หน่วย

2. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัส $P(6,4)$ บนเส้นสัมผัสไปถึงจุดสัมผัสบนวงกลม $x^2+y^2+4x+16y-19=0$

   ก. 8 หน่วย

   ข. 9 หน่วย

   ค. 10 หน่วย

   ง. 11 หน่วย

3. ข้อใดเป็นสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $(x+2)^2+(y+1)^2=5$ ณ จุด $A(-3,1)$

   ก. $x-2y+5=0$

   ข. $x+2y-5=0$

   ค. $x-2y-5=0$

   ง. $-x-2y+5=0$

4. ข้อใดเป็นสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{41}{4}$ ณ จุด $A(-1,-1)$

   ก. $4x-5y+9=0$

   ข. $4x-5y-9=0$

   ค. $4x+5y+9=0$

   ง. $4x+5y-9=0$

5. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2+6x+5y-21=0$ ณ จุด $A(1,2)$

   ก. $8x-9y+26=0$

   ข. $8x+9y-26=0$

   ค. $8x+9y+26=0$

   ง. $8x-9y-26=0$

6. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2+2y-19=0$ ณ จุด $A(-4,-3)$

   ก. $2x-y-11=0$

   ข. $2x-y+11=0$

   ค. $2x+y-11=0$

   ง. $2x+y+11=0$

7. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=169$ ณ จุด $A(5,-12)$

   ก. $5x-12y=169$

   ข. $5x-12y=-169$

   ค. $5x+12y=169$

   ง. $5x+12y=-169$

8. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=29$ จากจุด $P(5,7)$

   ก. $2\sqrt{5}$ หน่วย

   ข. $3\sqrt{5}$ หน่วย

   ค. $4\sqrt{5}$ หน่วย

   ง. $5\sqrt{5}$ หน่วย

9. ข้อใดเป็นระยะทางที่ลากจากสมการวงกลม $x^2+y^2+8x-10y-17=0$ ไปยังจุด $P(-2,-3)$

   ก. $\sqrt{8}$ หน่วย

   ข. 3 หน่วย

   ค. $\sqrt{10}$ หน่วย

   ง. $\sqrt{11}$ หน่วย

10. ข้อใดเป็นระยะทางจากจุด $P(1,3)$ มาสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-x-7=0$

    ก. $\sqrt{2}$ หน่วย ข. $2\sqrt{2}$ หน่วย

    ค. $3\sqrt{2}$ หน่วย ง. $4\sqrt{2}$ หน่วย

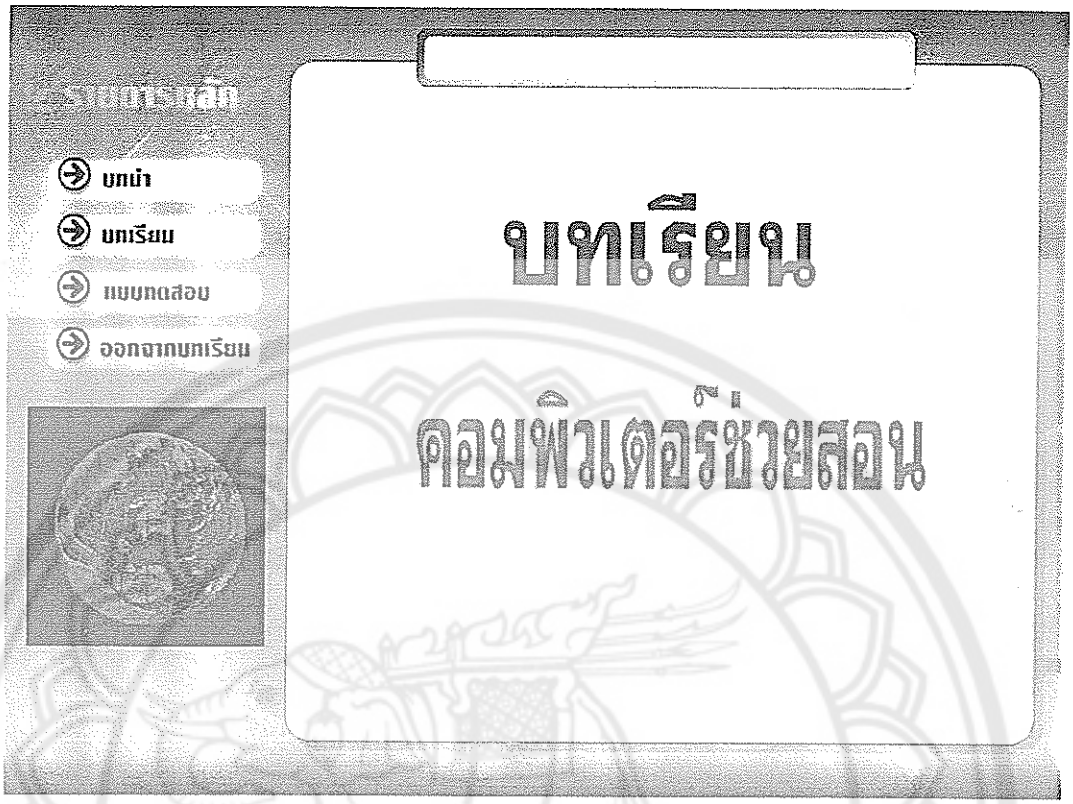
เฉลยแบบทดสอบตามผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
แบบทดสอบที่ 5

ข้อที่	เฉลย
1	ง
2	ข
3	ก
4	ค
5	ข
6	ง
7	ก
8	ข
9	ค
10	ก

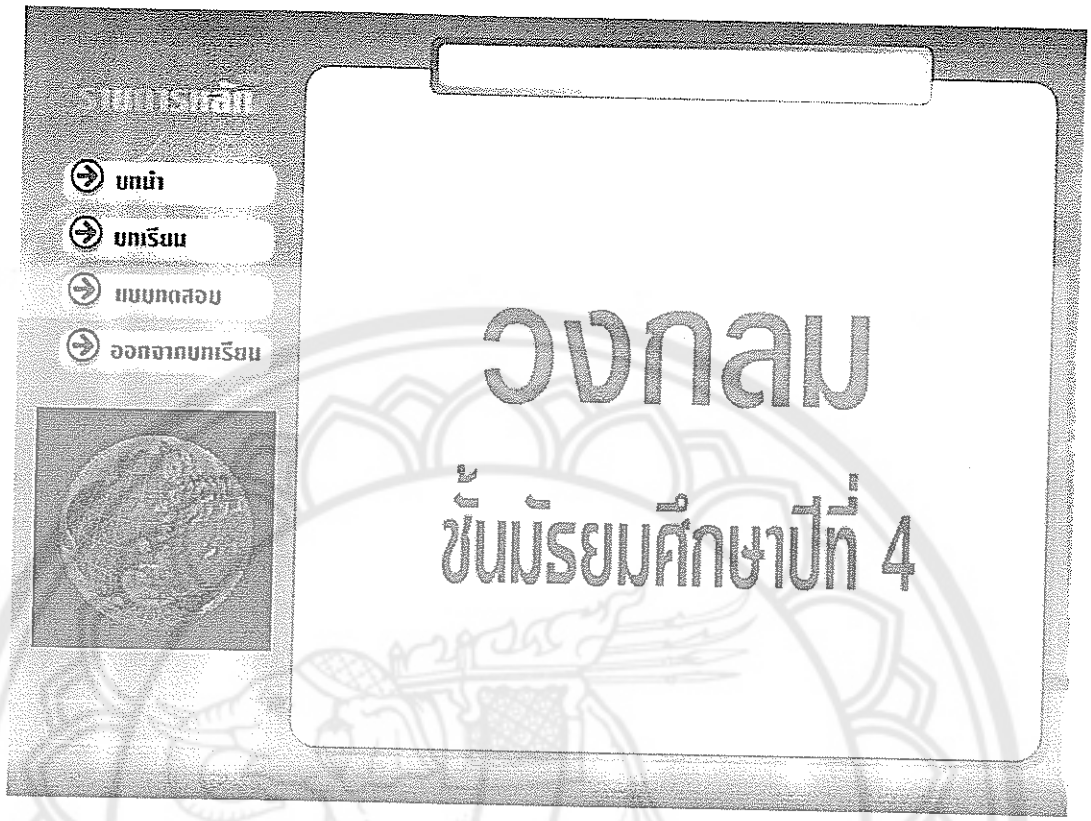
มหาวิทยาลัยนเรศวร

ภาคผนวก ซ

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน วิชาคณิตศาสตร์ ค41202
เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4


รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
บทเรียน
คอมพิวเตอร์ช่วยสอน

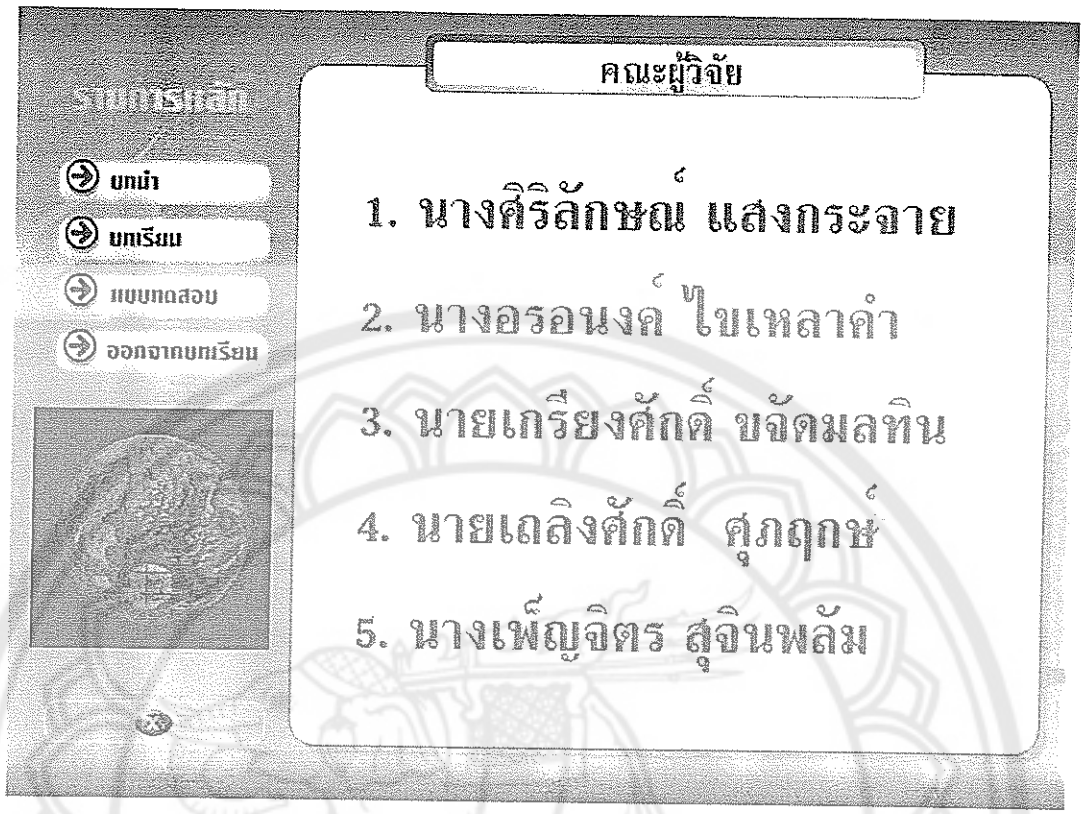
รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
เสียง_


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
วงกลม
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

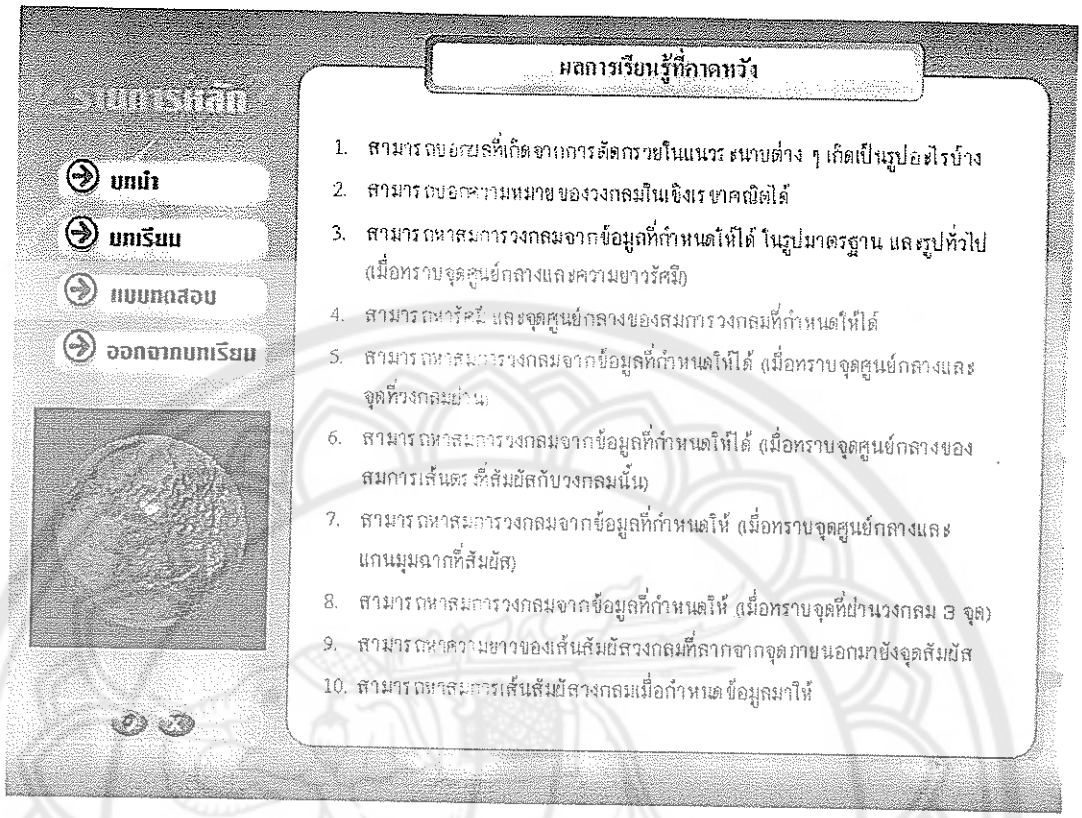
บทนำ
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คำแนะนำ
คณะผู้วิจัย
ผลการเรียนรู้
ที่คาดหวัง
อาจารย์ที่ปรึกษา

คำแนะนำ
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
1. ให้คลิกเมาส์ตามรูปภาพดังนี้
ย้อนกลับหน้าเดิม
เปิดหน้าต่อไป
ปิดหน้าที่กำลังศึกษา
ฟังเสียง
1

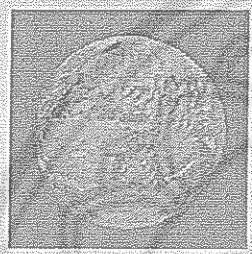
คำแนะนำ
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
2. เนื้อหามีจำนวน 6 เรื่อง ดังนี้
1) ภาคตัดกรวย
2) วงกลม
3) สมการวงกลม
4) การหาสมการวงกลม
5) การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม
6) การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม
ผู้เรียนจะต้องเรียนทีละเรื่องตาม
ลำดับจนครบทุกเรื่อง
2


รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คณะผู้วิจัย
1. นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย
2. นางอรอนงค์ ไขเหลาคำ
3. นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน
4. นายเฉลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์
5. นางเพ็ญจิตร สุจินพลัม

รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
อาจารย์ที่ปรึกษา
ดร.มาโนชญ์ สิริพิทักษ์เดช


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง
1. สามารถบอกรูปที่เกิดจากการตัดกรวยในแนวระนาบต่าง ๆ เกิดเป็นรูปอะไรบ้าง
2. สามารถบอกความหมายของวงกลมในเชิงเรขาคณิตได้
3. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ ในรูปมาตรฐาน และรูปทั่วไป (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี)
4. สามารถหารัศมี และจุดศูนย์กลางของสมการวงกลมที่กำหนดให้ได้
5. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน)
6. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ได้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางของสมการเส้นตรงที่สัมผัสกับวงกลมนั้น)
7. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ (เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่สัมผัส)
8. สามารถหาสมการวงกลมจากข้อมูลที่กำหนดให้ (เมื่อทราบจุดที่ผ่านวงกลม 3 จุด)
9. สามารถหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุดภายนอกมายังจุดสัมผัส
10. สามารถหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมเมื่อกำหนดข้อมูลมาให้

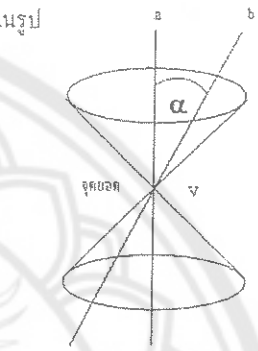
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
บทเรียน
วงกลม
สมการวงกลม
ภาคตัดกรวย
การหาสมการวงกลม
การหาสมการของเส้นสัมผัสวงวงกลม
การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงวงกลม



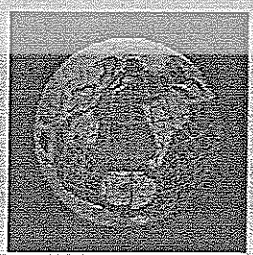
ภาคตัดกรวย

การศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้วิธีการเรขาคณิตวิเคราะห์ดังนี้

ให้ a และ b เป็นเส้นตรงใด ๆ สองเส้นตัดกันที่จุด V เป็นมุมแหลม α ให้เส้นตรง a และจุด V ตรึงอยู่กับที่ผิวที่เกิดจากการหมุนของเส้นตรง b รอบเส้นตรง a (โดยมุม α ระหว่างเส้นตรง a และ b มีขนาดคงตัว) เรียกว่า กรวยกลมตรง (Right Circular cone) ดังแสดงในรูป ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะกรวยกลมตรงเท่านั้น และจะเรียกสั้น ๆ ว่า กรวย เส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า แกน (axis) ของกรวย จุด V เรียกว่า จุดยอด (Vertex) เส้นตรง b ที่ผ่านจุด V ทำมุม α กับแกนกรวย เรียกว่า ตัวก่อกำเนิด (generator) ของกรวย จุดยอด V แบ่งกรวยออกเป็นสองข้าง (napes) ซึ่งอยู่คนละด้านของจุดยอด



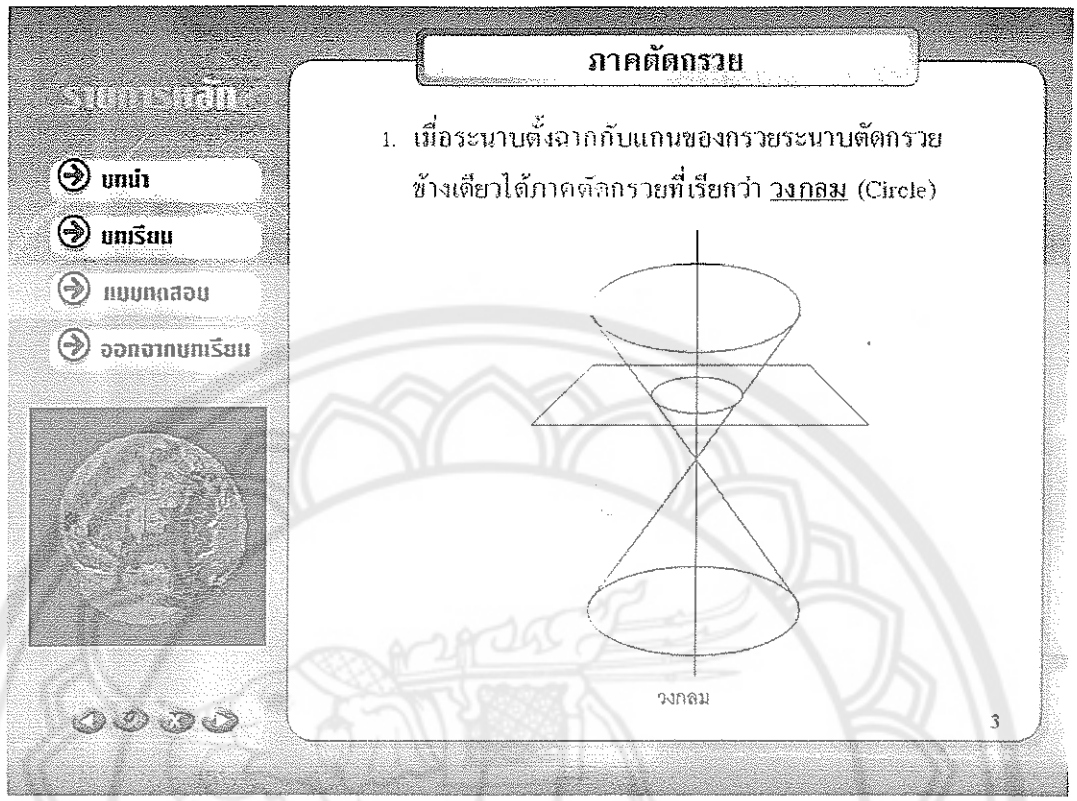
1

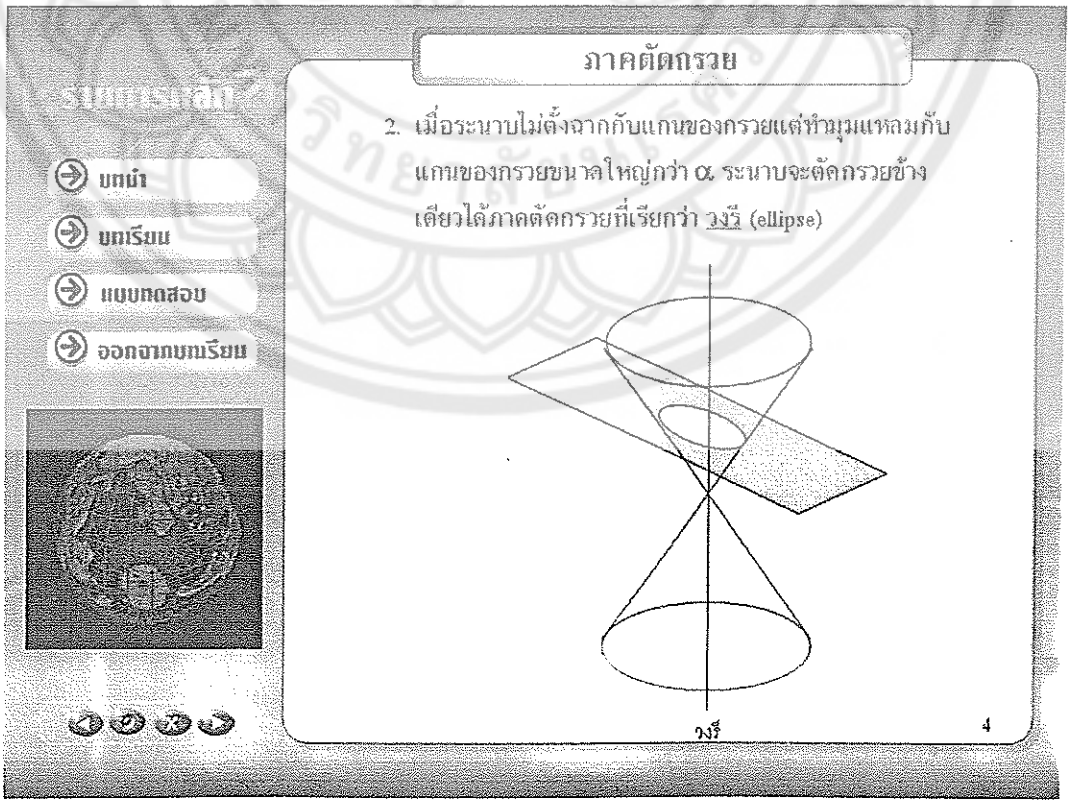


ภาคตัดกรวย

ภาคตัดกรวย คือ รูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษาจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยดังแสดงในรูปดังต่อไปนี้

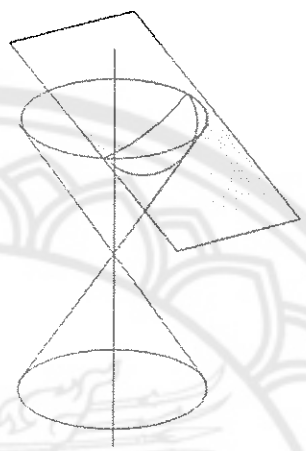
2


ภาคตัดกรวย
1. เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวยระนาบตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม (Circle)
วงกลม
3
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน


ภาคตัดกรวย
2. เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี (ellipse)
วงรี
4
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน

ภาคตัดกรวย

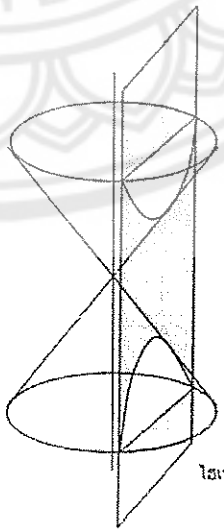
3. เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวยระนาบจะตัดกรวยข้างเดียวได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา (parabola)



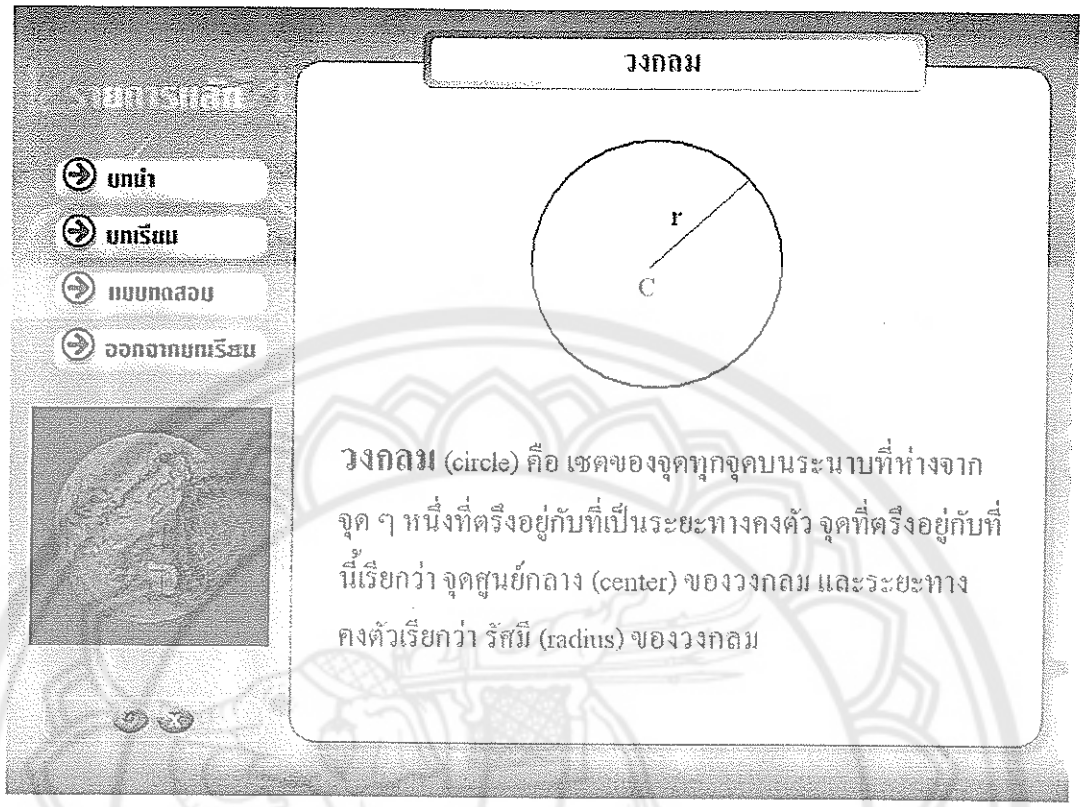
พาราโบลา

ภาคตัดกรวย

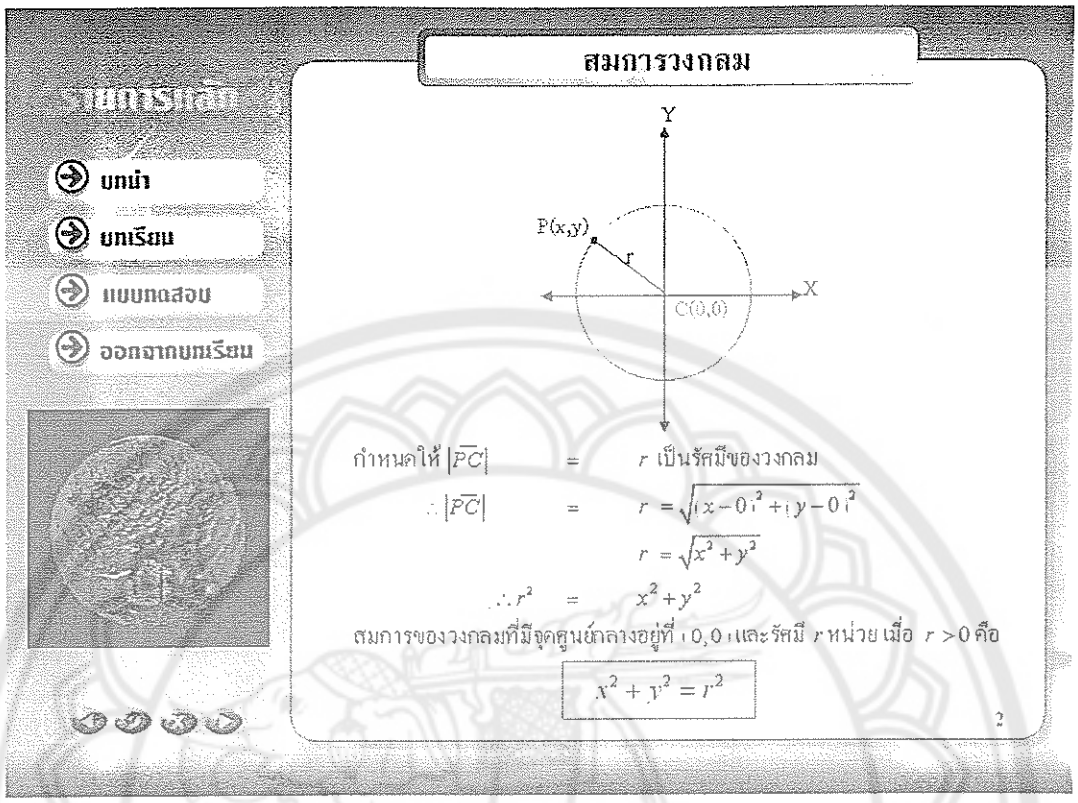
4. เมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา (hyperbola)

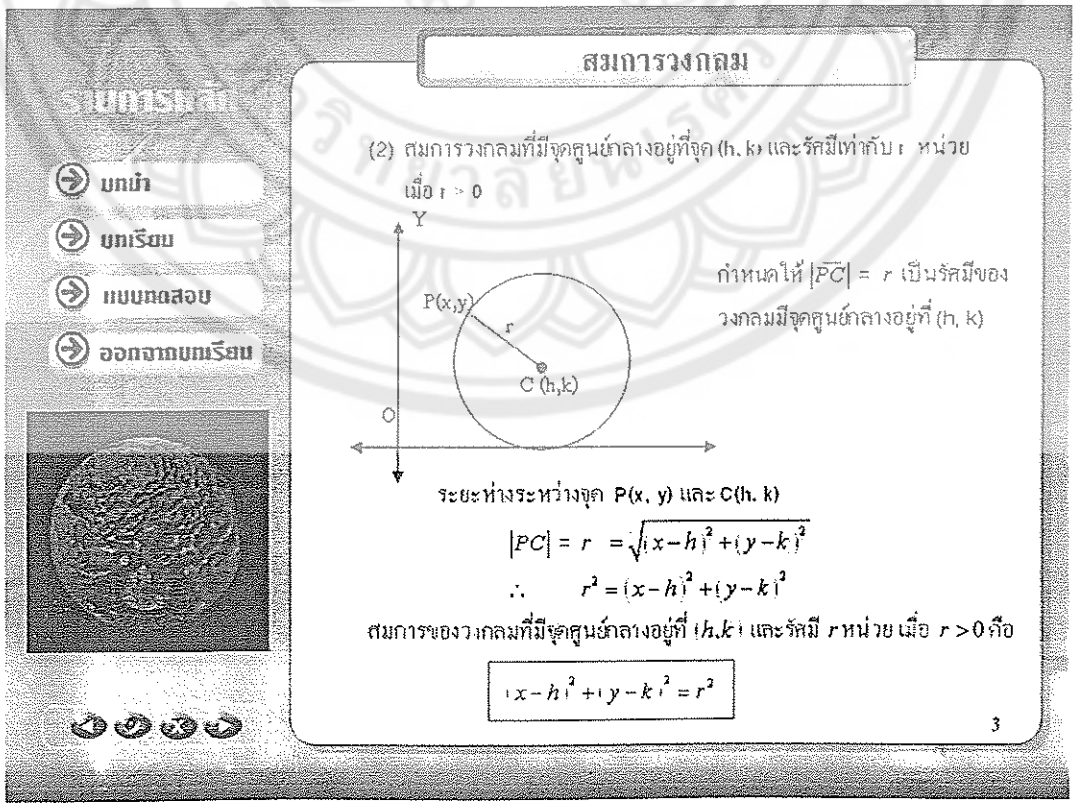


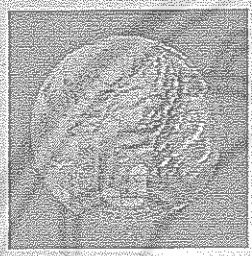
ไฮเพอร์โบลา


วงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
r
C
วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

สมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
สมการวงกลมแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ
1. สมการรูปมาตรฐาน (Standard form) ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ
(1) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0) และรัศมีเท่ากับ r หน่วย เมื่อ r > 0
Y
P(x,y)
r
X
C (0,0)
กำหนดจุดศูนย์กลางที่ C(0,0) รัศมี r คือระยะทางระหว่างจุด C(0,0) กับจุด P(x,y) ที่อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม
1


สมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
Y
P(x,y)
r
X
C(0,0)
กำหนดให้ $|\overline{PC}|$ = r เป็นรัศมีของวงกลม
$\therefore |\overline{PC}| = r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\therefore r^2 = x^2+y^2$
สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ
$x^2+y^2=r^2$
2


สมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
(2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และรัศมียาวเท่ากับ r หน่วย
เมื่อ $r>0$
Y
P(x,y)
r
C (h,k)
O
กำหนดให้ $|\overline{PC}| = r$ เป็นรัศมีของวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k)
ระยะห่างระหว่างจุด P(x, y) และ C(h, k)
$|PC| = r = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$
$\therefore r^2 = (x-h)^2+(y-k)^2$
สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมี r หน่วย เมื่อ $r>0$ คือ
$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
3



สมการวงกลม

2. สมการรูปทั่วไป (General form)

จากสมการที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h,k) และรัศมี r หน่วย รูปสมการ คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

จะได้ว่า $x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า $x^2+y^2-2hx-2ky+k^2+(h^2+k^2-r^2)=0$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการและการนำไปใช้

ถ้ากำหนดให้

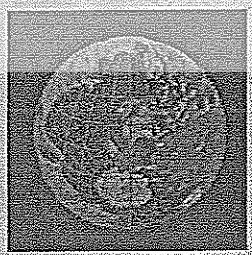
$D=-2h$ หรือ $h=\frac{D}{-2}$

$E=-2k$ หรือ $k=\frac{E}{-2}$

$F=h^2+k^2-r^2$ หรือ $r^2=h^2+k^2-F$

$\therefore$ จะได้สมการในรูปทั่วไป คือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

4



สมการวงกลม

ลักษณะกราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

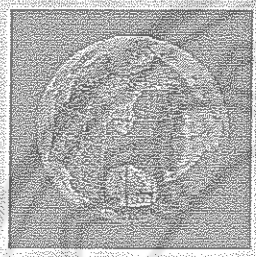
กราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อเขียนวงกลมบนพื้นระนาบแกนมุมฉาก กราฟนั้นจะเป็นอย่างไรขึ้นอยู่กับรัศมีของวงกลม คือ $r=\sqrt{h^2+k^2-F}$

กำหนดสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ เมื่อ D,E และ F เป็นค่าคงตัว

1. ถ้า $D^2+E^2-4F<0$ แล้วจะไม่มีจุดใดสอดคล้องกับสมการนี้
2. ถ้า $D^2+E^2-4F=0$ แล้ว กราฟของสมการนี้คือจุด $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ เพียงจุดเดียว
3. ถ้า $D^2+E^2-4F>0$ แล้ว กราฟของสมการนี้จะเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง อยู่ที่ $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ และรัศมีเท่ากับ $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $F<0$ แล้ว กราฟของสมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ จะเป็นวงกลมเสมอ

5



การหาสมการวงกลม

1. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมี

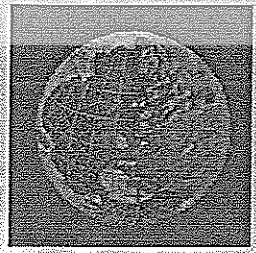
หลักการที่จะใช้

1) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,0) รัศมี r หน่วย ใช้สมการ $x^2+y^2=r^2$ โดยแทนค่า r ตามโจทย์ลงในสมการ

2) ถ้ากำหนดจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) หาสมการได้ 2 แบบ

1.1 ใช้สมการ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ แทนค่า h, k และ r ตามโจทย์กำหนดให้ลงในสมการ

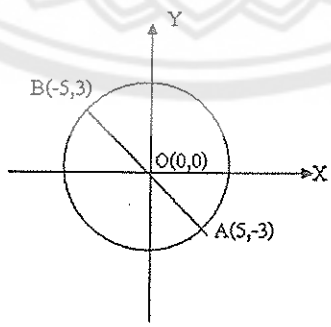
1.2 ใช้สมการ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ โดยที่ $D=-2h$, $E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$



การหาสมการวงกลม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุด $A(5,-3)$ และ $B(-5,3)$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

วิธีทำ กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งอยู่ตรงกลางระหว่างจุด A และ B



หาจุดกึ่งกลางจาก $\bar{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$, $\bar{y}=\frac{y_1+y_2}{2}$

จะได้ว่า $h=\frac{-5+5}{2}=0$

$k=\frac{3+(-3)}{2}=0$

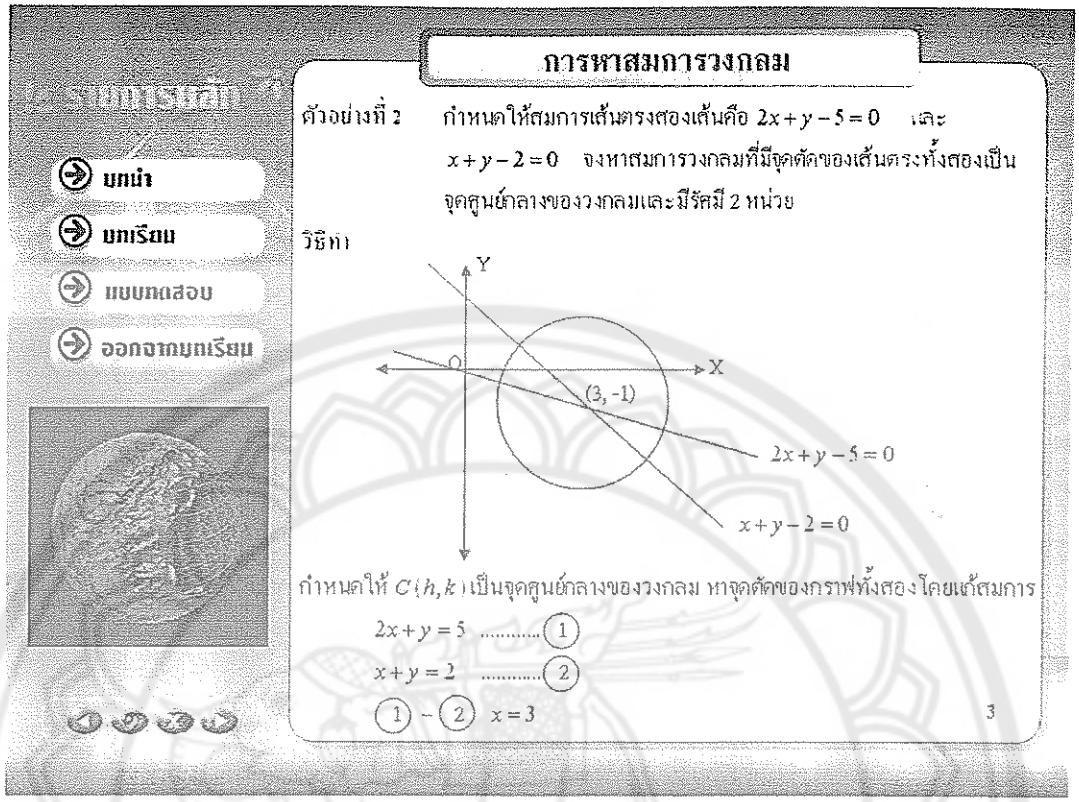
$\therefore$ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (0,0)

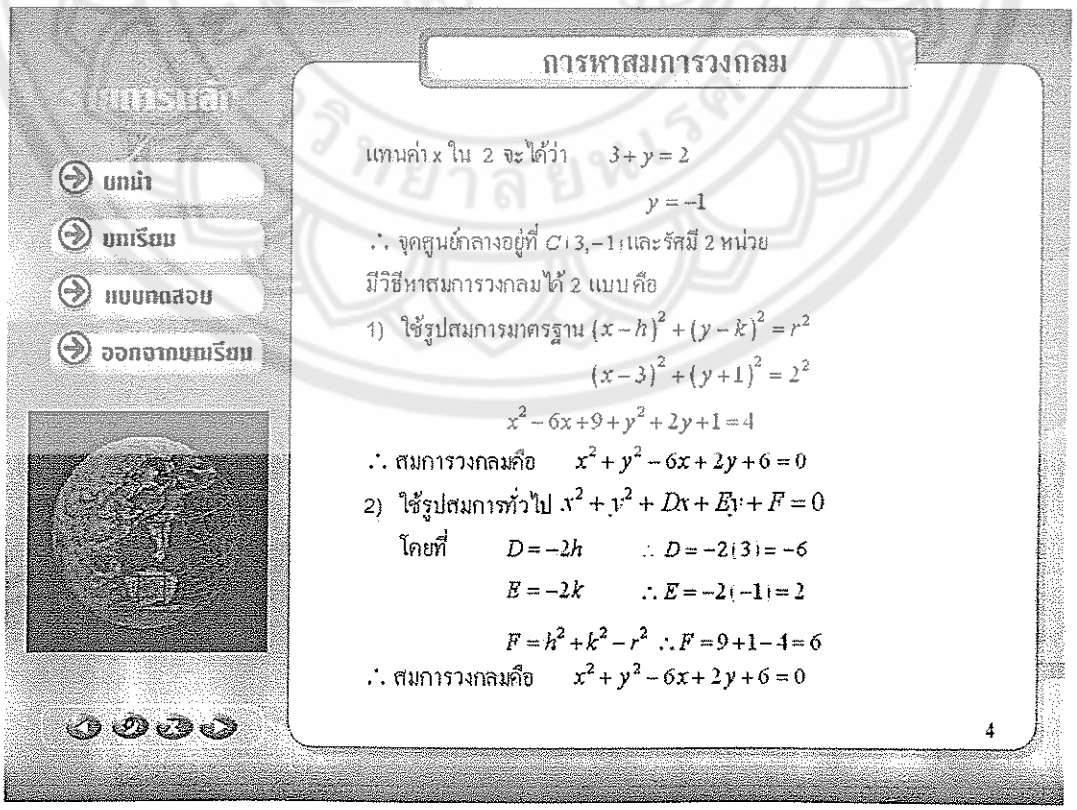
$r=\sqrt{(5-0)^2+(-3-0)^2}$

$r=\sqrt{34}$

จากสมการวงกลม $x^2+y^2=r^2$ แทนค่า $r=\sqrt{34}$

$\therefore$ สมการของวงกลมคือ $x^2+y^2=34$


รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
การหาสมการวงกลม
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้สมการเส้นตรงสองเส้นคือ $2x+y-5=0$ และ $x+y-2=0$ จงหาสมการวงกลมที่มีจุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและมีรัศมี 2 หน่วย
วิธีทำ
Y
X
O
(3, -1)
$2x+y-5=0$
$x+y-2=0$
กำหนดให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม หาจุดตัดของกราฟทั้งสองโดยแก้สมการ
$2x+y=5$ .....(1)
$x+y=2$ .....(2)
(1) - (2) $x=3$
3


รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
การหาสมการวงกลม
แทนค่า x ใน 2 จะได้ว่า $3+y=2$
$y=-1$
$\therefore$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $C(3,-1)$ และรัศมี 2 หน่วย
มีวิธีหาสมการวงกลมได้ 2 แบบ คือ
1) ใช้รูปสมการมาตรฐาน $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
$(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$
$x^2-6x+9+y^2+2y+1=4$
$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$
2) ใช้รูปสมการทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
โดยที่ $D=-2h$ $\therefore D=-2(3)=-6$
$E=-2k$ $\therefore E=-2(-1)=2$
$F=h^2+k^2-r^2$ $\therefore F=9+1-4=6$
$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+2y+6=0$
4

การหาสมการวงกลม

2. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและจุดที่วงกลมผ่าน

หลักการพิจารณา

(1) หาค่ารัศมี r จากสูตรหาความยาวระหว่างจุด h,k และจุดที่กำหนดให้ $P(x,y)$

จะได้ว่า $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$

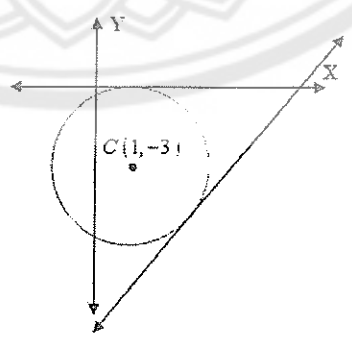
$\therefore r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$

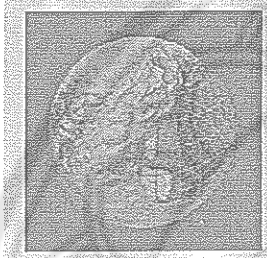
หาค่า r^2 ได้โดยการแทนค่า h,k จากจุดศูนย์กลางและ x,y จากจุดผ่าน

(2) หาสมการวงกลมโดยใช้สูตร $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

การหาสมการวงกลม

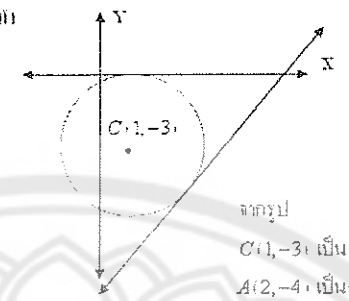
ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสเส้นตรง $y-x+6=0$ ที่จุด $(2,-4)$ จงหาสมการวงกลม





การหาสมการวงกลม

วิธีทำ



จากรูป

$C(1,-3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$A(2,-4)$ เป็นจุดสัมผัส

$\therefore |AC| = r$ เป็นรัศมีของวงกลม

$r^2 = (2-1)^2 + (-4+3)^2$

$r^2 = 1+1 = 2$

รูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

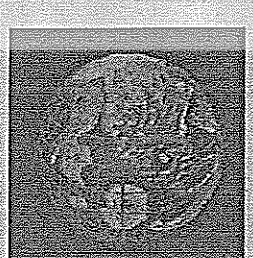
$D = -2h = -2(1) = -2$

$E = -2k = -2(-3) = 6$

$F = h^2+k^2-r^2 = 1+9-2 = 8$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-2x+6y+8=0$

7



การหาสมการวงกลม

3. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมนั้น

หลักการที่ใช้ในการหา

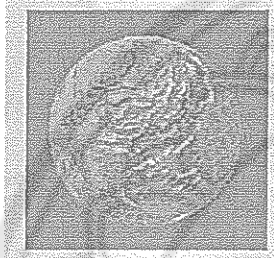
(1) หาความยาวของรัศมี r ของวงกลม คือระยะทางจากจุด $C(h,k)$ ไปยังเส้นสัมผัส $Ax+By+C=0$

$$r = \frac{|A(h)+B(k)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(2) ใช้สมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

โดยที่ $D=-2h$, $E=-2k$ และ $F=h^2+k^2-r^2$

8



การหาสมการวงกลม

ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,2)$ และสัมผัสเส้นตรง $4x+3y-4=0$

วิธีทำ หาได้ก่อน r ของวงกลม จากสูตร

$$r=\frac{|Ah+Bk+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

แทนค่า $A=4, B=3, C=-4, h=-3, k=2$

$\therefore$ จะได้ว่า $r=\sqrt{16+9}$

$$r=\frac{|-12+6-4|}{5}=\frac{10}{5}=2$$

จากรูปสมการทั่วไปของวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

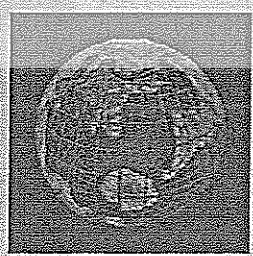
$\therefore D=-2h=-2(-3)=6$

$E=-2k=-2(2)=-4$

$F=h^2+k^2-r^2=9+4-4=9$

$\therefore$ สมการวงกลมคือ $x^2+y^2+6x-4y+9=0$

9



การหาสมการวงกลม

4. เมื่อทราบจุดศูนย์กลางและแกนมุมฉากที่วงกลมสัมผัส

หลักการพิจารณา

ถ้าจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด C(h,k)

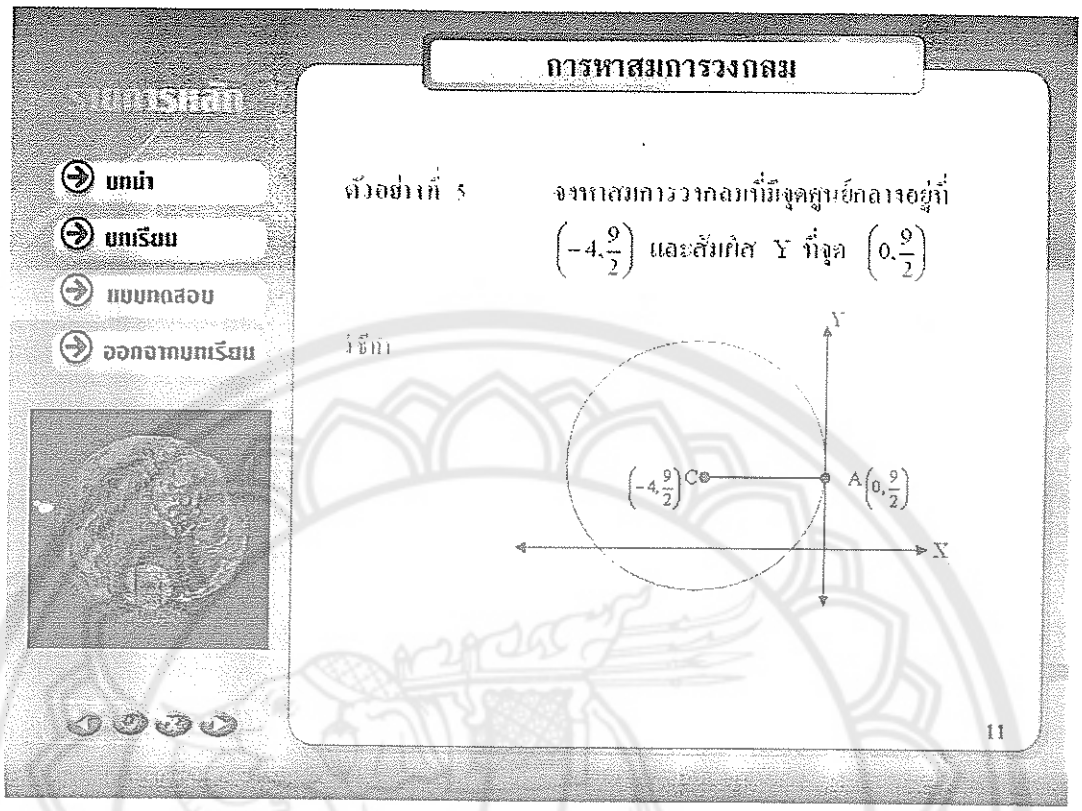
1) ถ้าสัมผัสแกน X ที่จุด (h,0) รัศมี $r=|k|$ หน่วย

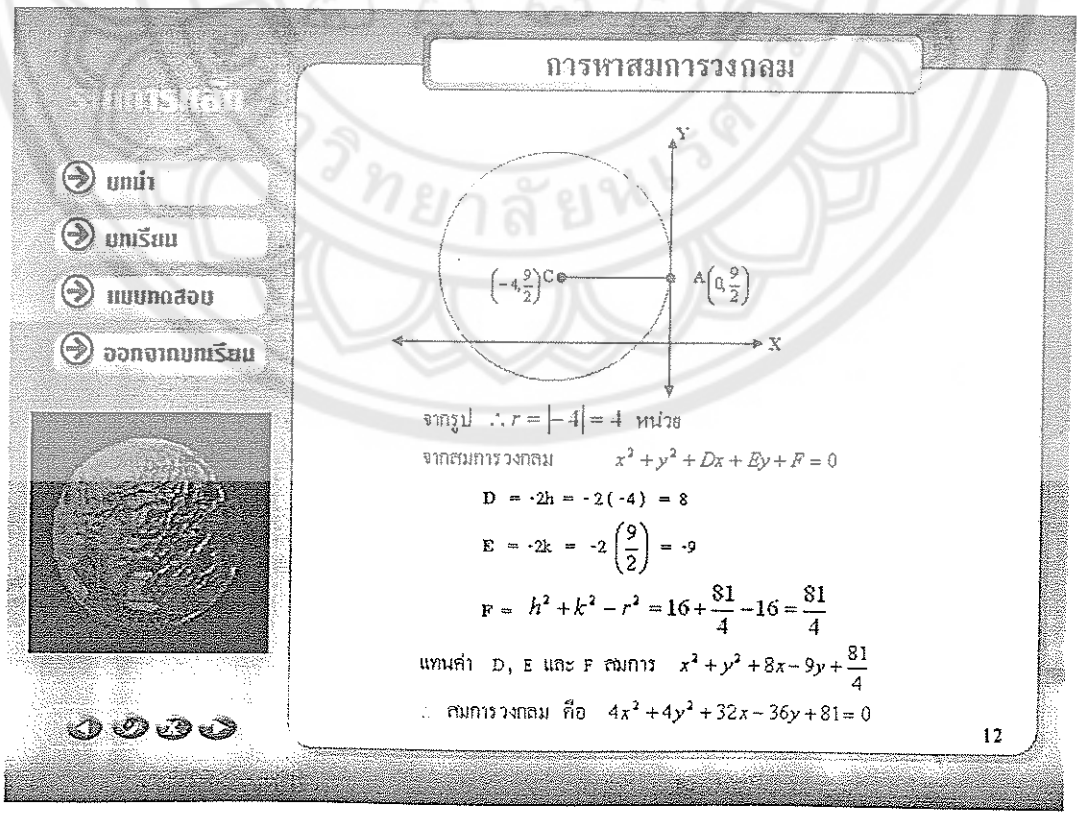
2) ถ้าสัมผัสแกน Y ที่จุด (0,k) รัศมี $r=|h|$ หน่วย

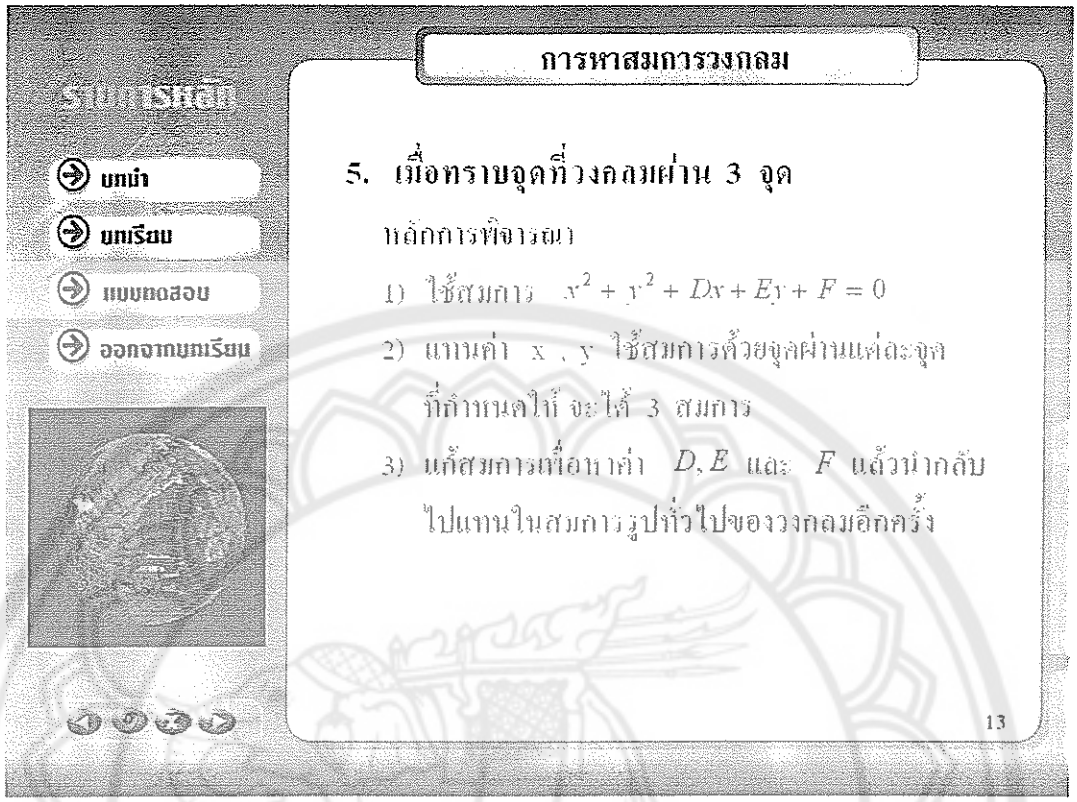
3) ใช้สมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

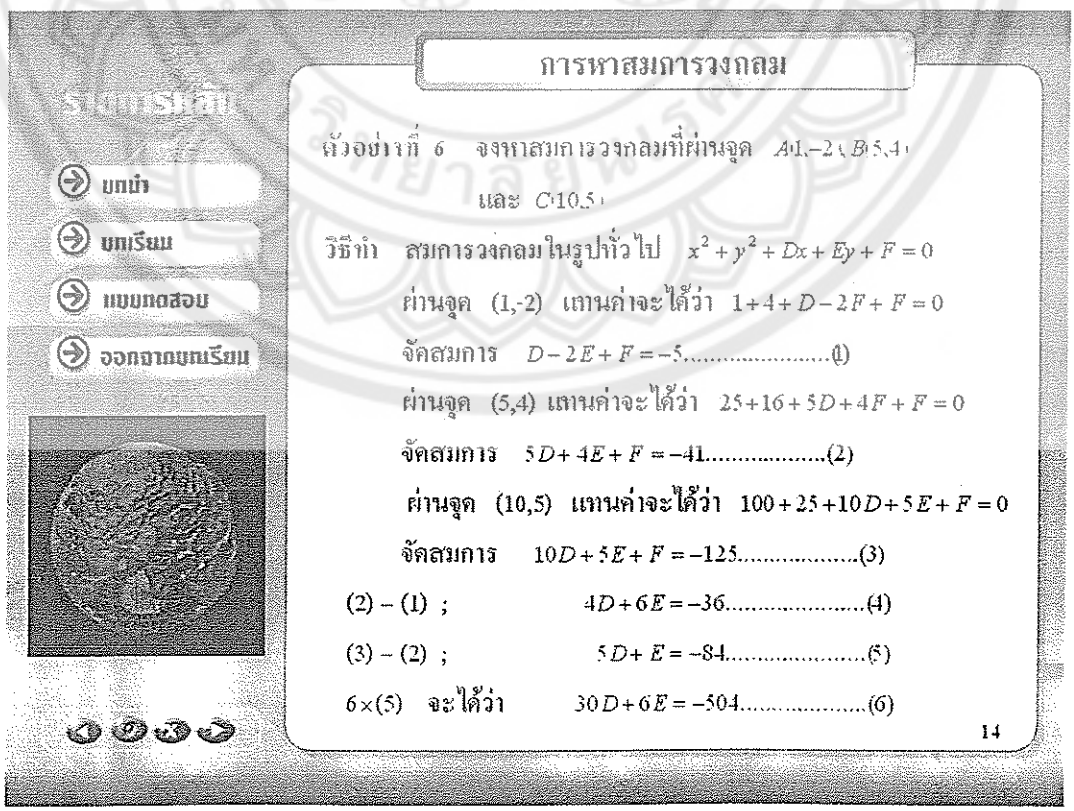
หรือ $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

10


การหาสมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ตัวอย่างที่ 5 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\left(-4,\frac{9}{2}\right)$ และสัมผัสแกน Y ที่จุด $\left(0,\frac{9}{2}\right)$
วิธีทำ
Y
$\left(-4,\frac{9}{2}\right)$C
A$\left(0,\frac{9}{2}\right)$
X
11


การหาสมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
Y
$\left(-4,\frac{9}{2}\right)$C
A$\left(0,\frac{9}{2}\right)$
X
จากรูป $\therefore r = |-4| = 4$ หน่วย
จากสมการวงกลม $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$
D = -2h = -2(-4) = 8
E = -2k = $-2\left(\frac{9}{2}\right)$ = -9
F = $h^2+k^2-r^2 = 16+\frac{81}{4}-16 = \frac{81}{4}$
แทนค่า D, E และ F สมการ $x^2+y^2+8x-9y+\frac{81}{4}$
∴ สมการวงกลม คือ $4x^2+4y^2+32x-36y+81=0$
12


การหาสมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
5. เมื่อทราบจุดที่วงกลมผ่าน 3 จุด
หลักการพิจารณา
1) ใช้สมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
2) แทนค่า x , y ใช้สมการด้วยจุดผ่านแต่ละจุด ที่กำหนดให้ จะได้ 3 สมการ
3) แก้สมการหาค่า D, E และ F แล้วนำกลับไปแทนในสมการรูปทั่วไปของวงกลมอีกครั้ง
13


การหาสมการวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ตัวอย่างที่ 6 จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $A(1,-2)$, $B(5,4)$ และ $C(10,5)$
วิธีทำ สมการวงกลมในรูปทั่วไป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
ผ่านจุด (1,-2) แทนค่าจะได้ว่า $1+4+D-2F+F=0$
จัดสมการ $D-2E+F=-5$.....(1)
ผ่านจุด (5,4) แทนค่าจะได้ว่า $25+16+5D+4F+F=0$
จัดสมการ $5D+4E+F=-41$.....(2)
ผ่านจุด (10,5) แทนค่าจะได้ว่า $100+25+10D+5E+F=0$
จัดสมการ $10D+5E+F=-125$.....(3)
(2) – (1) ; $4D+6E=-36$.....(4)
(3) – (2) ; $5D+E=-84$.....(5)
$6\times(5)$ จะได้ว่า $30D+6E=-504$.....(6)
14

การหาสมการวงกลม

ตัวอย่างที่ 6 (ต่อ)

(6) - (4) $\qquad 26D = -468$

$$D = \frac{-468}{26} = -18$$

แทนค่า D ใน (5)

$$(-90) + E = (-84)$$

$$E = (-84) + 90 = 6$$

แทนค่า D และ E ใน (1)

$$(-18) - 12 + F = (-5)$$

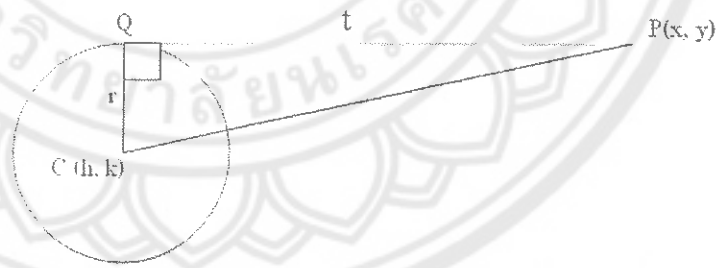
$$F = (-5) + 18 + 12 = 25$$

แทนค่า D, E และ F ในรูปสมการทั่วไป

$\therefore$ สมการวงกลมที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ทั้ง 3 จุด คือ

$$x^2 + y^2 - 18x + 6y + 25 = 0$$

การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม



กำหนดให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมลากจาก P ถึง Q

และ P(x, y) เป็นจุดภายนอกที่ลากมาสัมผัสวงกลม C(h, k)

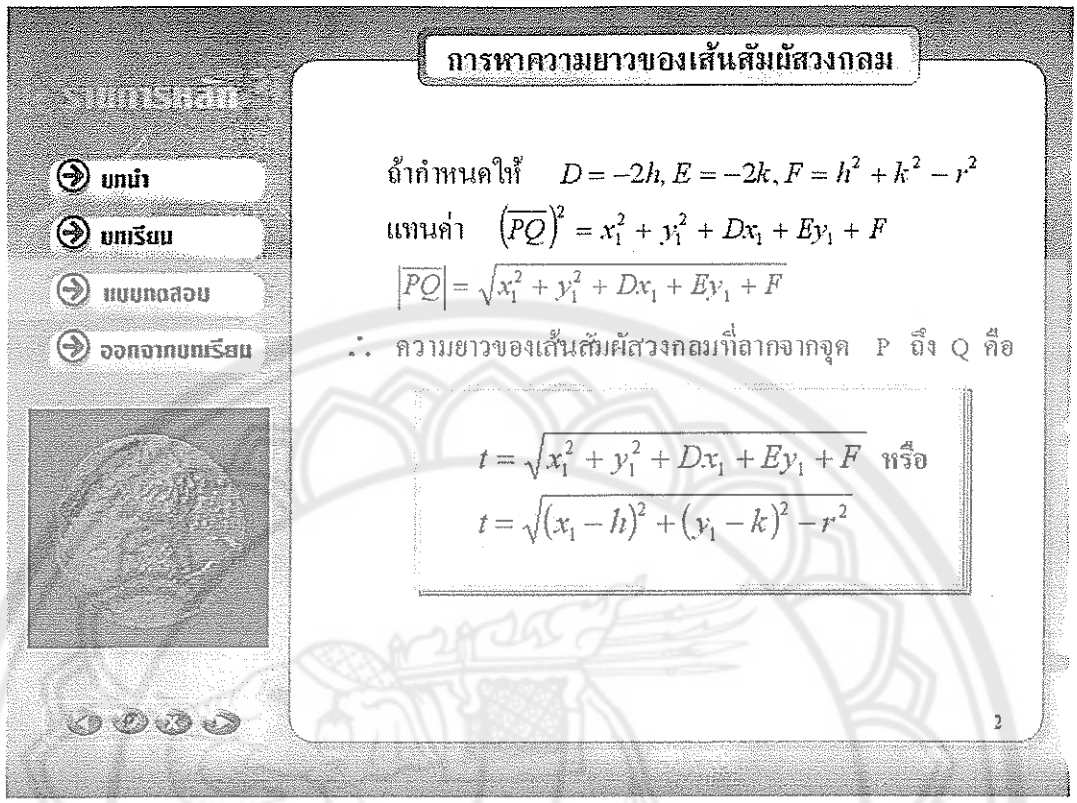
เป็น $(\overline{PQ})^2 = (\overline{PC})^2 - r^2$

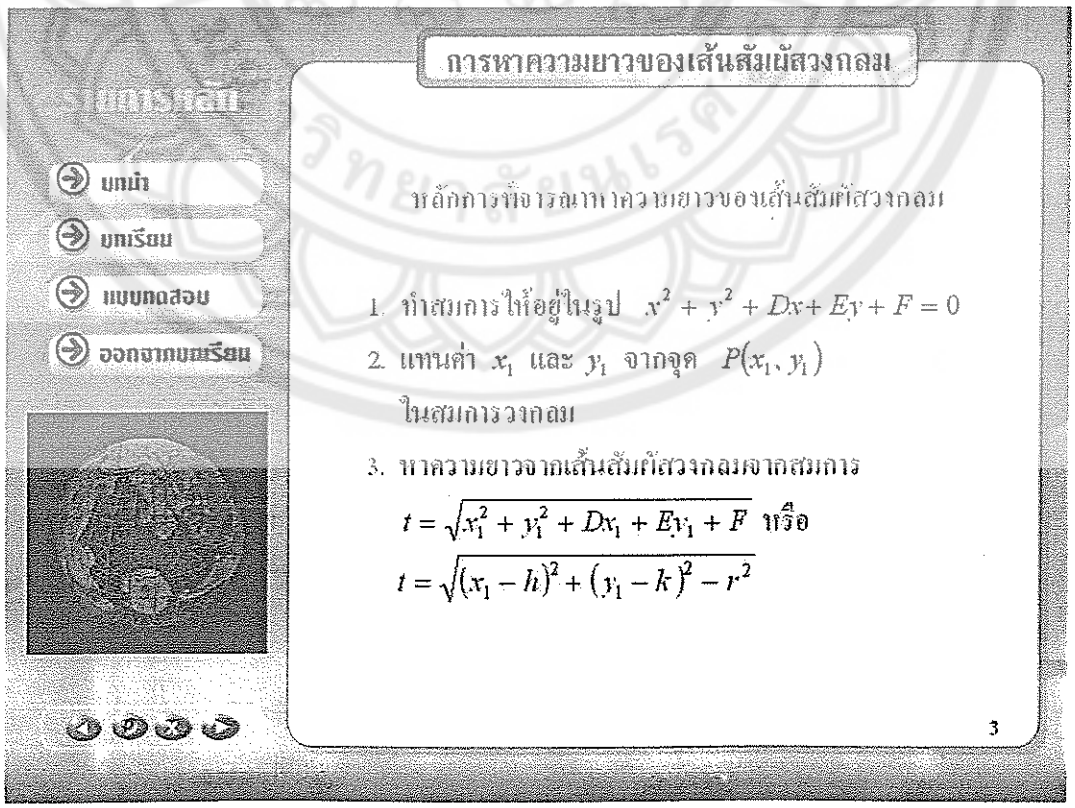
จุดศูนย์กลางในสามเหลี่ยมมุมฉาก PQC

$$(\overline{PQ})^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k) - r^2$$

$$(\overline{PQ})^2 = x_1^2 - 2hx_1 + h^2 + y_1^2 - 2ky_1 + k^2 - r^2$$

$$(\overline{PQ})^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2hx_1 - 2ky_1 + +h^2 + k^2 - r^2$$


การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ถ้ากำหนดให้ $D=-2h, E=-2k, F=h^2+k^2-r^2$
แทนค่า $\left(\overline{PQ}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F$
$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$
∴ ความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด P ถึง Q คือ
$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$ หรือ
$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$
2


การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
หลักการพิจารณาหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม
1. ทำสมการให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
2. แทนค่า x_1 และ y_1 จากจุด $P(x_1, y_1)$
ในสมการวงกลม
3. หาความยาวจากเส้นสัมผัสวงกลมจากสมการ
$t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$ หรือ
$t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$
3

การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด (5, 3) ไปสัมผัสวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น $(x-3)^2 = 13 - 4y - y^2$

วิธีทำ จัดสมการให้อยู่ในรูปทั่วไป $x^2 - 6x + 9 = 13 - 4y - y^2$

$\therefore\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$

ให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด (5, 3) ไปสัมผัสวงกลม

จากสูตร $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

แทนค่า $x_1 = 5, y_1 = 3, D = 6, E = 4$ และ $F = -4$

$$t = \sqrt{25 + 9 - 6(5) + 4(3) - 4}$$

$$t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

ดังนั้น ความยาวของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ $2\sqrt{3}$ หน่วย

การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด (6, 1) ไปสัมผัสวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น $(x-3)^2 = 13 - 4y - y^2$

วิธีทำ ให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด (6, 1) ไปสัมผัสวงกลม

จากสูตร $t = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$

แทนค่า $x_1 = 6, y_1 = 1, r = 9$ จะได้

$$t = \sqrt{(6-1)^2 + (1+2)^2 + 9}$$

$$t = \sqrt{25 + 9 - 9} = 5$$

ดังนั้น ความยาวของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ 5 หน่วย

การหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม

ตัวอย่างที่ 3 จงหาความยาวของเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด $(-5, 3)$ ไปสัมผัสวงกลม ซึ่งมีสมการเป็น

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

วิธีทำ ให้ t แทนความยาวของเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด $(-5, 3)$ ไปสัมผัสวงกลม

จากสูตร $t = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}$

แทนค่า $x_1 = -5, y_1 = 3, D = -6, E = 2, F = -15$

จะได้ $t = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 - 6(-5) + 2(3) - 15}$

$t = \sqrt{25 + 9 + 30 + 6 - 15}$

$t = \sqrt{55}$

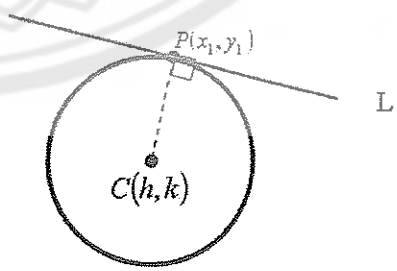
ดังนั้น ความยาวของเส้นสัมผัสมีค่าเท่ากับ $\sqrt{55}$ หน่วย

6

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม

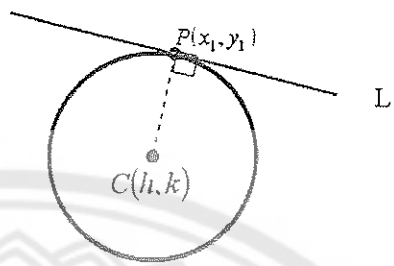
1. กรณีที่ทราบจุดศูนย์กลางของวงกลม และจุดสัมผัสวงกลม

ให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $C(h,k)$ และจุดสัมผัสคือ $P(x_1, y_1)$ และ L เป็นเส้นตรงซึ่งสัมผัสวงกลมที่จุด P โดยที่ L ไม่ขนานกับแกน Y



1

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม



วิธีการหาสมการของเส้นตรง L มีดังนี้

1) หาความชันของ $CP = m = \frac{y_1 - k}{x_1 - h}$

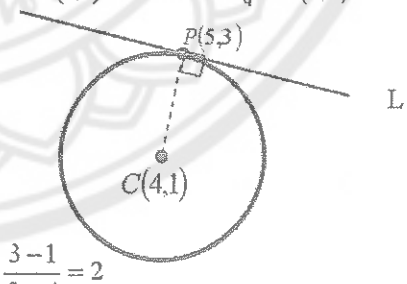
2) หาความชันของ $L = -\frac{1}{m}$

3) จะได้สมการของ L ดังนี้ $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสมการของเส้นตรง L ซึ่งสัมผัสกับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $C(4,1)$ โดยสัมผัสที่จุด $P(5,3)$

วิธีทำ



ความชันของ $CP = \frac{3-1}{5-4} = 2$

ความชันของ $L = -\frac{1}{2}$

สมการของ L คือ $y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 5)$

$2y - 6 = -x + 5$

$x + 2y - 11 = 0$

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม

2. กรณีที่ทราบจุดสัมผัสวงกลม และสมการของวงกลม

การหาสมการของเส้นสัมผัสสามารถหาได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 หาจุดศูนย์กลางของวงกลม จากสมการของวงกลม แล้วคำนวณการหาสมการของเส้นสัมผัสด้วยวิธีการที่กล่าวไปแล้วในตัวอย่างที่ 1

วิธีที่ 2 หาสมการของเส้นสัมผัสจากสมการของวงกลม สมมติให้สมการของวงกลม คือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ และ $P(x_1,y_1)$ เป็นจุดสัมผัส และ L เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P สมการของ L คือ $(x_1-h)(x-h)+(y_1-k)(y-k)=r^2$

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม

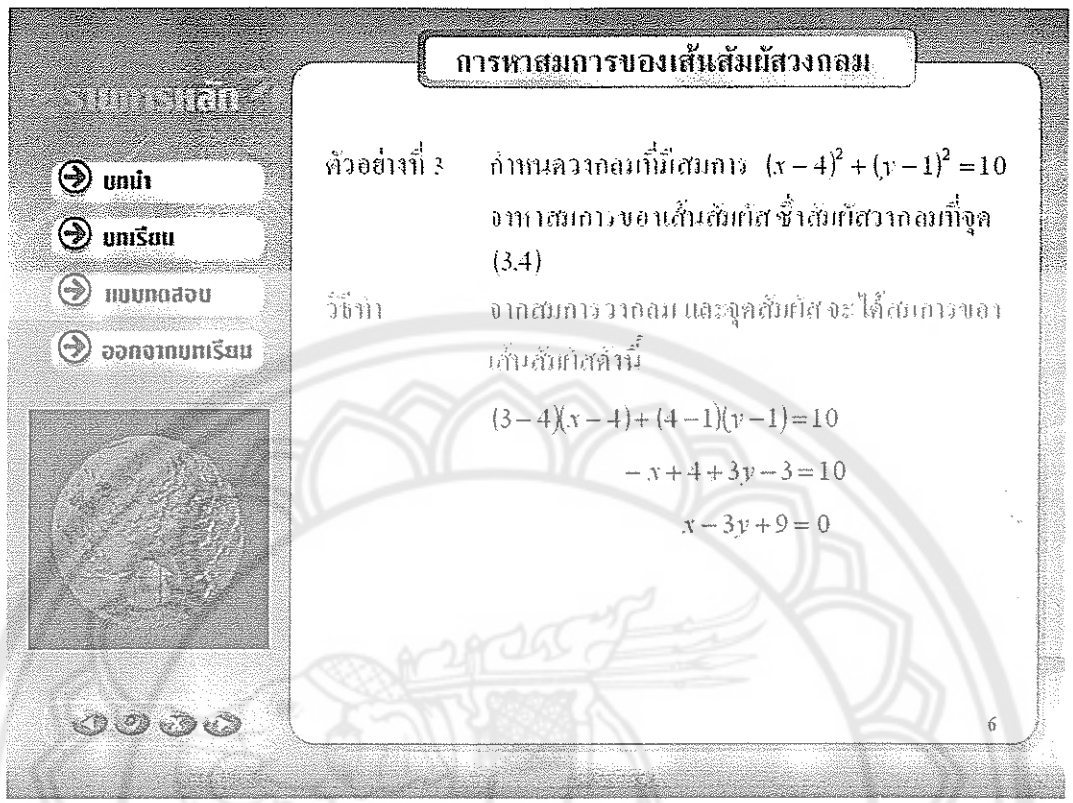
ตัวอย่างที่ 2 กำหนดวงกลมที่มีสมการ $x^2+y^2=100$ จงหาสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสวงกลมที่จุด $(6,-8)$

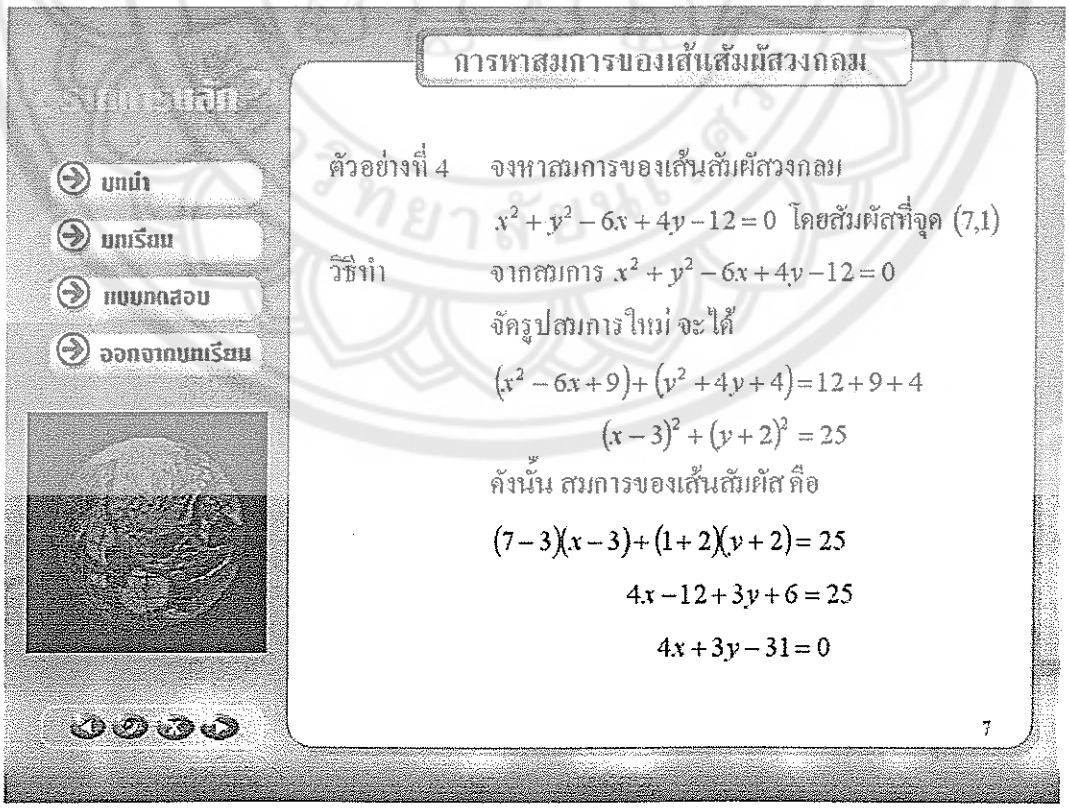
วิธีทำ ในที่นี้จะหาสมการเส้นสัมผัส โดยใช้วิธีที่ 2 ดังนี้

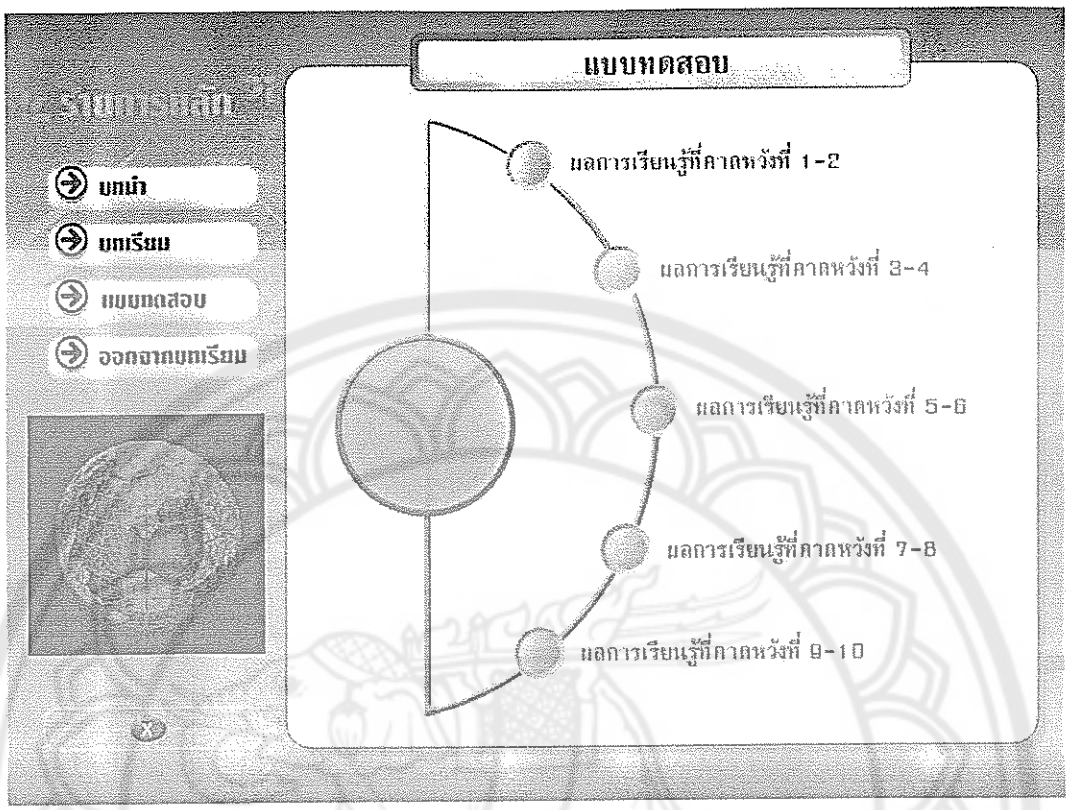
จากสมการ $x^2+y^2=100$ และจุดสัมผัส $(6,-8)$ จะได้สมการของเส้นสัมผัสดังนี้

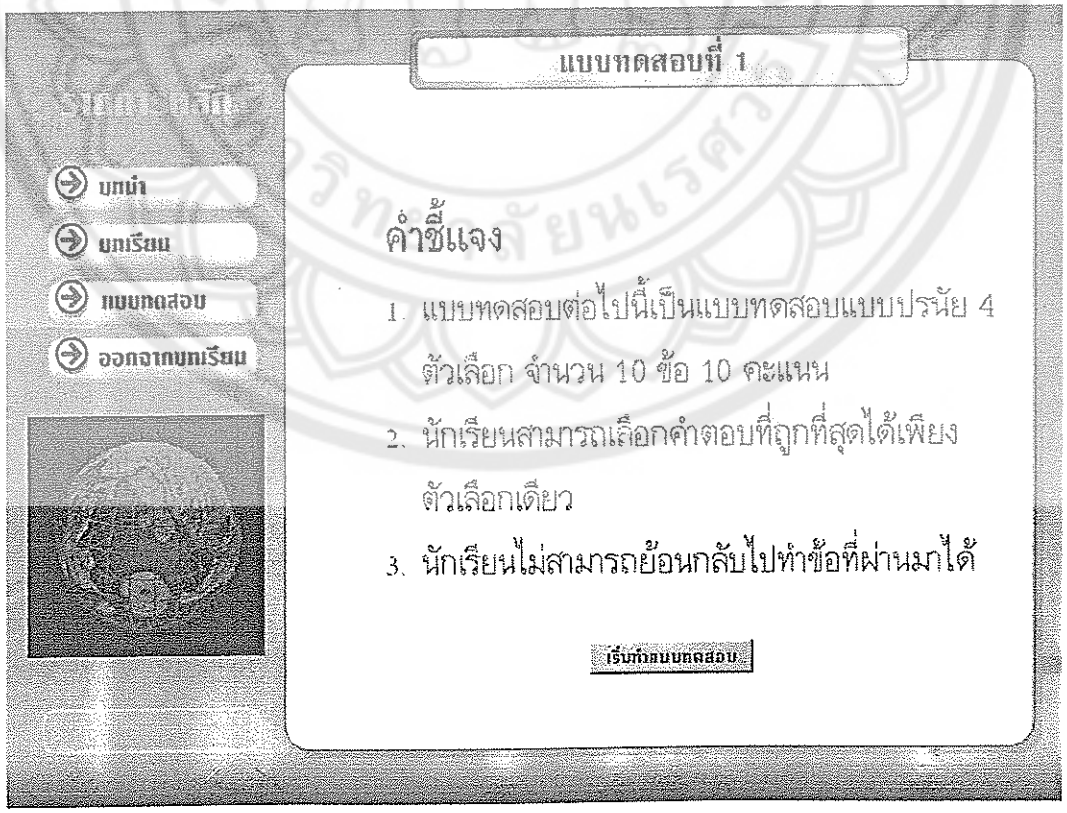
$$6x+(-8)y=100$$

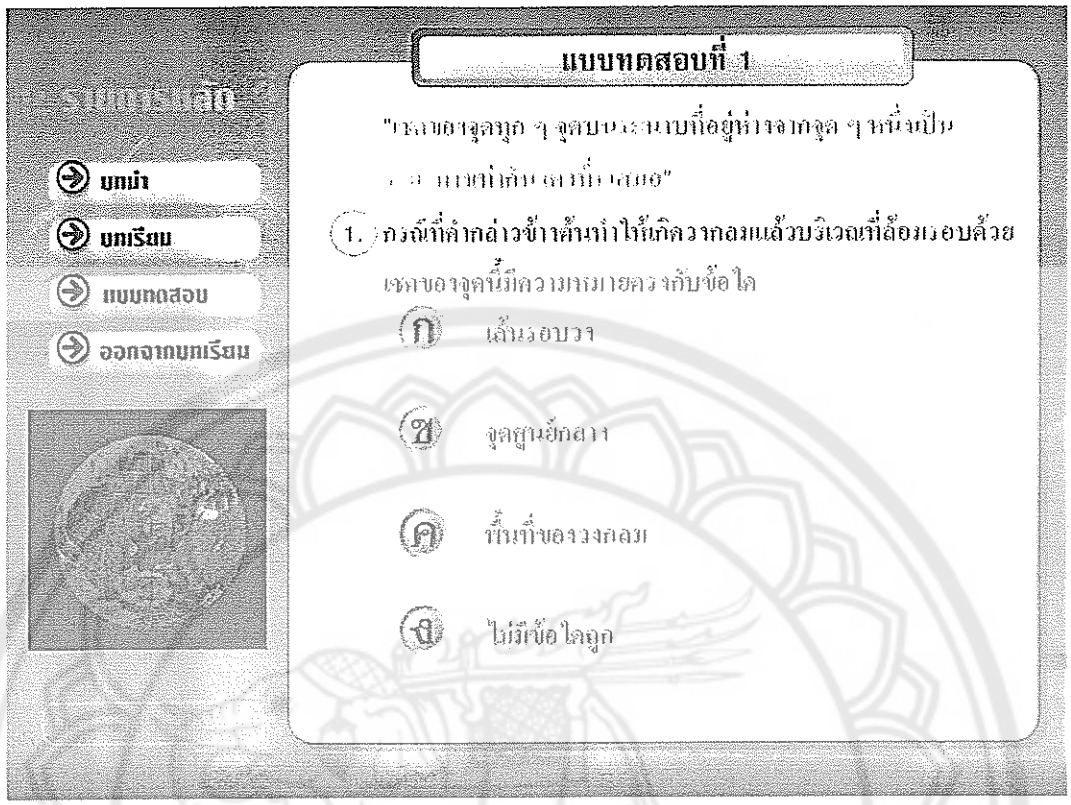
หรือ $$6x-8y=100$$

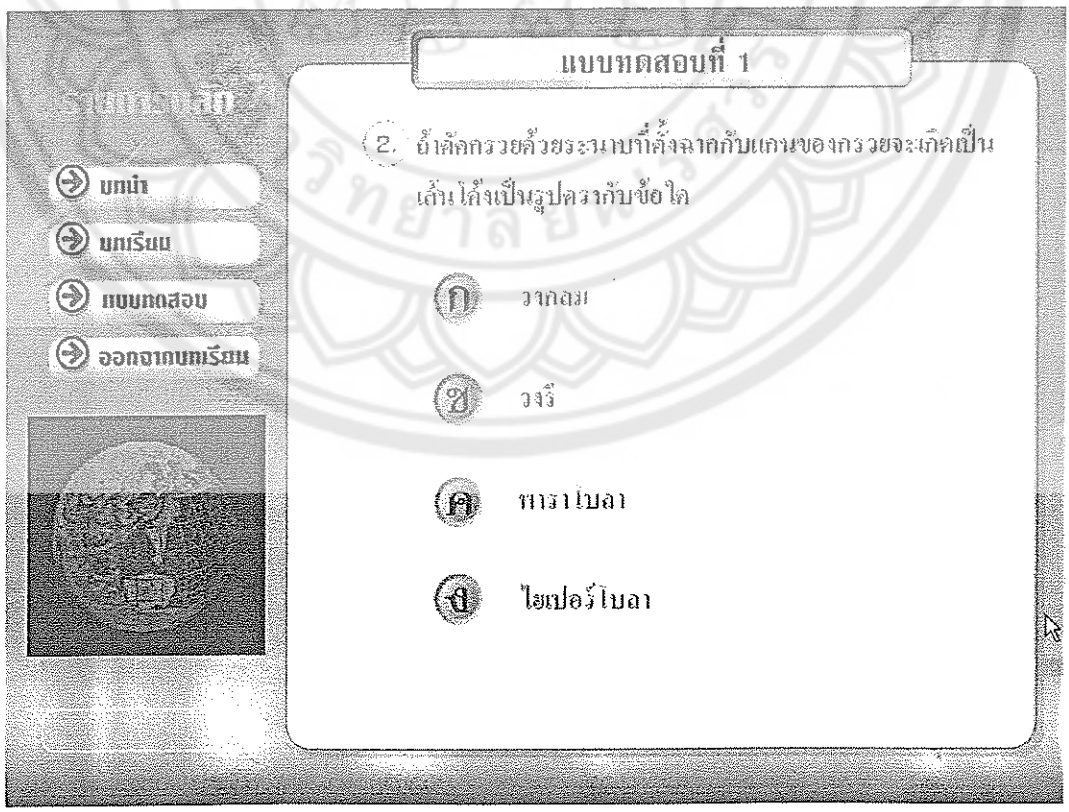

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ตัวอย่างที่ 3 กำหนดวงกลมที่มีสมการ $(x-4)^2+(y-1)^2=10$ จงหาสมการของเส้นสัมผัส ซึ่งสัมผัสวงกลมที่จุด (3,4)
วิธีทำ จากสมการวงกลม และจุดสัมผัส จะได้สมการของเส้นสัมผัสดังนี้
$(3-4)(x-4)+(4-1)(y-1)=10$
$-x+4+3y-3=10$
$x-3y+9=0$
6

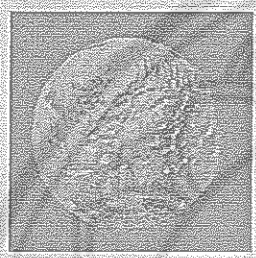

การหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ตัวอย่างที่ 4 จงหาสมการของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ โดยสัมผัสที่จุด (7,1)
วิธีทำ จากสมการ $x^2+y^2-6x+4y-12=0$
จัดรูปสมการใหม่ จะได้
$(x^2-6x+9)+(y^2+4y+4)=12+9+4$
$(x-3)^2+(y+2)^2=25$
ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัส คือ
$(7-3)(x-3)+(1+2)(y+2)=25$
$4x-12+3y+6=25$
$4x+3y-31=0$
7


แบบทดสอบ
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 1-2
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 3-4
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 5-6
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 7-8
ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่ 9-10


แบบทดสอบที่ 1
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คำชี้แจง
1. แบบทดสอบต่อไปนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ 10 คะแนน
2. นักเรียนสามารถเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดได้เพียงตัวเลือกเดียว
3. นักเรียนไม่สามารถย้อนกลับไปทำข้อที่ผ่านมาได้
เริ่มทำแบบทดสอบ

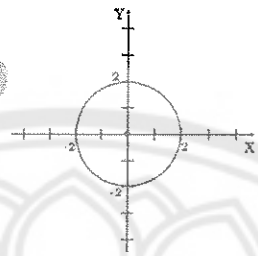

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
1. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วบริเวณที่ล้อมรอบล้วย
ก เส้นรอบวง
ข จุดศูนย์กลาง
ค พื้นที่ของวงกลม
ง ไม่มีข้อใดถูก

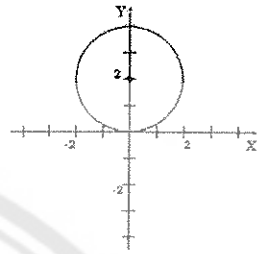

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
2. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวยจะเกิดเป็น
เส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
ก วงกลม
ข วงรี
ค พาราโบลา
ง ไฮเปอร์โบลา

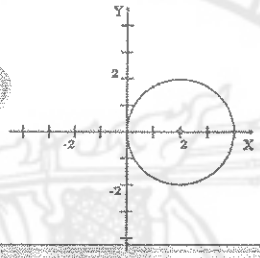


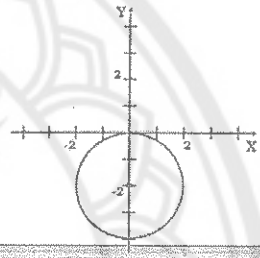
แบบทดสอบที่ 1

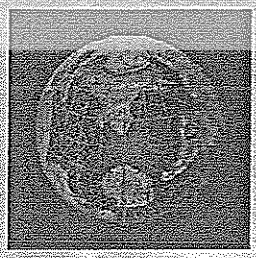
3. จากกราฟวงกลมรัศมี 2 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (0,2) จะได้กราฟตรงกับข้อใด

ก 

ข 

ค 

ง 



แบบทดสอบที่ 1

"เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน (ควรที่) เสมอ"

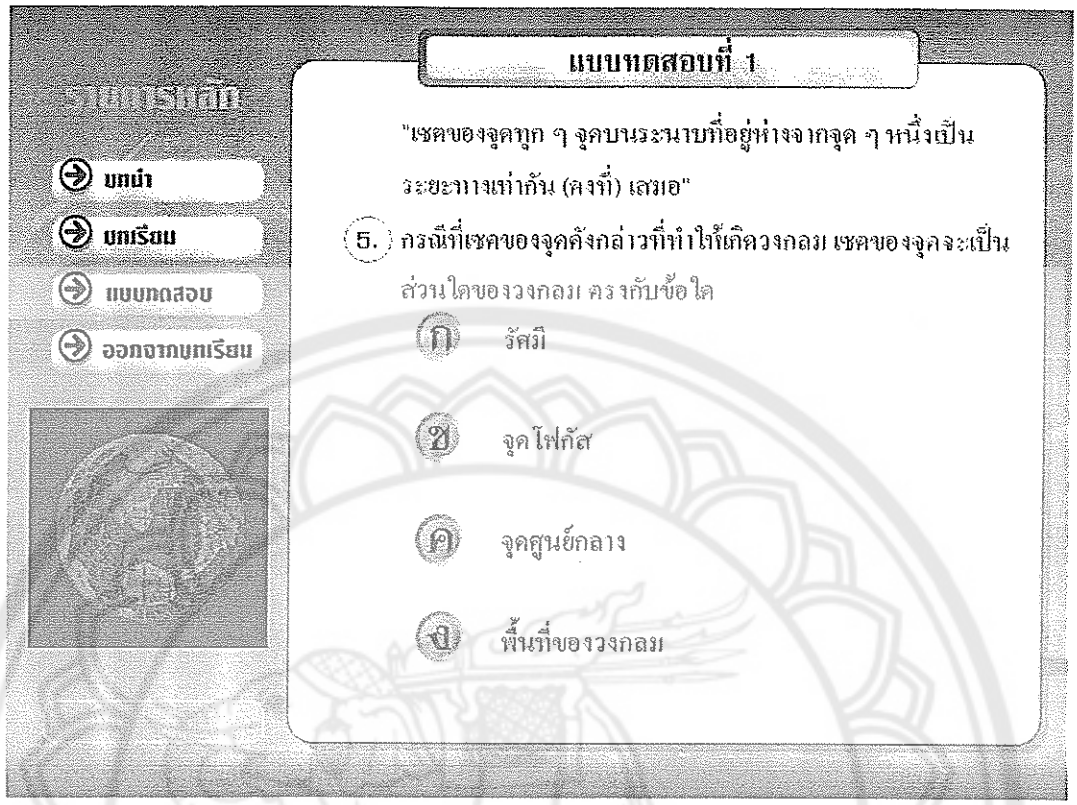
4. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วระยะทางที่คงที่มีความหมายตรงกับข้อใด

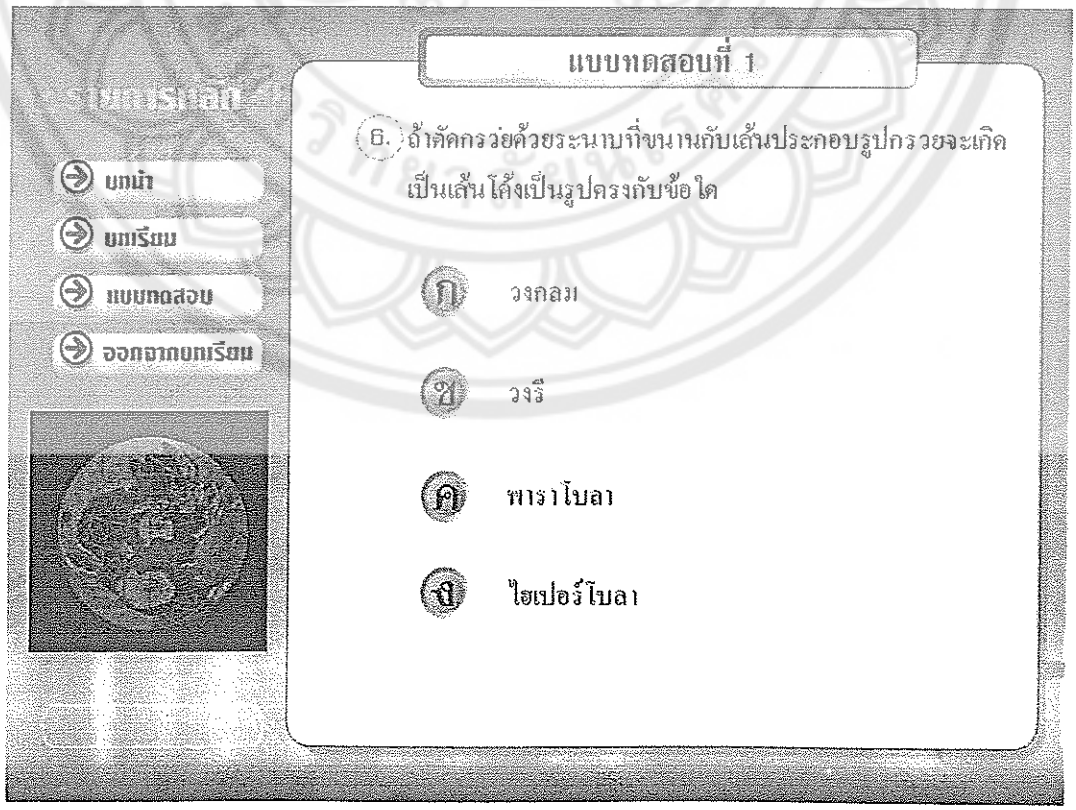
ก รัศมี

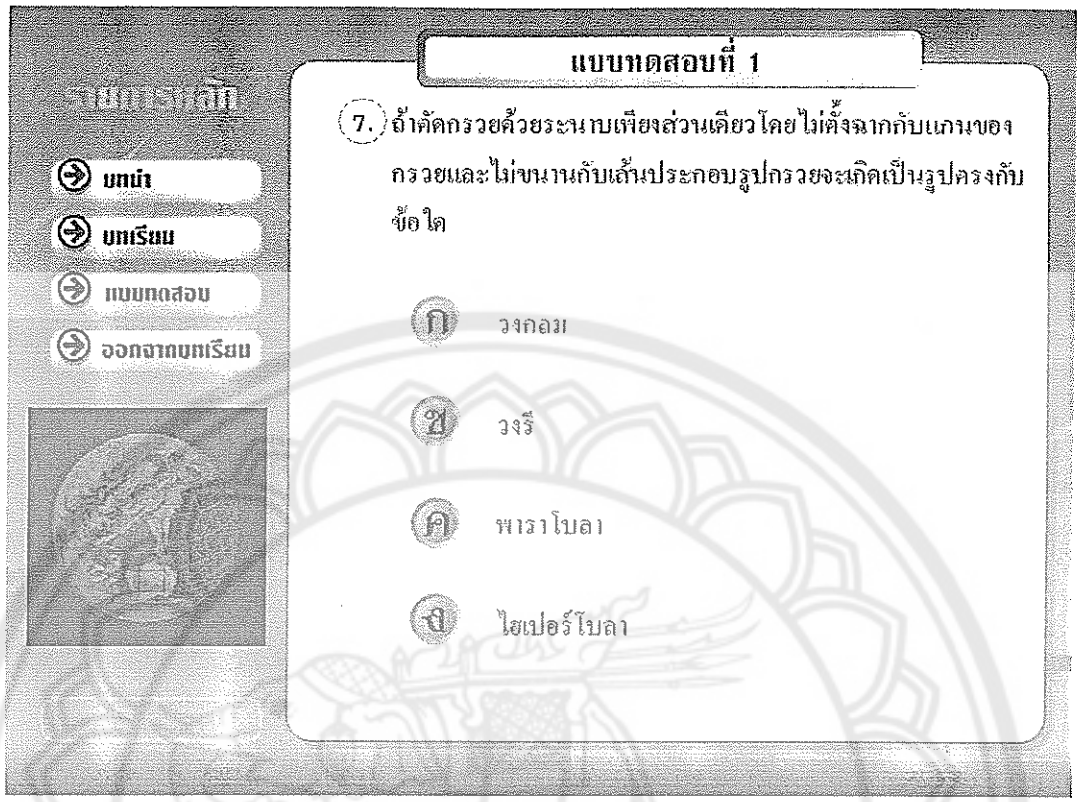
ข จุดโฟกัส

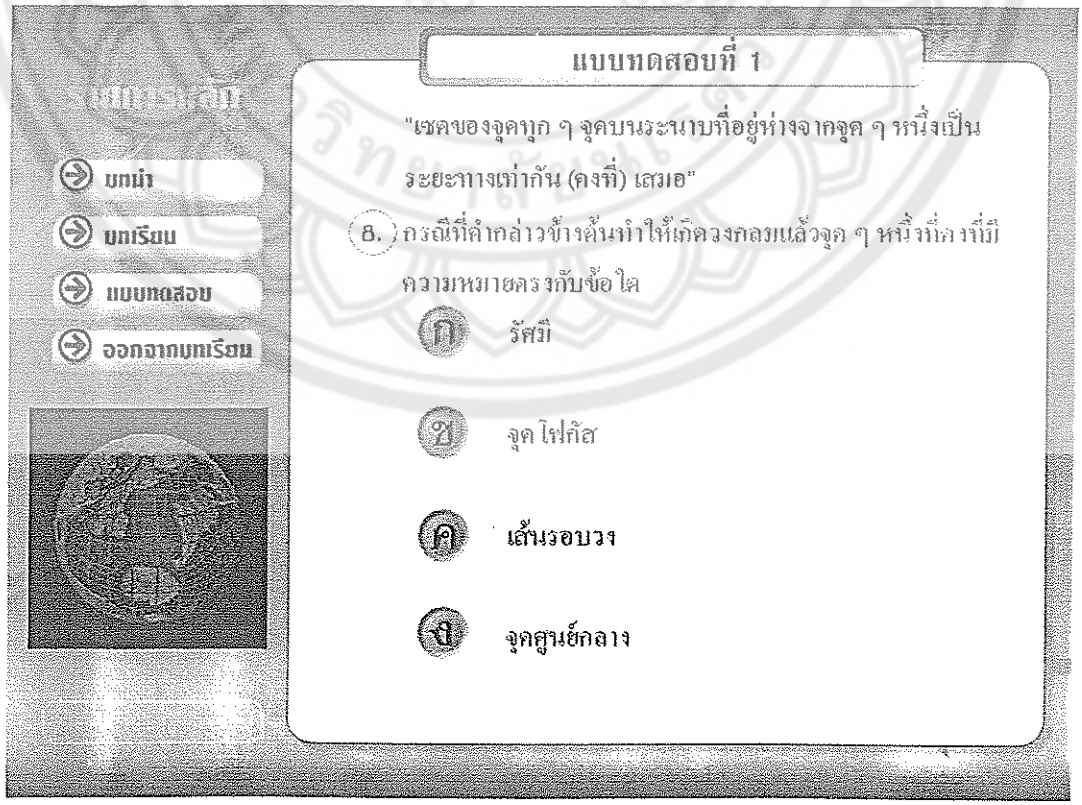
ค เส้นรอบวง

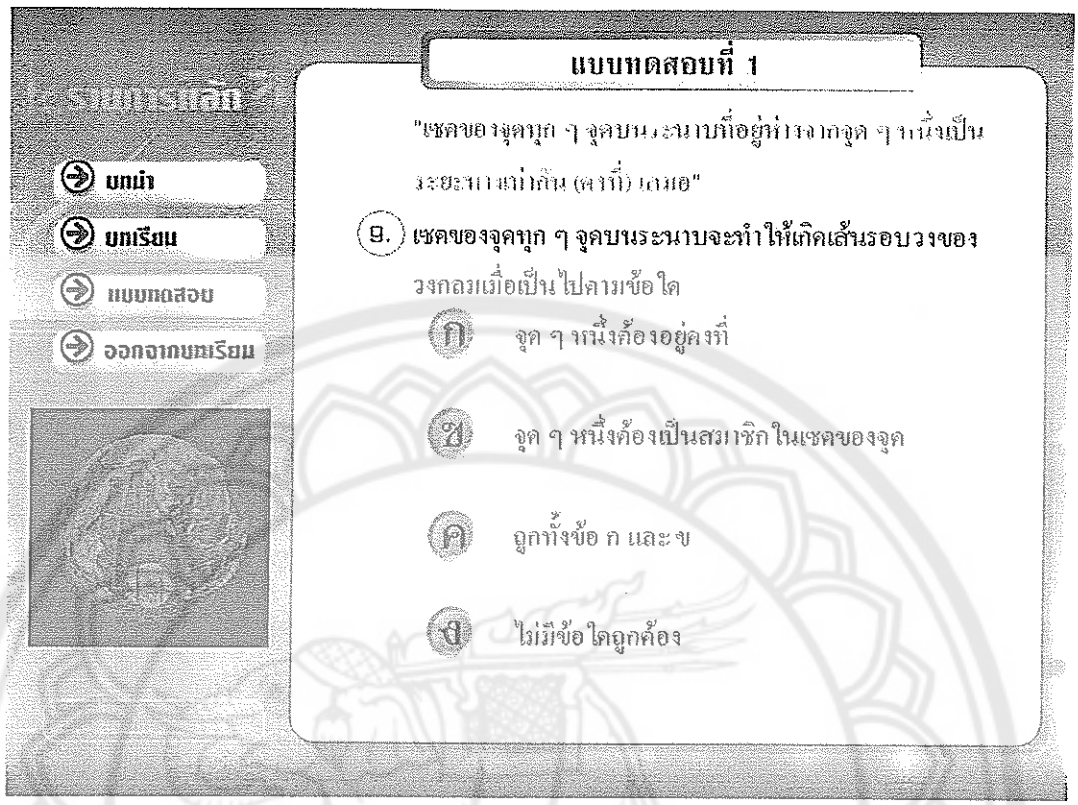
ง จุดศูนย์กลาง

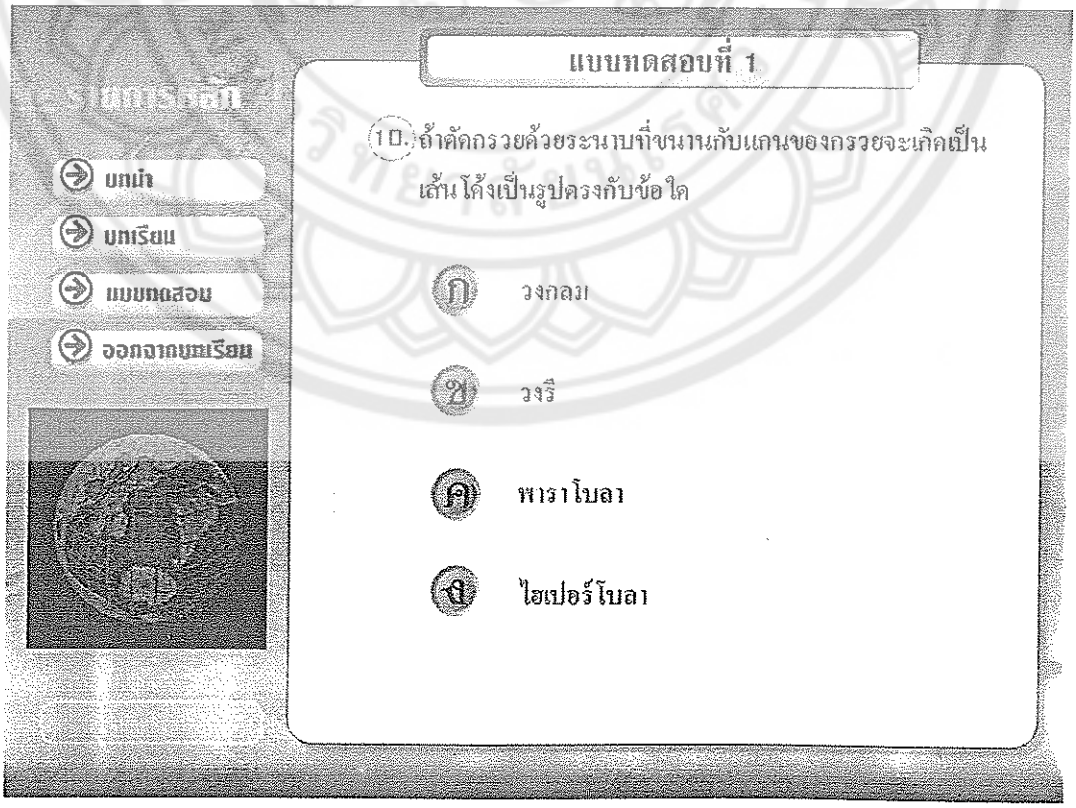

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
"เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน (คงที่) เสมอ"
5. กรณีที่เซตของจุดดังกล่าวที่ทำให้เกิดวงกลม เซตของจุดจะเป็นส่วนใดของวงกลม ตรงกับข้อใด
ก รัศมี
ข จุดโฟกัส
ค จุดศูนย์กลาง
ง พื้นที่ของวงกลม


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
6. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยจะเกิดเป็นเส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
ก วงกลม
ข วงรี
ค พาราโบลา
ง ไฮเปอร์โบลา


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
7. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบเพียงส่วนเดียวโดยไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยและไม่ขนานกับเส้นประกอบรูปกรวยจะเกิดเป็นรูปตรงกับข้อใด
ก วงกลม
ข วงรี
ค พาราโบลา
ง ไฮเปอร์โบลา

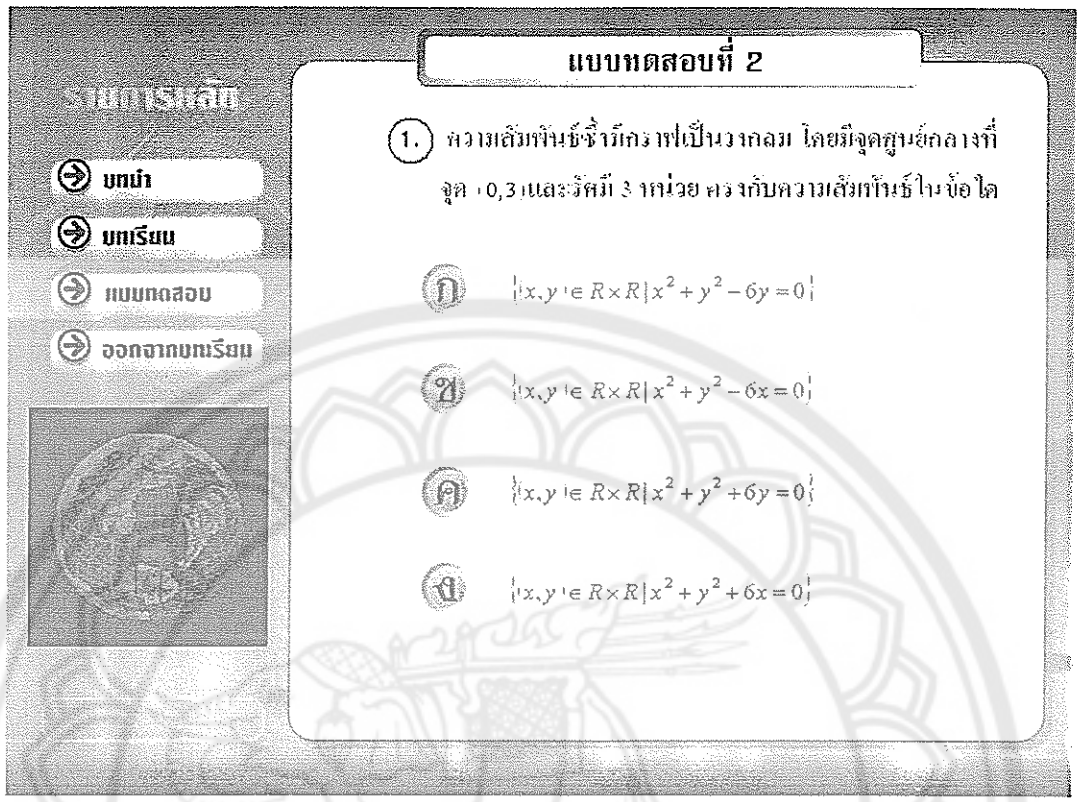

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
"เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน (คงที่) เสมอ"
8. กรณีที่คำกล่าวข้างต้นทำให้เกิดวงกลมแล้วจุด ๆ หนึ่งที่คงที่มีความหมายตรงกับข้อใด
ก รัศมี
ข จุดโฟกัส
ค เส้นรอบวง
ง จุดศูนย์กลาง

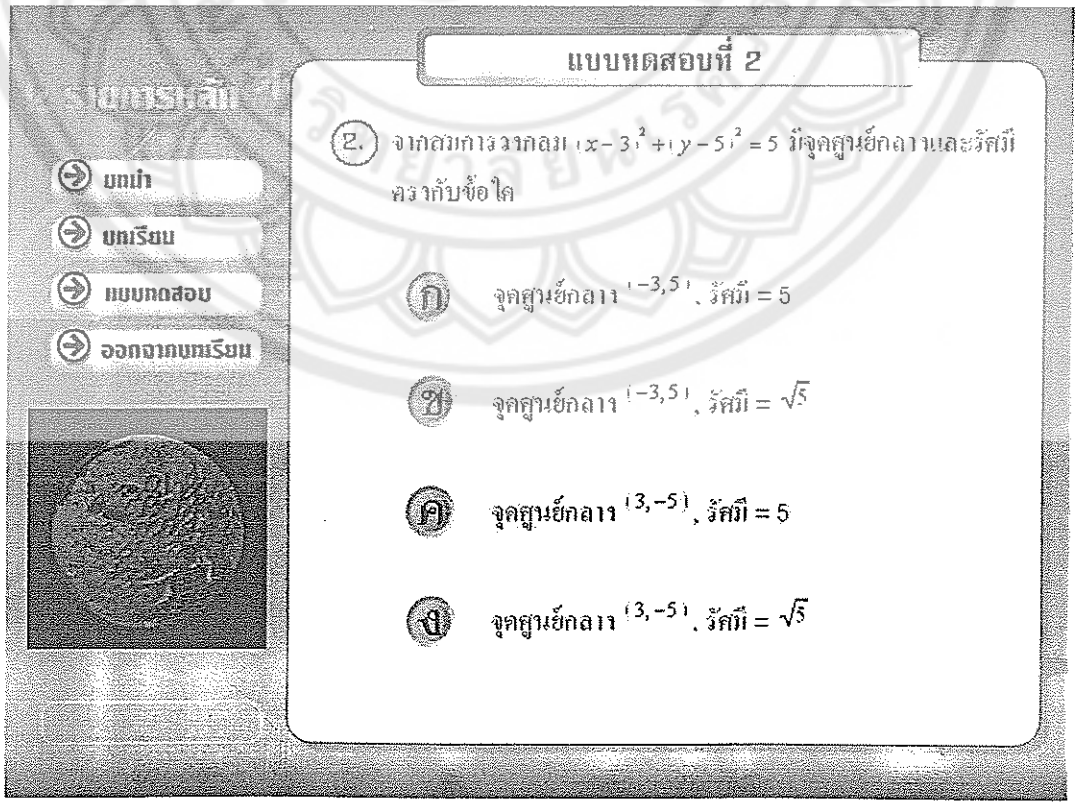

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
"เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน (คงที่) เสมอ"
9. เซตของจุดทุก ๆ จุดบนระนาบจะทำให้เกิดเส้นรอบวงของวงกลมเมื่อเป็นไปตามข้อใด
ก จุด ๆ หนึ่งต้องอยู่คงที่
ข จุด ๆ หนึ่งต้องเป็นสมาชิกในเซตของจุด
ค ถูกทั้งข้อ ก และ ข
ง ไม่มีข้อใดถูกต้อง

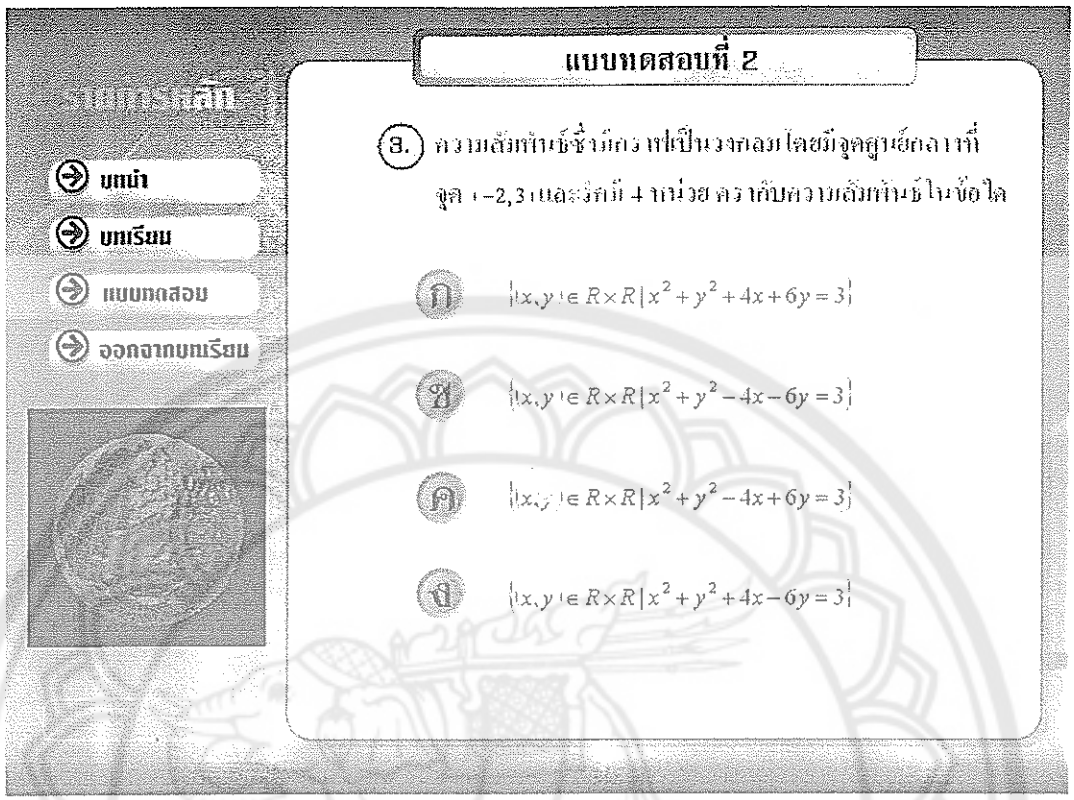

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 1
10. ถ้าตัดกรวยด้วยระนาบที่ขนานกับแกนของกรวยจะเกิดเป็นเส้นโค้งเป็นรูปตรงกับข้อใด
ก วงกลม
ข วงรี
ค พาราโบลา
ง ไฮเปอร์โบลา

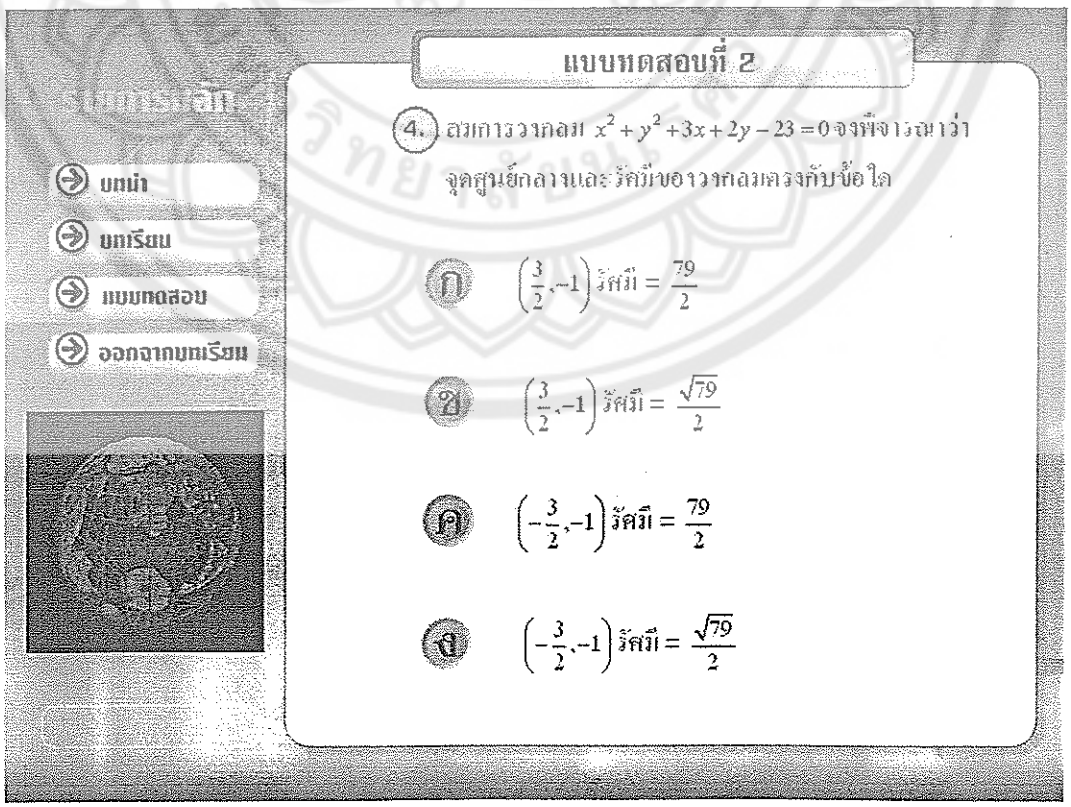
แบบทดสอบที่ 1
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คุณสอบได้ 1 คะแนน
คุณยังสอบไม่ผ่าน กลับไปทบทวนใหม่
แล้วมาสอบอีกครั้งนะครับ

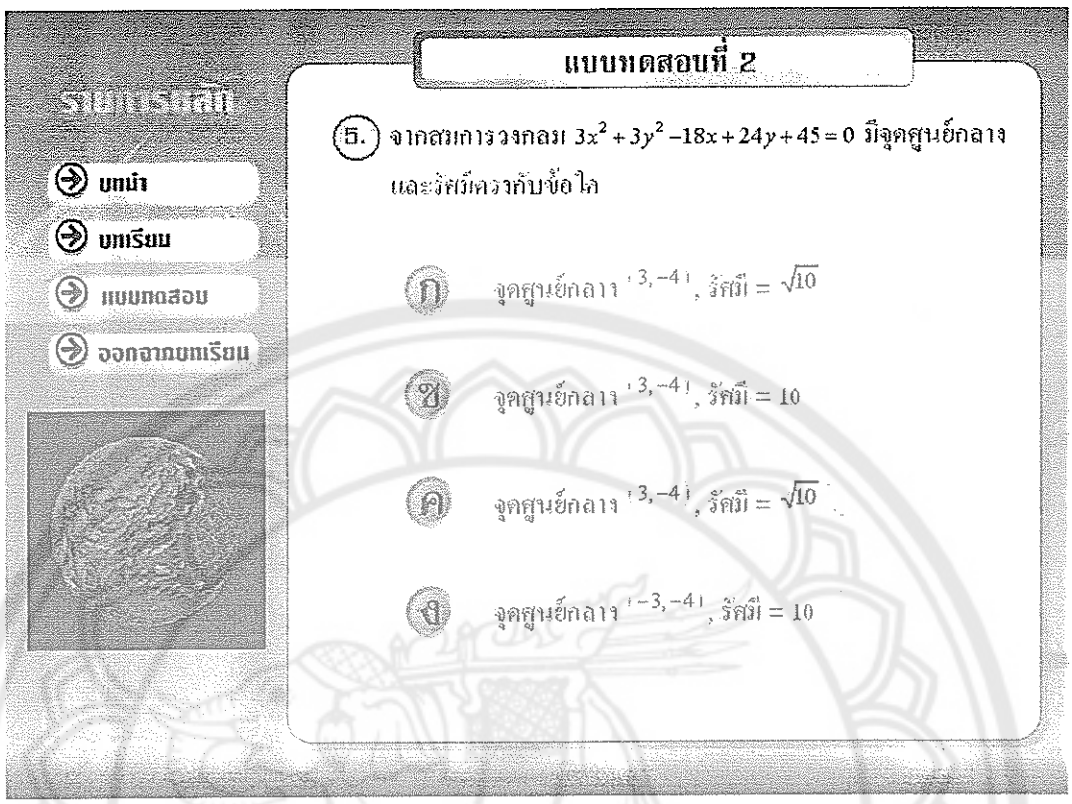
แบบทดสอบที่ 2
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คำชี้แจง
1. แบบทดสอบต่อไปนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ 10 คะแนน
2. นักเรียนสามารถเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดได้เพียงตัวเลือกเดียว
3. นักเรียนไม่สามารถย้อนกลับไปทำข้อที่ผ่านมาได้
เริ่มทำแบบทดสอบ

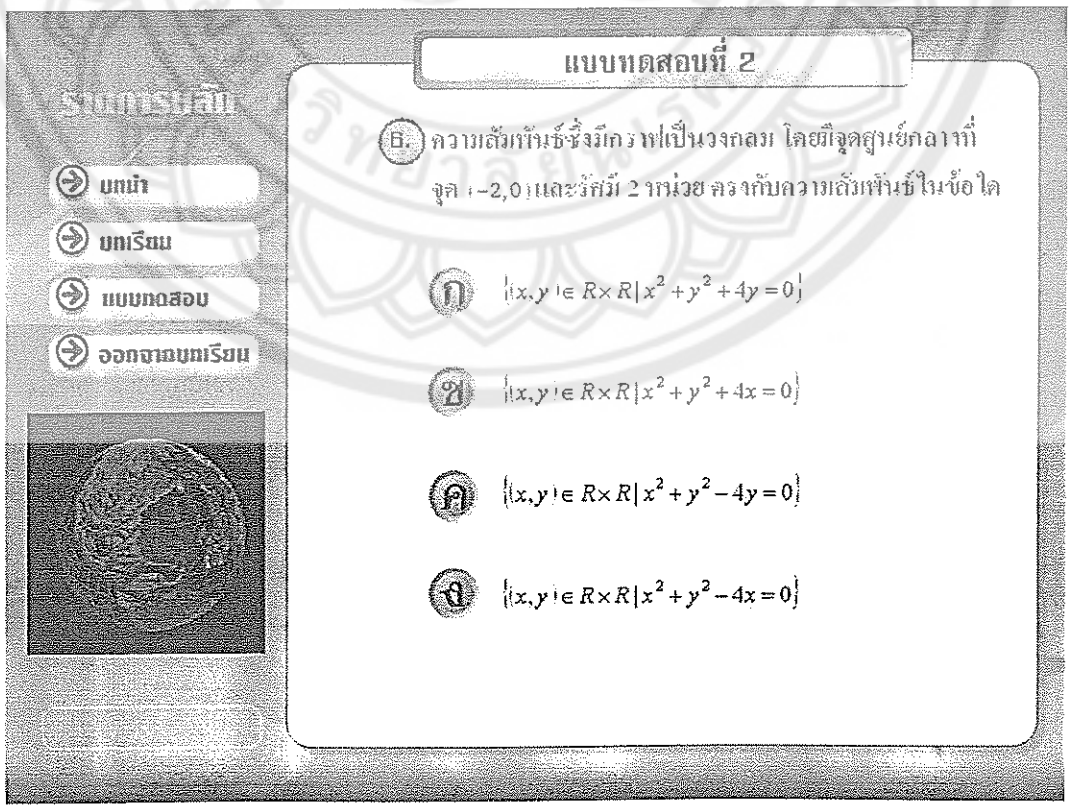

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (0,3) และรัศมี 3 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6y=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6y=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x=0\}$

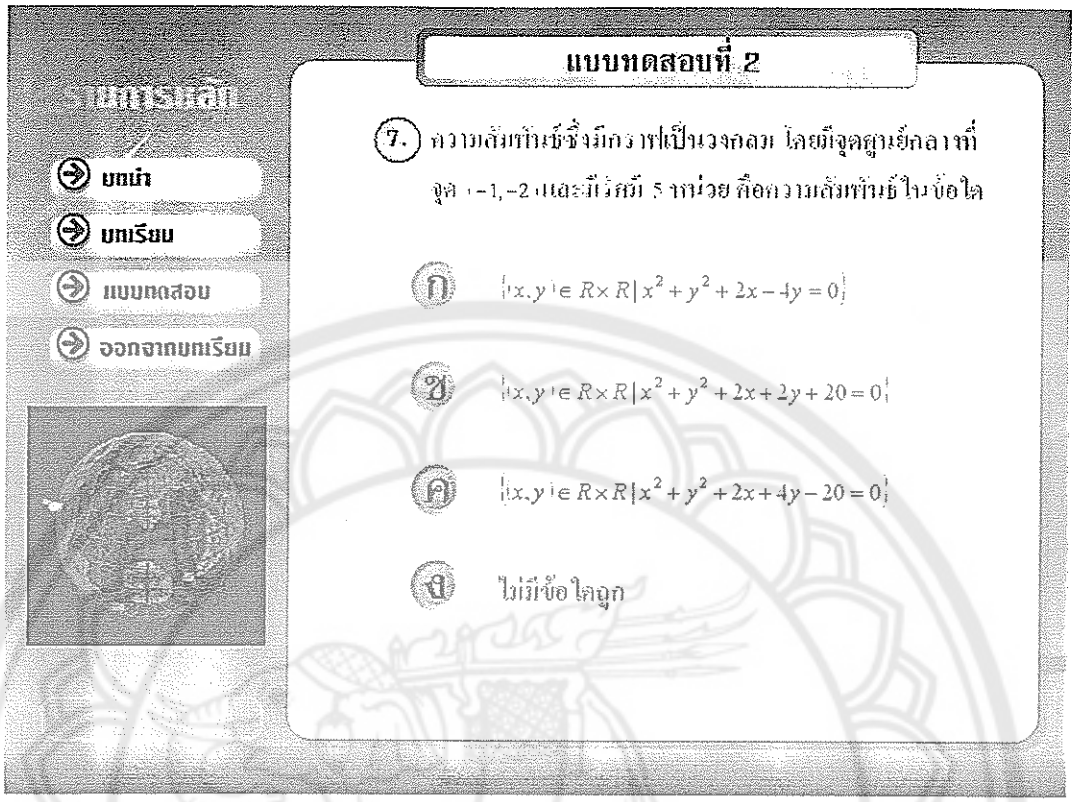

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
2. จากสมการวงกลม $(x-3)^2+(y-5)^2=5$ มีจุดศูนย์กลางและรัศมีตรงกับข้อใด
ก จุดศูนย์กลาง $(-3,5)$, รัศมี $=5$
ข จุดศูนย์กลาง $(-3,5)$, รัศมี $=\sqrt{5}$
ค จุดศูนย์กลาง $(3,-5)$, รัศมี $=5$
ง จุดศูนย์กลาง $(3,-5)$, รัศมี $=\sqrt{5}$

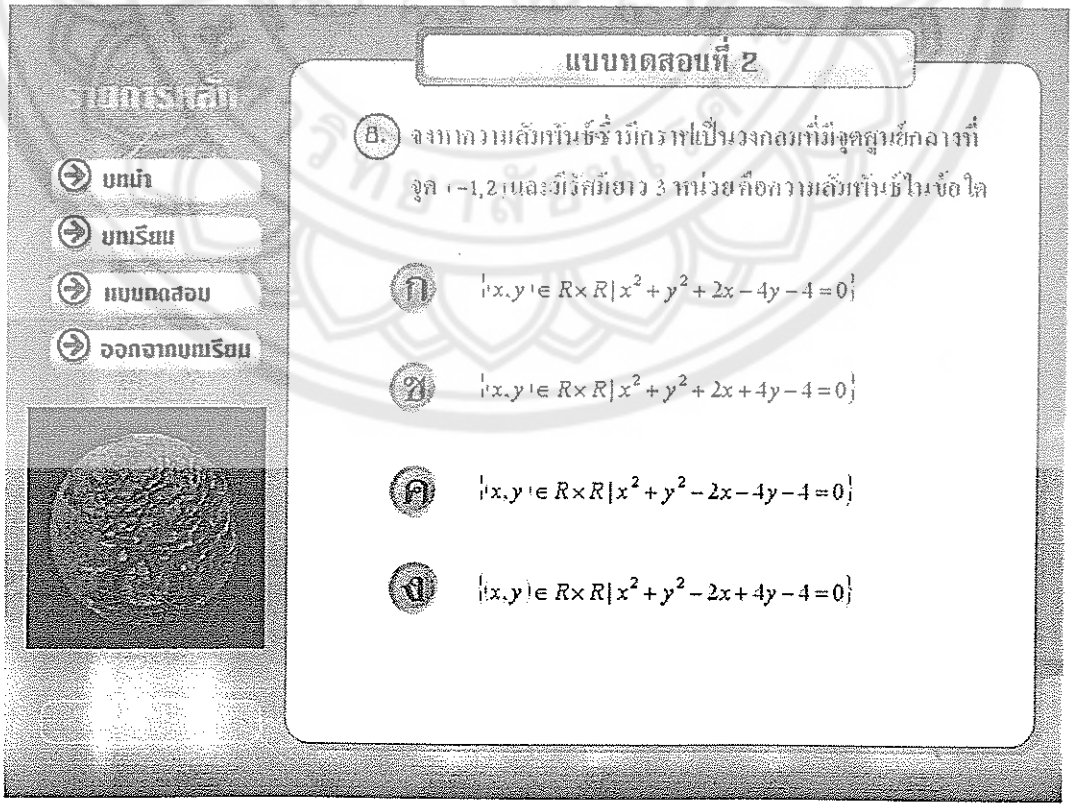

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (−2,3) และรัศมี 4 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4x+6y=3\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4x-6y=3\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4x+6y=3\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4x-6y=3\}$

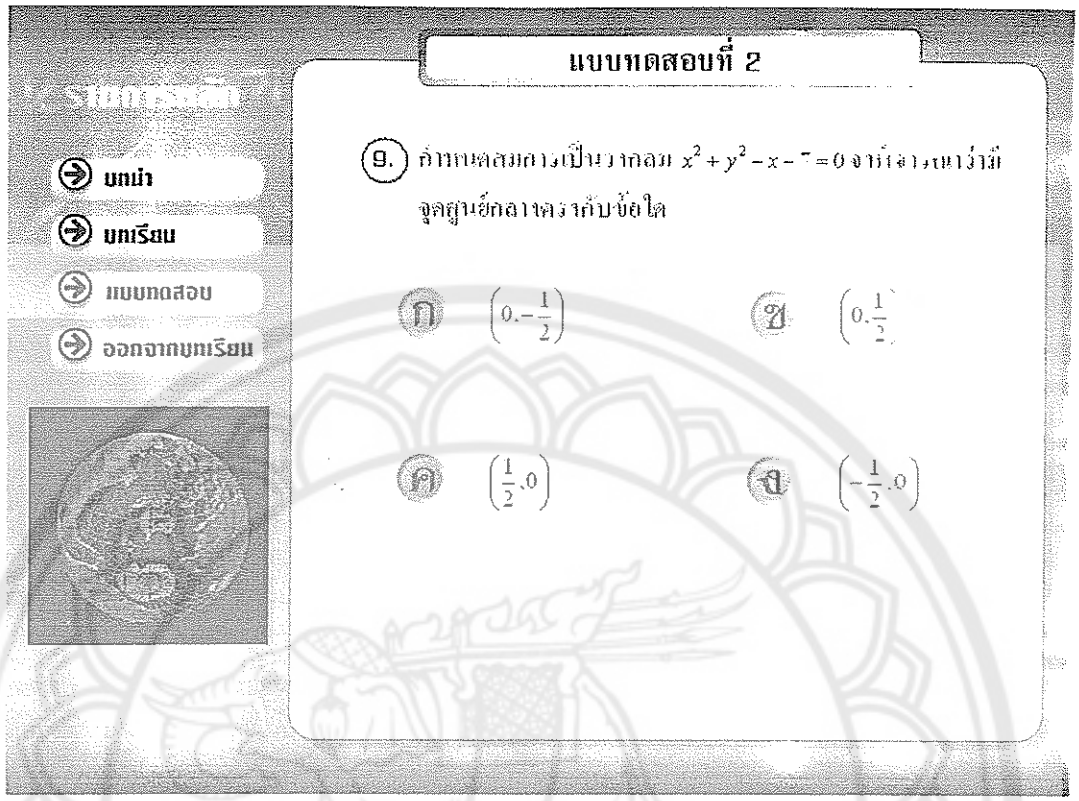

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
4. สมการวงกลม $x^2+y^2+3x+2y-23=0$ จงพิจารณาว่าจุดศูนย์กลางและรัศมียาวของวงกลมตรงกับข้อใด
ก $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{79}{2}$
ข $\left(\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{\sqrt{79}}{2}$
ค $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{79}{2}$
ง $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ รัศมี $=\frac{\sqrt{79}}{2}$

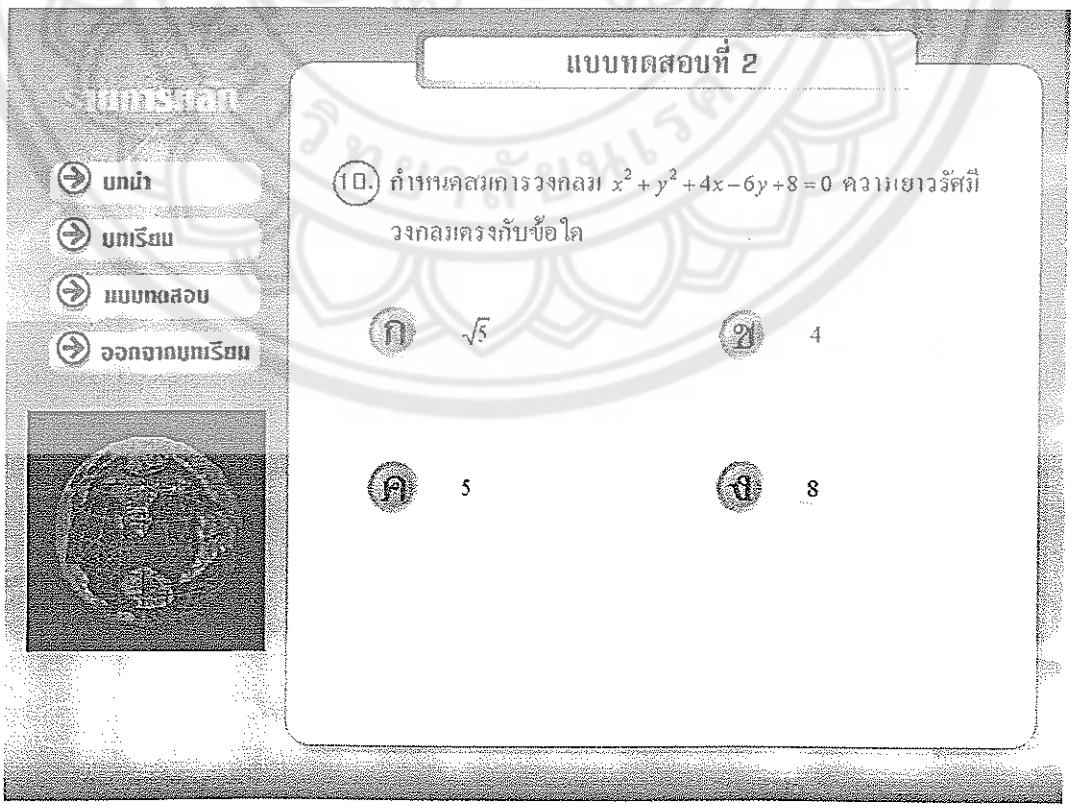

รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
5. จากสมการวงกลม $3x^2+3y^2-18x+24y+45=0$ มีจุดศูนย์กลาง และรัศมีตรงกับข้อใด
ก จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี $=\sqrt{10}$
ข จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี $=10$
ค จุดศูนย์กลาง $(3,-4)$, รัศมี $=\sqrt{10}$
ง จุดศูนย์กลาง $(-3,-4)$, รัศมี $=10$


รายการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
6. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด $(-2,0)$ และรัศมี 2 หน่วย ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4y=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4x=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4y=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4x=0\}$


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
7. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (−1,−2) และมีรัศมียาว 5 หน่วย คือความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-4y=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+2y+20=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+4y-20=0\}$
ง ไม่มีข้อใดถูก

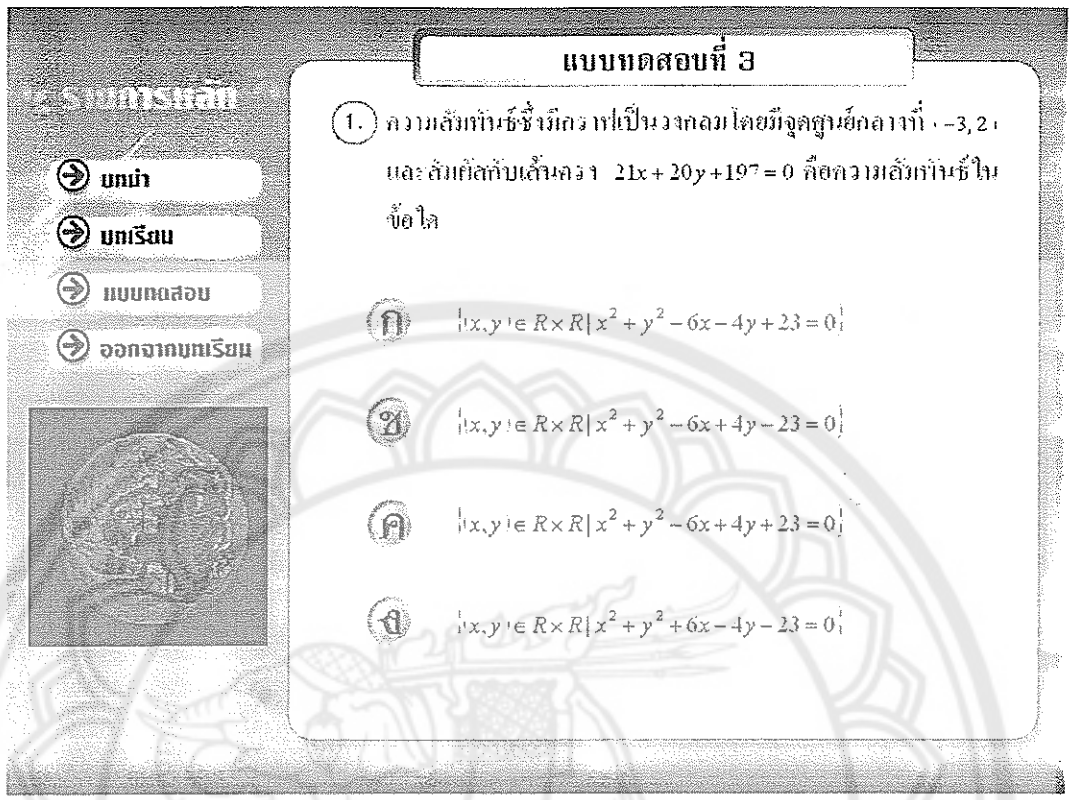

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
8. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (−1,2) และมีรัศมียาว 3 หน่วย คือความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-4y-4=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+4y-4=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x-4y-4=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+4y-4=0\}$

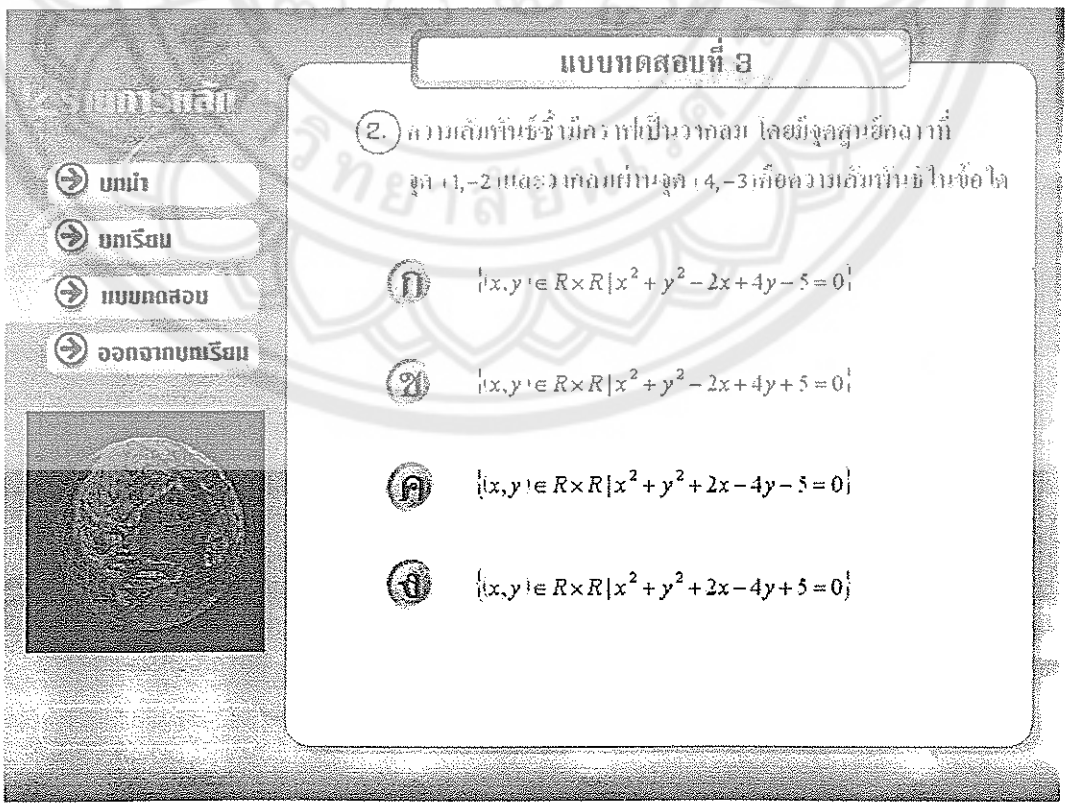

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
9. กำหนดสมการวงกลม $x^2+y^2-x-7=0$ จงพิจารณาว่ามีจุดศูนย์กลางตรงกับข้อใด
ก $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$
ข $\left(0,\frac{1}{2}\right)$
ค $\left(\frac{1}{2},0\right)$
ง $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

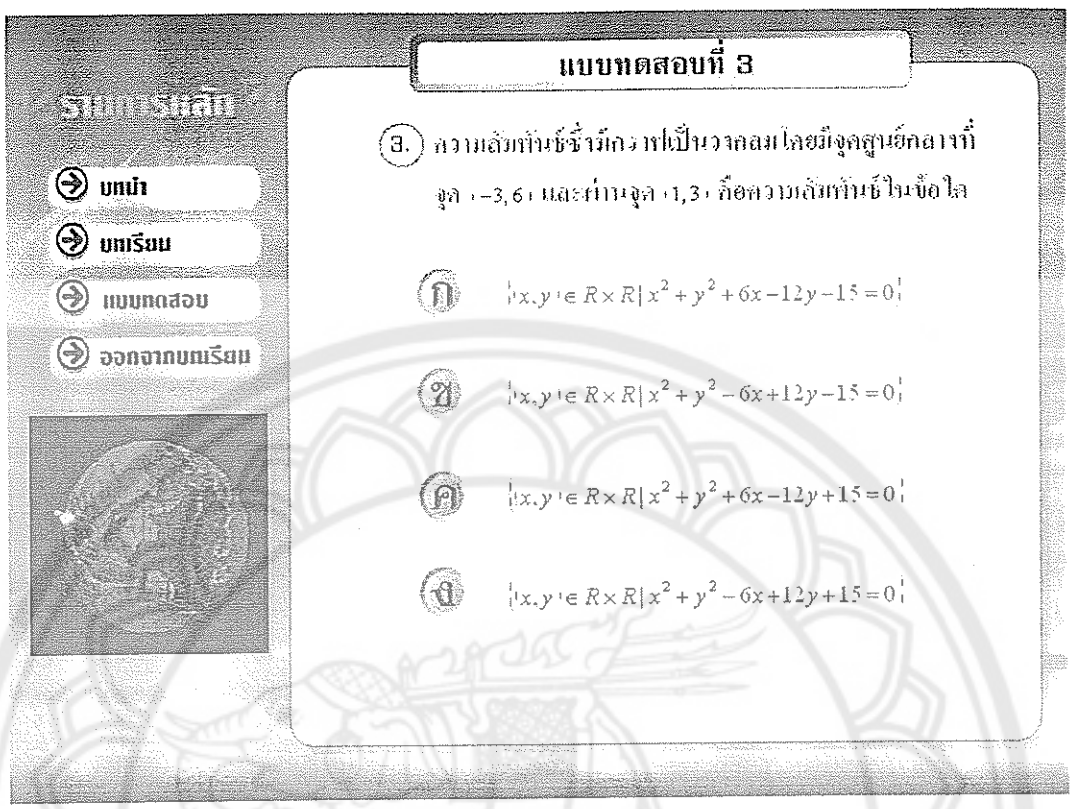

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 2
10. กำหนดสมการวงกลม $x^2+y^2+4x-6y+8=0$ ความยาวรัศมีวงกลมตรงกับข้อใด
ก $\sqrt{5}$
ข 4
ค 5
ง 8

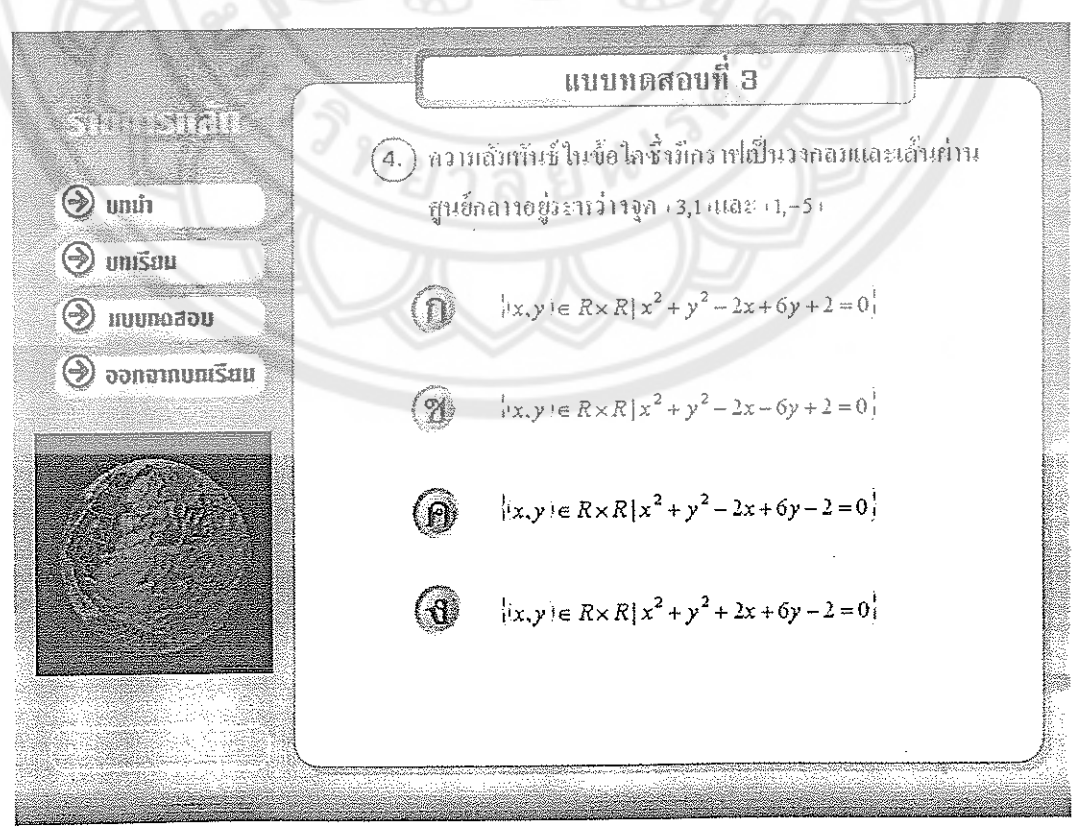
แบบทดสอบที่ 2
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คุณสอบได้ 3 คะแนน
คุณยังสอบไม่ผ่าน กลับไปทบทวนใหม่
แล้วมาสอบอีกครั้งนะครับ

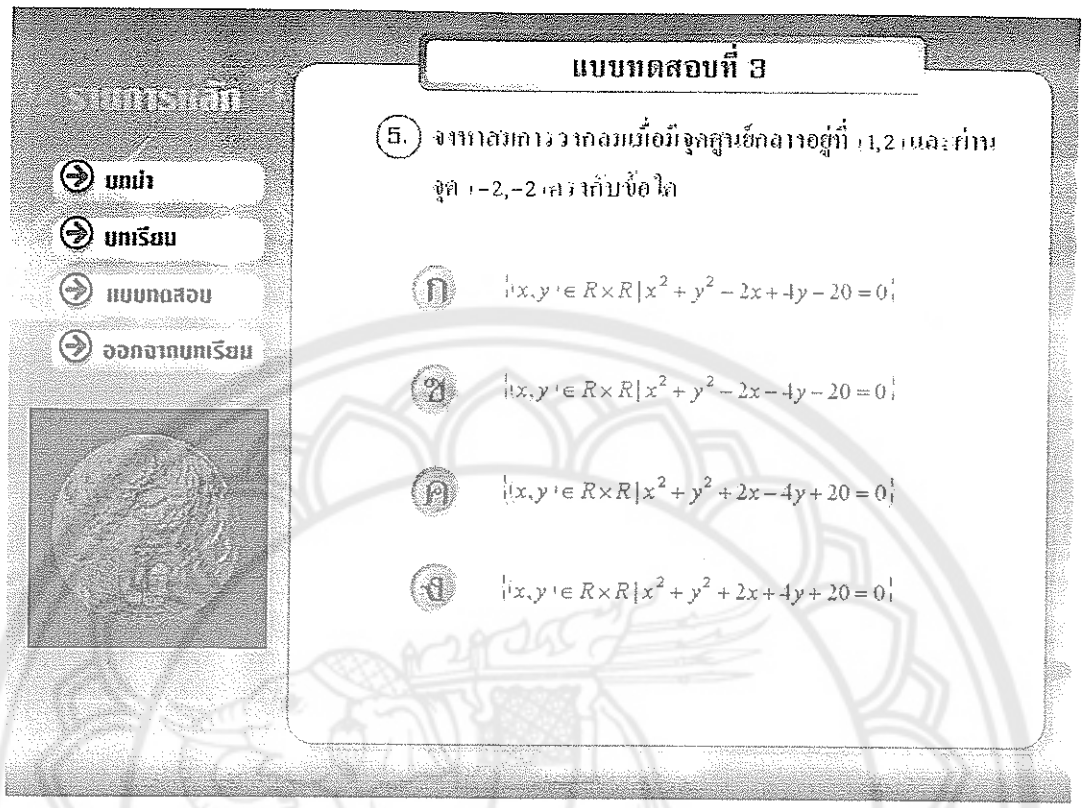
แบบทดสอบที่ 3
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คำชี้แจง
1. แบบทดสอบต่อไปนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ 10 คะแนน
2. นักเรียนสามารถเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดได้เพียงตัวเลือกเดียว
3. นักเรียนไม่สามารถย้อนกลับไปทำข้อที่ผ่านมาได้
เริ่มทำแบบทดสอบ

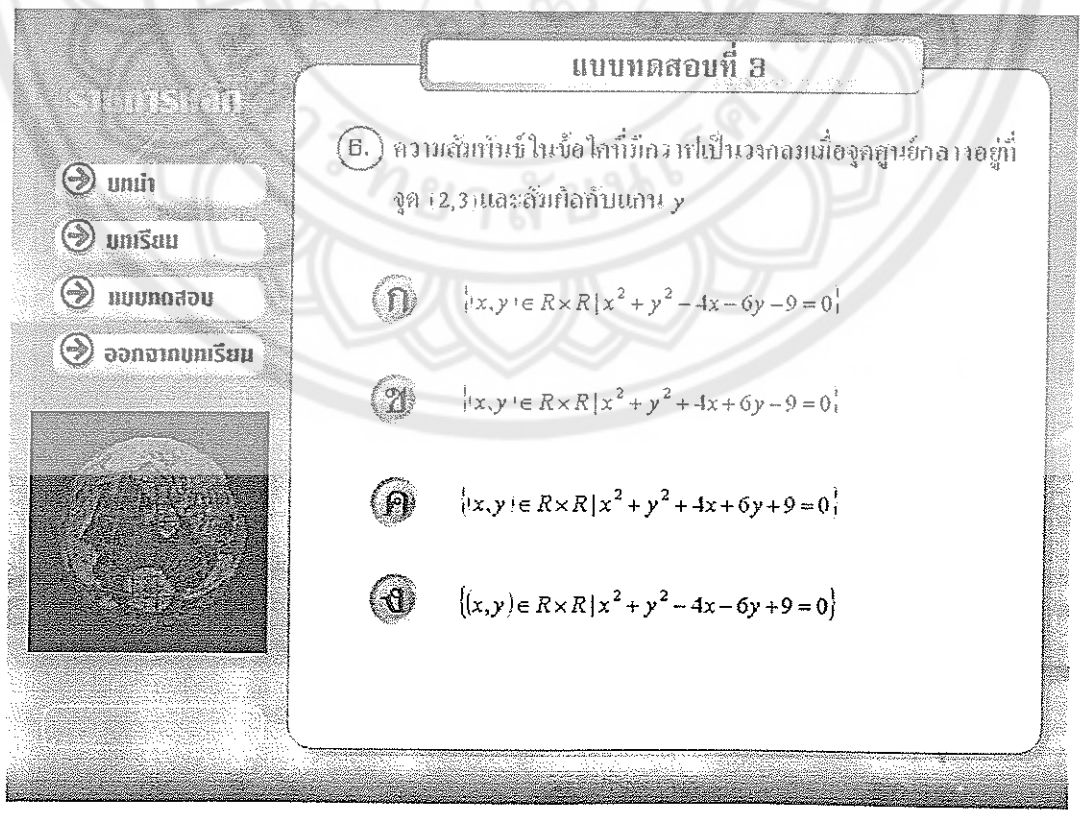

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
1. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่ (-3, 2) และสัมผัสกับเส้นตรง $21x+20y+197=0$ คือความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x-4y+23=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+4y-23=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+4y+23=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x-4y-23=0\}$

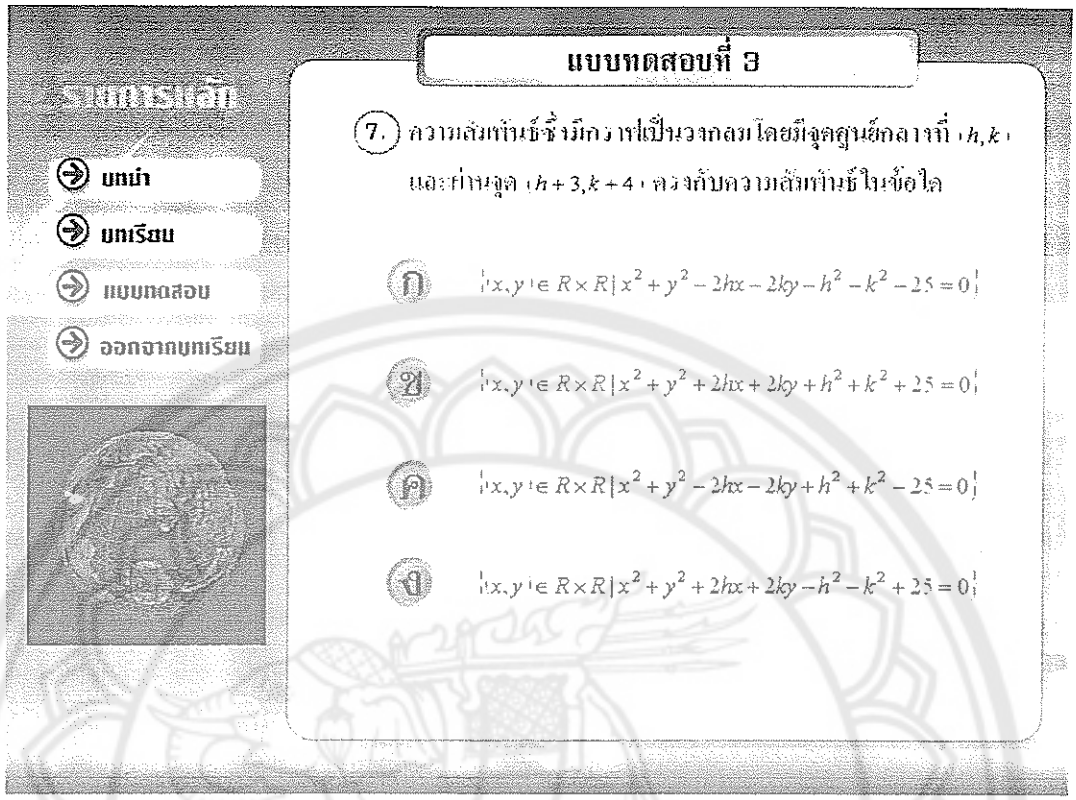

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
2. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลม โดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (1,-2) และวงกลมผ่านจุด (4,-3) คือความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+4y-5=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+4y+5=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-4y-5=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-4y+5=0\}$

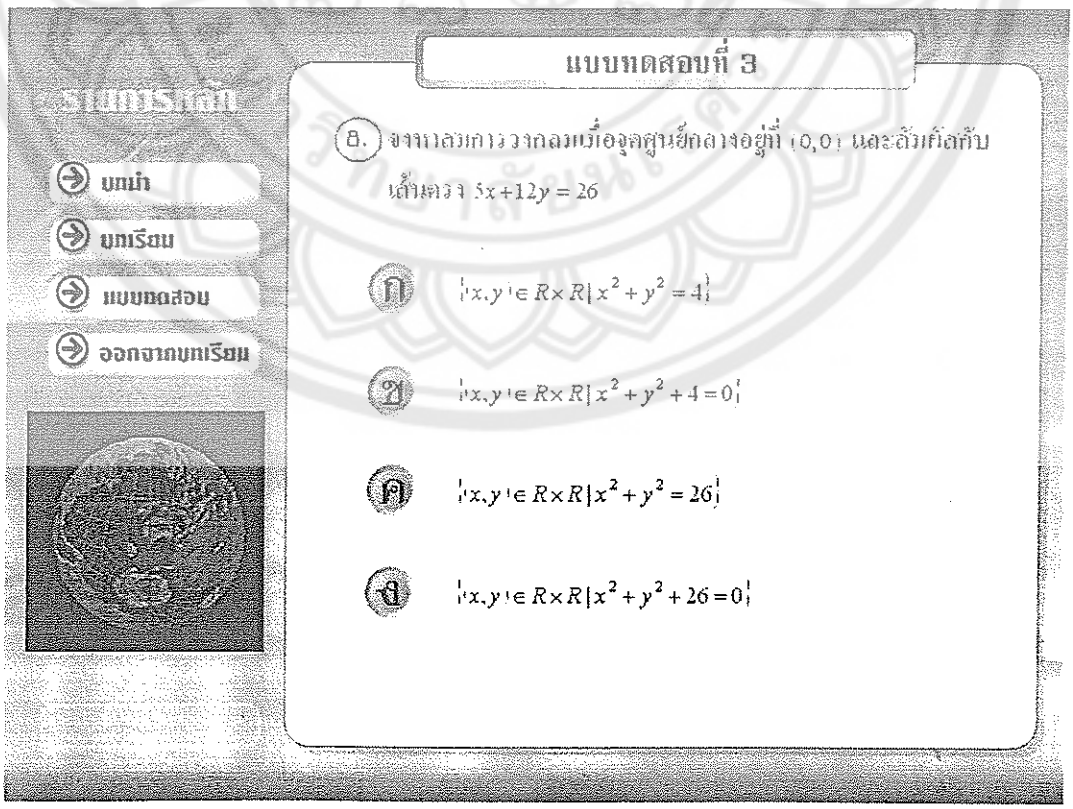

แบบทดสอบที่ 3
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
3. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด (−3,6) และผ่านจุด (1,3) คือความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x-12y-15=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+12y-15=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x-12y+15=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+12y+15=0\}$

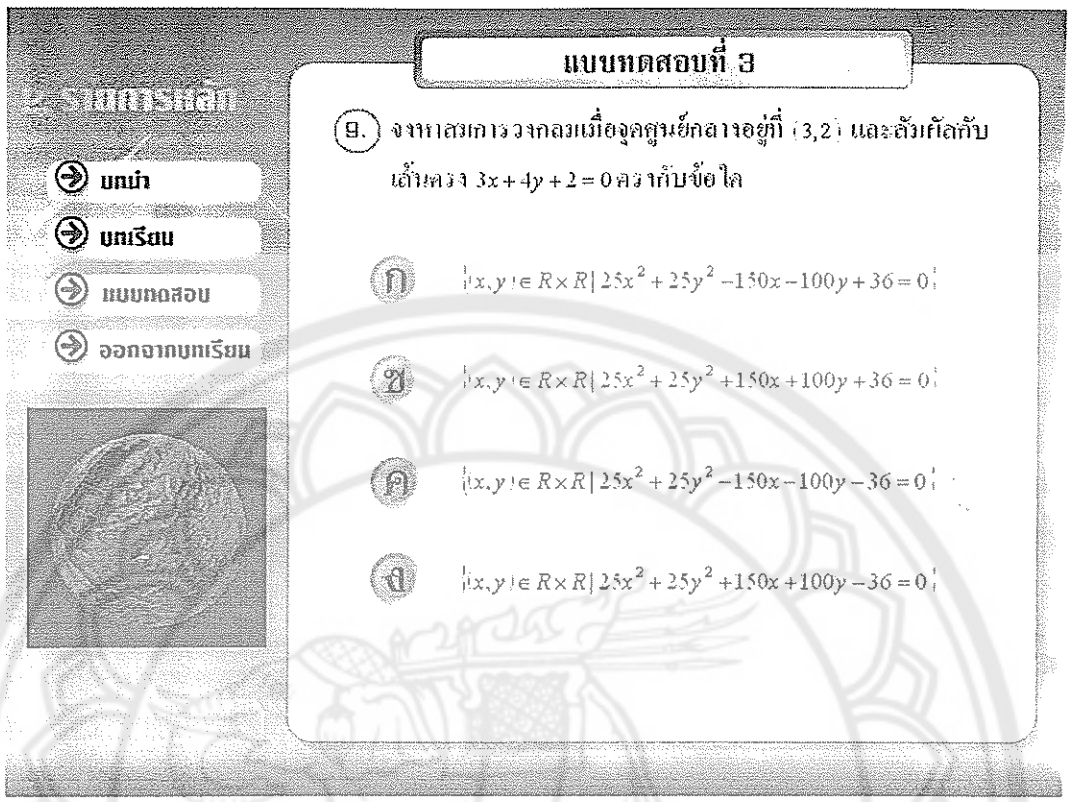

แบบทดสอบที่ 3
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
4. ความสัมพันธ์ในข้อใดซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมและเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ระหว่างจุด (3,1) และ (1,−5)
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+6y+2=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x-6y+2=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+6y-2=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+6y-2=0\}$

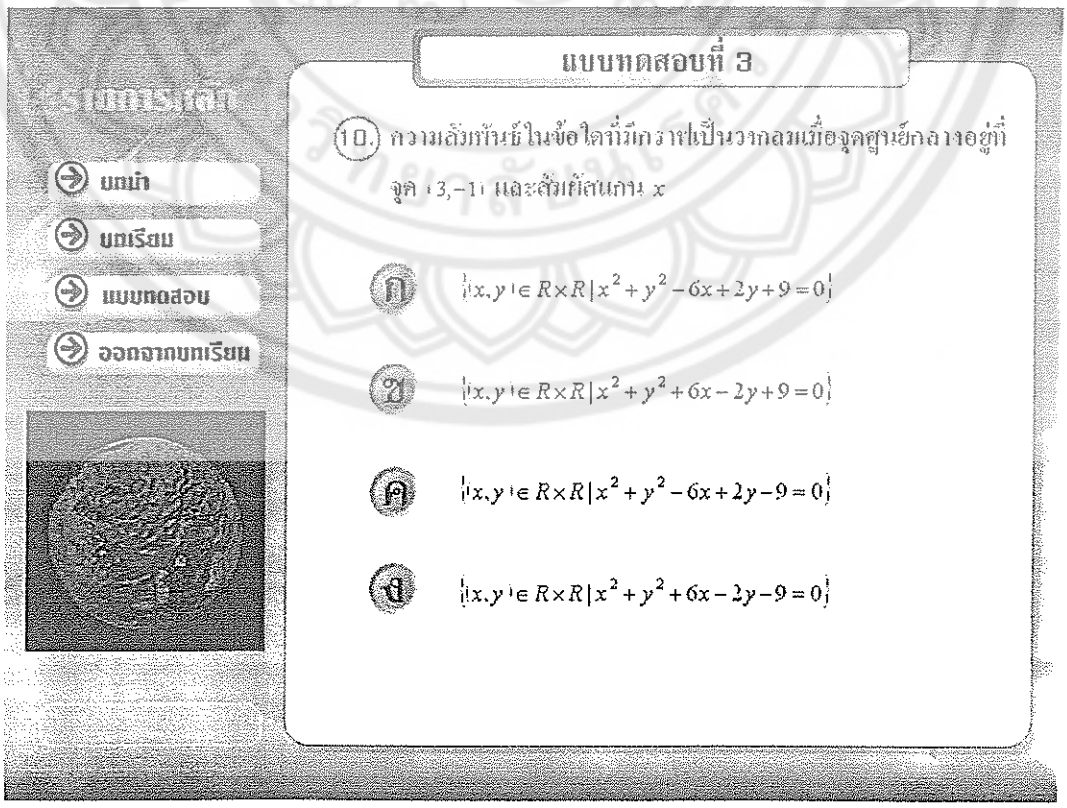

คณิตศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
5. จากสมการวงกลมเมื่อมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1,2) และผ่านจุด (-2,-2) ตรงกับข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+4y-20=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x-4y-20=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-4y+20=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+4y+20=0\}$


คณิตศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
6. ความสัมพันธ์ในข้อใดที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2,3) และสัมผัสกับแกน y
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4x-6y-9=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4x+6y-9=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4x+6y+9=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-4x-6y+9=0\}$

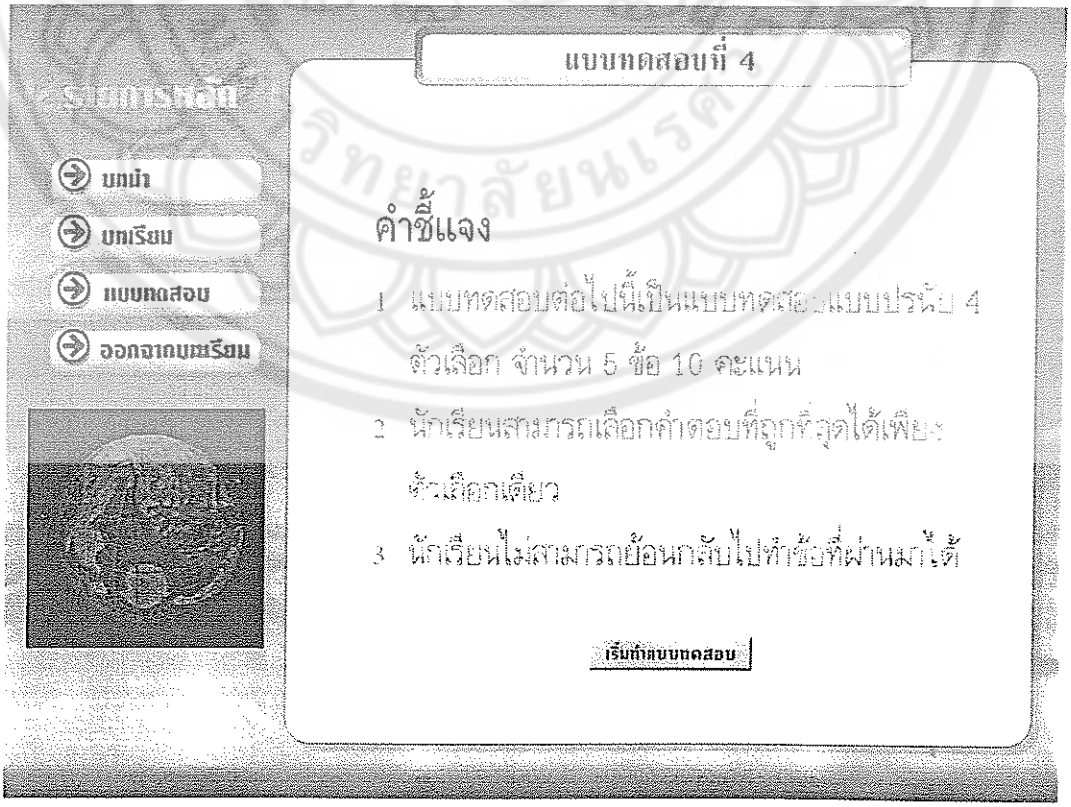

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
7. ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่ (h,k) และผ่านจุด $(h+3,k+4)$ ตรงกับความสัมพันธ์ในข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2hx-2ky-h^2-k^2-25=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2hx+2ky+h^2+k^2+25=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-25=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2hx+2ky-h^2-k^2+25=0\}$

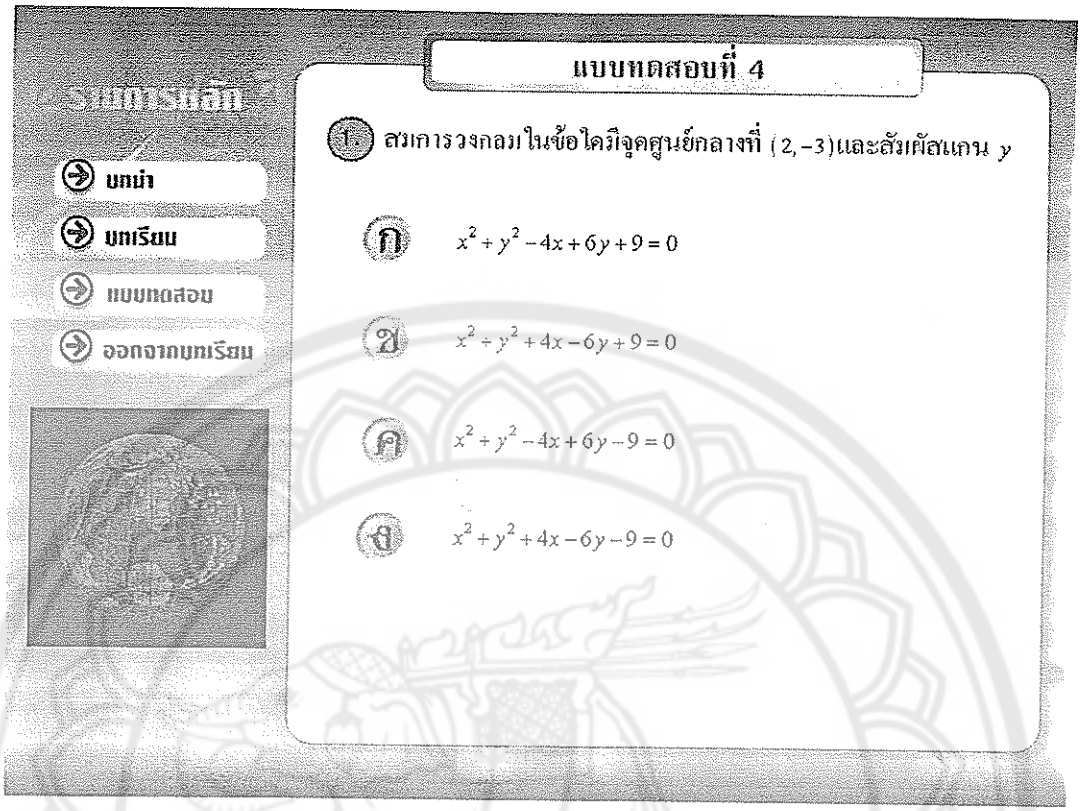

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
8. จากวงกลมซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0,0)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $5x+12y=26$
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2=4\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+4=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2=26\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+26=0\}$

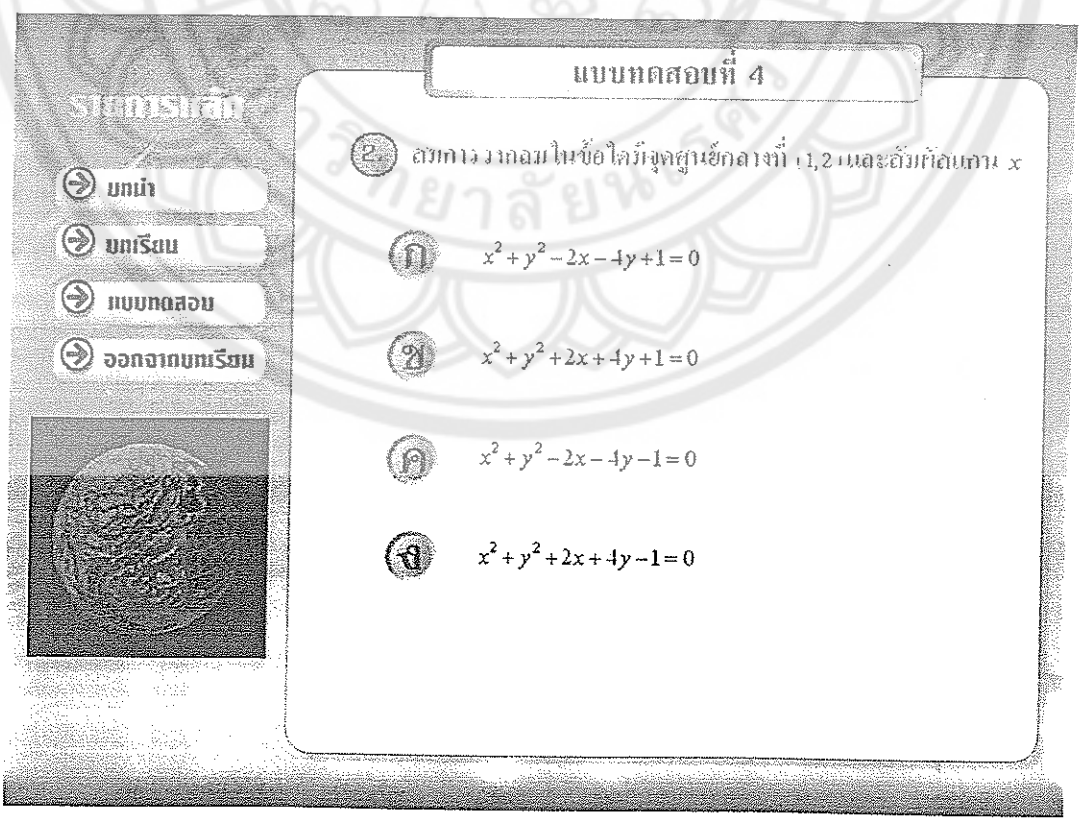

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
9. จงหาสมการวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3,2) และสัมผัสกับเส้นตรง $3x+4y+2=0$ ตรงกับข้อใด
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid 25x^2+25y^2-150x-100y+36=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid 25x^2+25y^2+150x+100y+36=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid 25x^2+25y^2-150x-100y-36=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid 25x^2+25y^2+150x+100y-36=0\}$

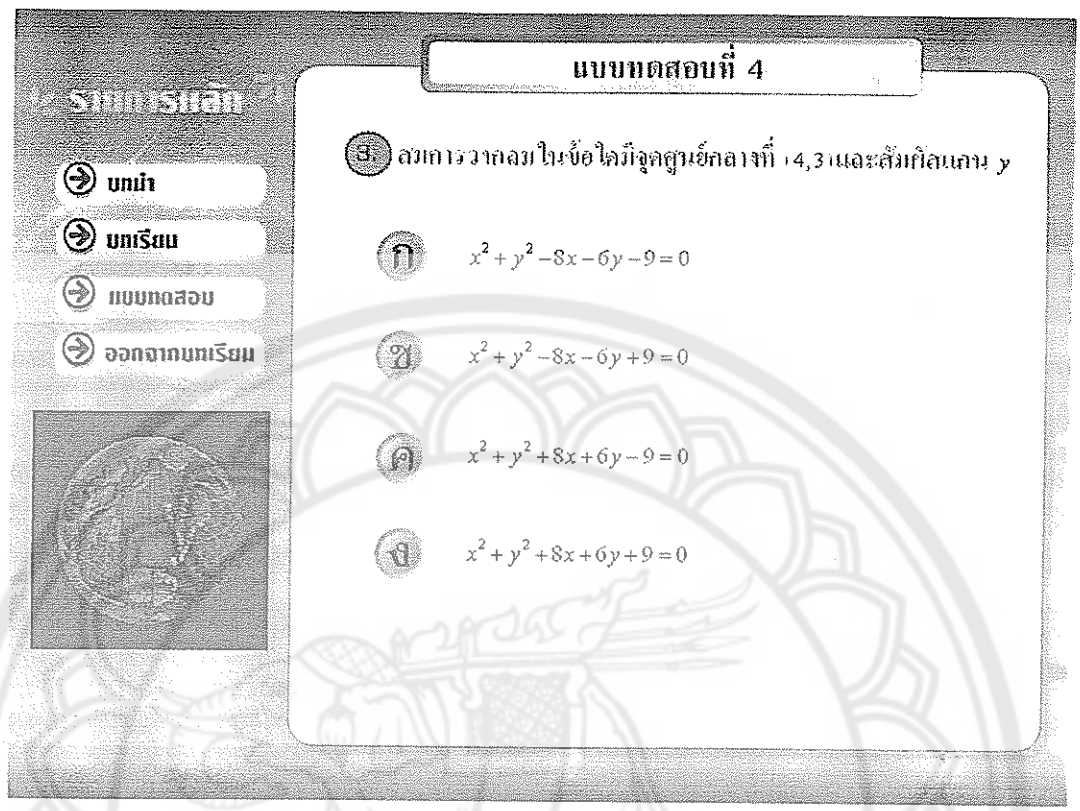

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
10. ความสัมพันธ์ในข้อใดที่มีกราฟเป็นวงกลมเมื่อจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (3,−1) และสัมผัสแกน x
ก $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+2y+9=0\}$
ข $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x-2y+9=0\}$
ค $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-6x+2y-9=0\}$
ง $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+6x-2y-9=0\}$

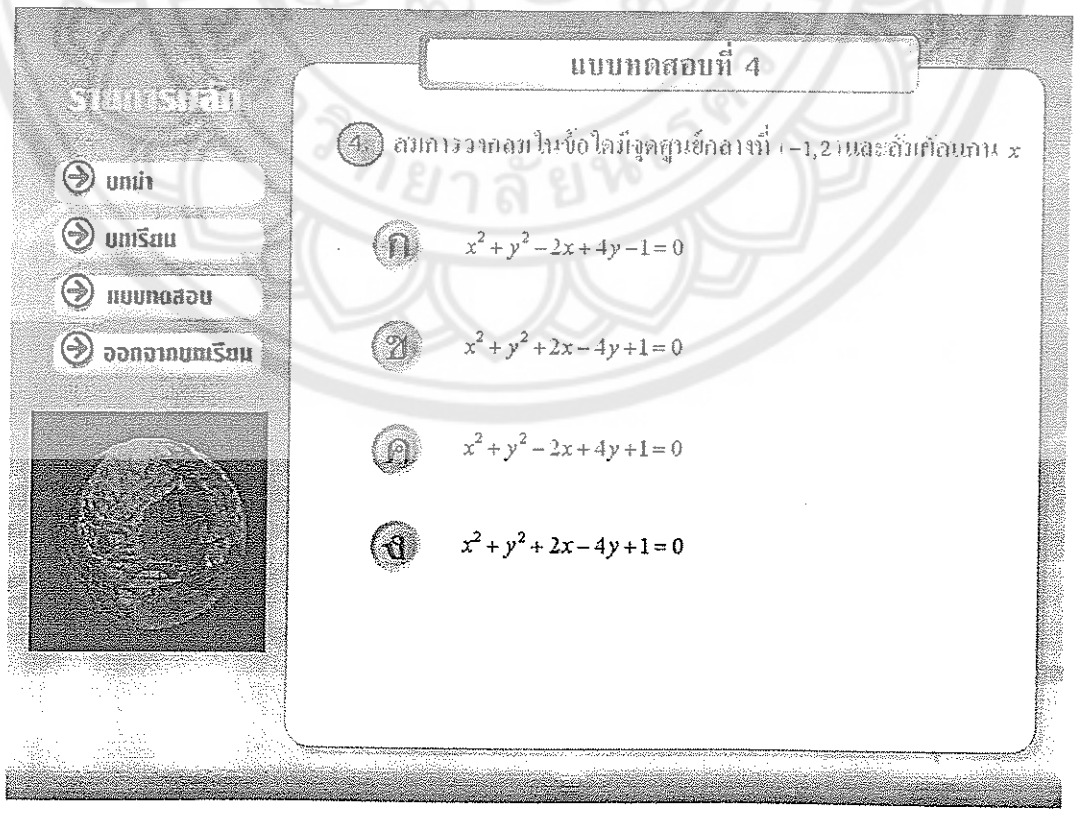
ระบบการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 3
คุณสอบได้ 2 คะแนน
คุณยังสอบไม่ผ่าน กลับไปทบทวนใหม่
แล้วมาสอบอีกครั้งนะครับ

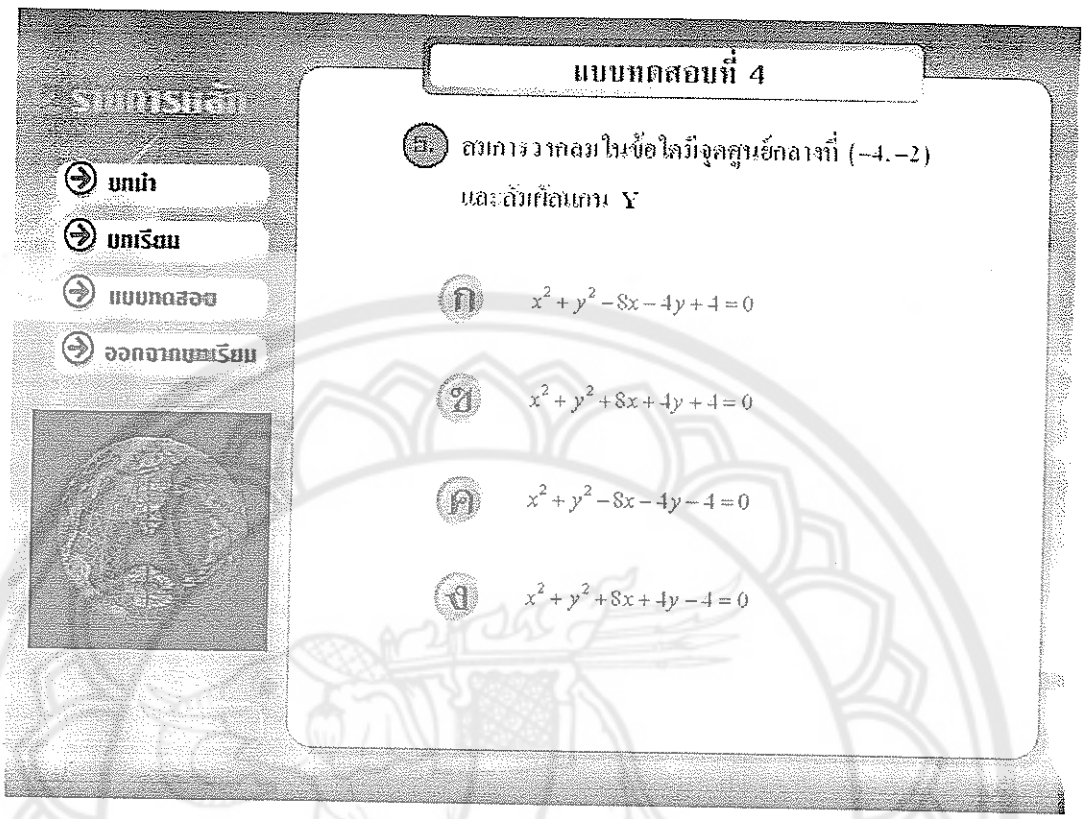

ระบบการหลัก
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 4
คำชี้แจง
1 แบบทดสอบต่อไปนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 5 ข้อ 10 คะแนน
2 นักเรียนสามารถเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดได้เพียง 1 ตัวเลือกเดียว
3 นักเรียนไม่สามารถย้อนกลับไปทำข้อที่ผ่านมาได้
เริ่มทำแบบทดสอบ

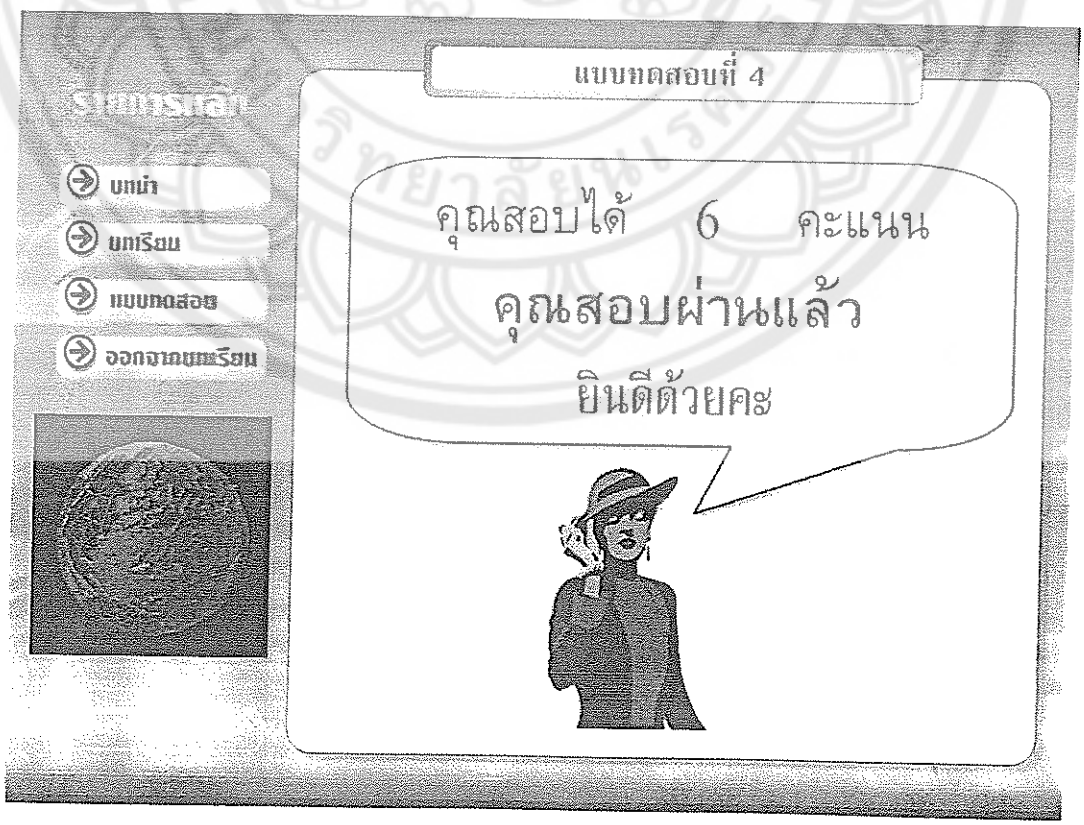

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 4
1. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,-3)$ และสัมผัสแกน y
ก $x^2+y^2-4x+6y+9=0$
ข $x^2+y^2+4x-6y+9=0$
ค $x^2+y^2-4x+6y-9=0$
ง $x^2+y^2+4x-6y-9=0$

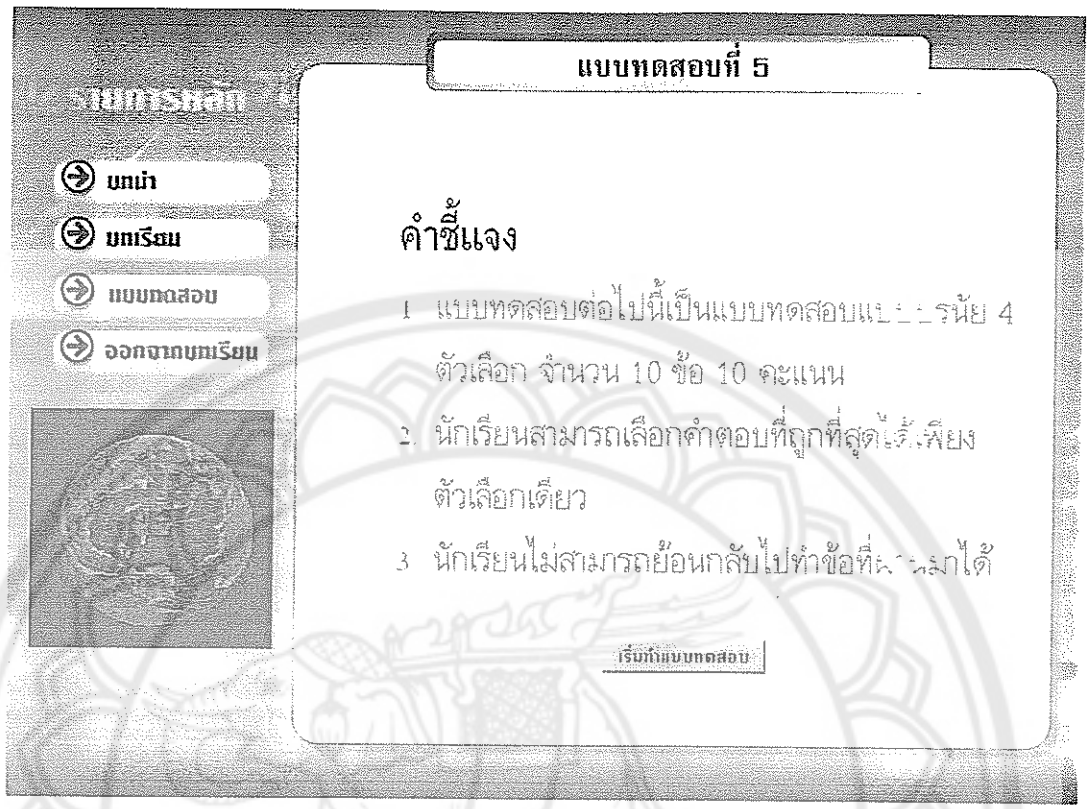

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 4
2. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(1,2)$ และสัมผัสแกน x
ก $x^2+y^2-2x-4y+1=0$
ข $x^2+y^2+2x+4y+1=0$
ค $x^2+y^2-2x-4y-1=0$
ง $x^2+y^2+2x+4y-1=0$

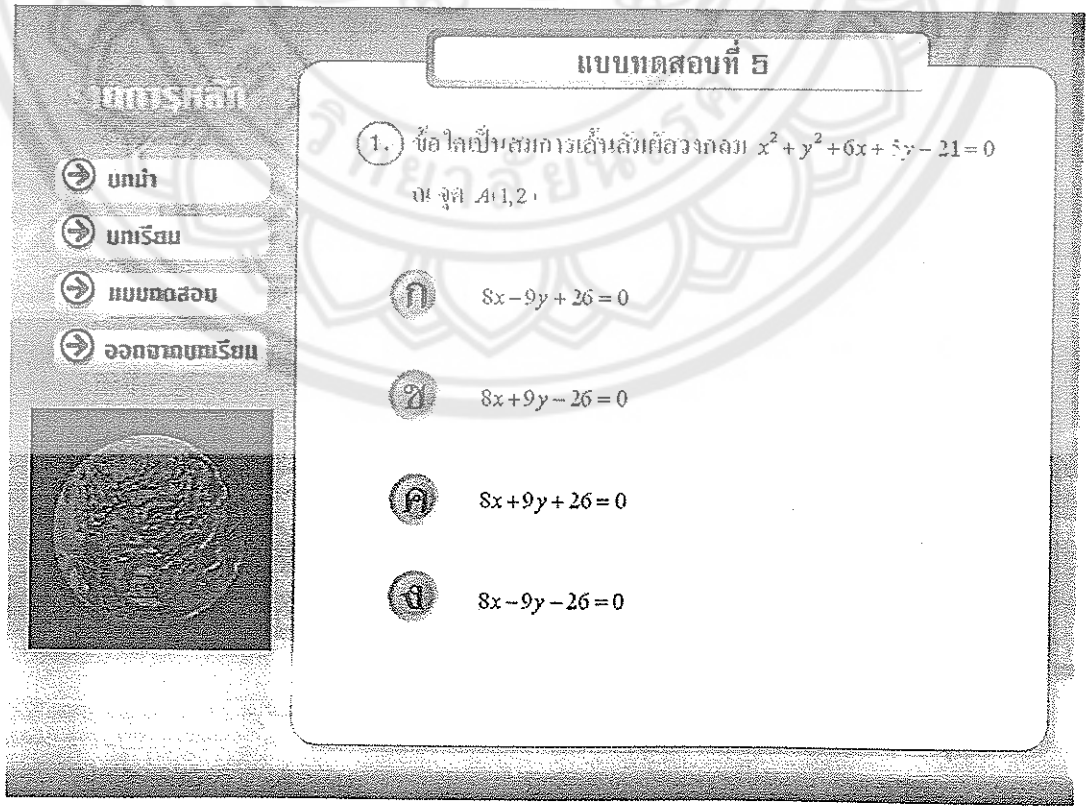

วิทยาศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 4
5. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ (4,3) และสัมผัสแกน y
ก $x^2+y^2-8x-6y-9=0$
ข $x^2+y^2-8x-6y+9=0$
ค $x^2+y^2+8x+6y-9=0$
ง $x^2+y^2+8x+6y+9=0$

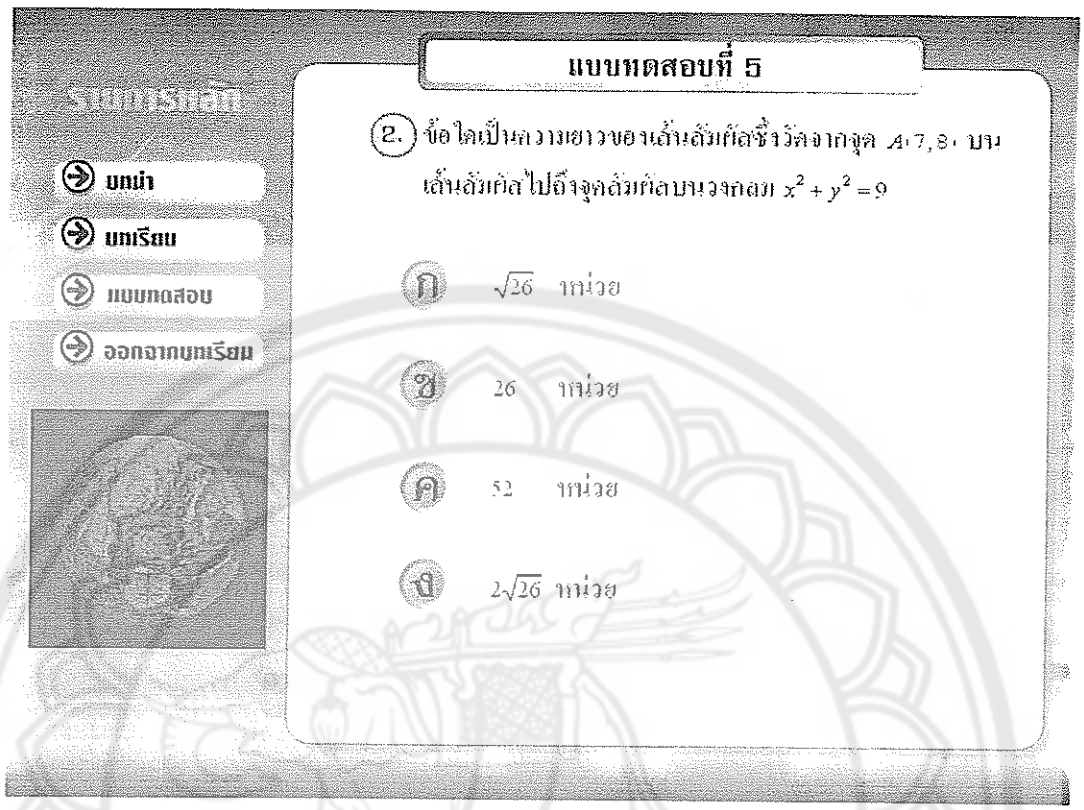

วิทยาศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 4
4. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ (−1,2) และสัมผัสแกน x
ก $x^2+y^2-2x+4y-1=0$
ข $x^2+y^2+2x-4y+1=0$
ค $x^2+y^2-2x+4y+1=0$
ง $x^2+y^2+2x-4y+1=0$

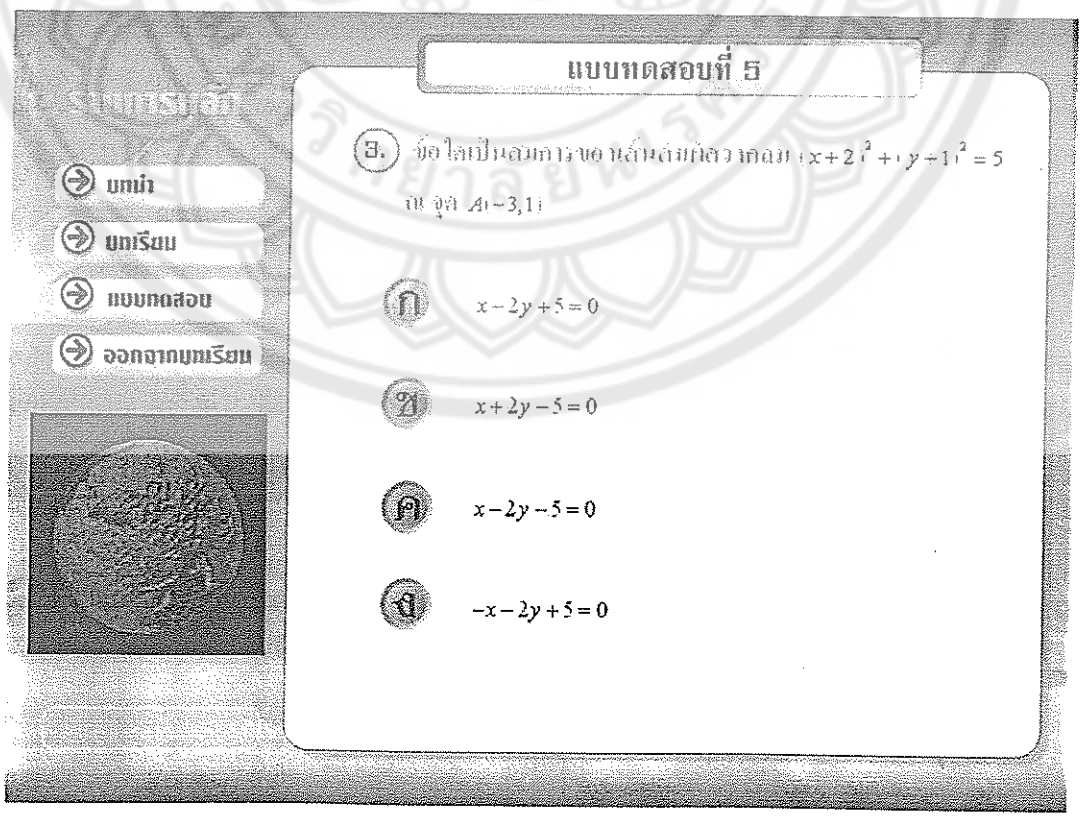

แบบทดสอบที่ 4
5. สมการวงกลมในข้อใดมีจุดศูนย์กลางที่ (−4, −2) และสัมผัสแกน Y
ก $x^2+y^2-8x-4y+4=0$
ข $x^2+y^2+8x+4y+4=0$
ค $x^2+y^2-8x-4y-4=0$
ง $x^2+y^2+8x+4y-4=0$
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน

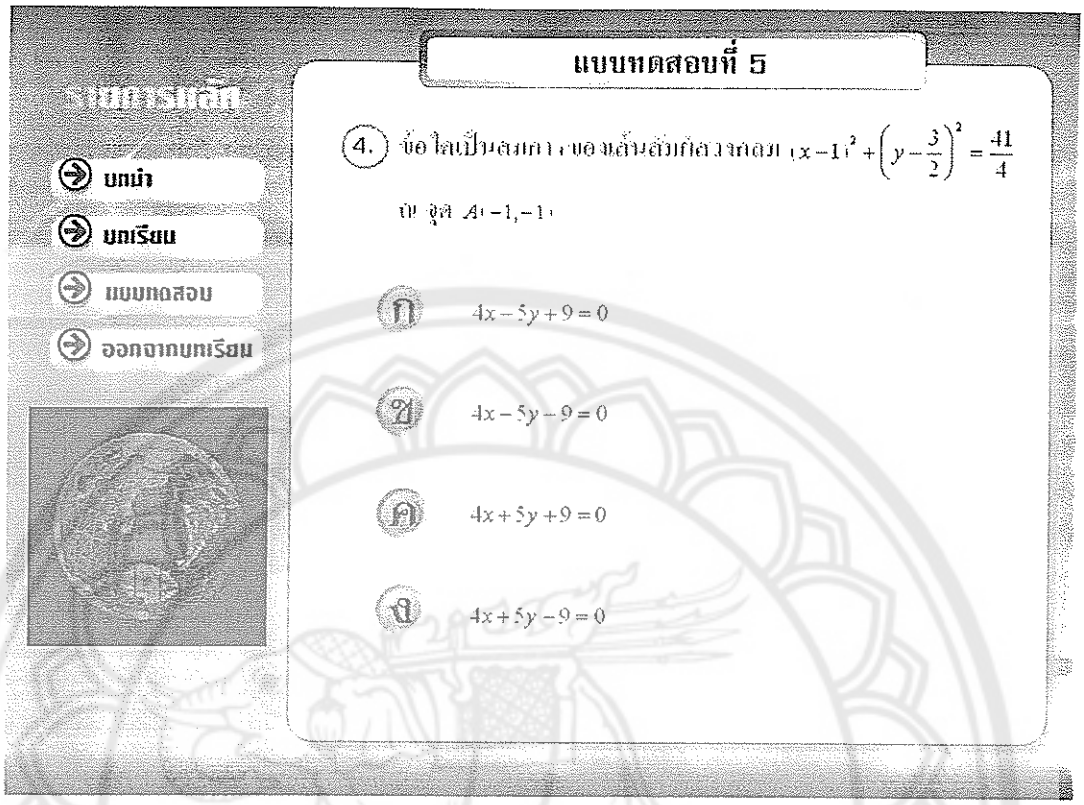

แบบทดสอบที่ 4
คุณสอบได้ 6 คะแนน
คุณสอบผ่านแล้ว
ยินดีด้วยคะ
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน

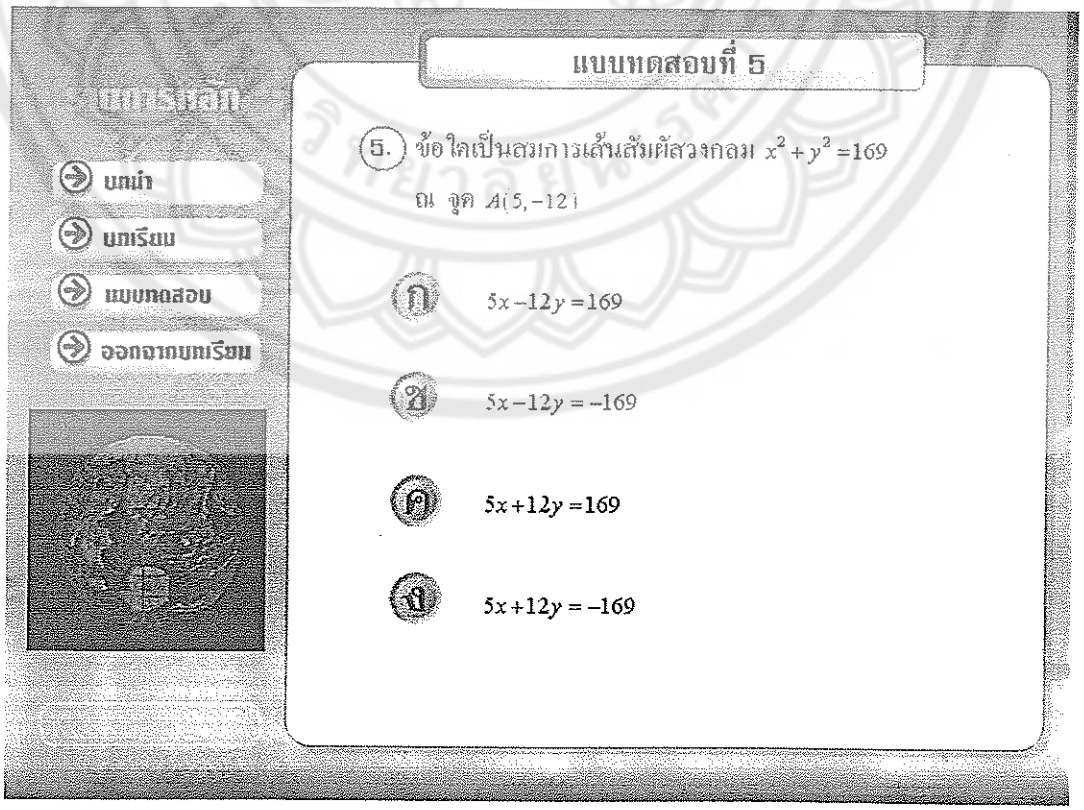

แบบทดสอบที่ 5
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คำชี้แจง
1. แบบทดสอบต่อไปนี้เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ 10 คะแนน
2. นักเรียนสามารถเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดได้เพียง ตัวเลือกเดียว
3. นักเรียนไม่สามารถย้อนกลับไปทำข้อที่ผ่านมาได้
เริ่มทำแบบทดสอบ

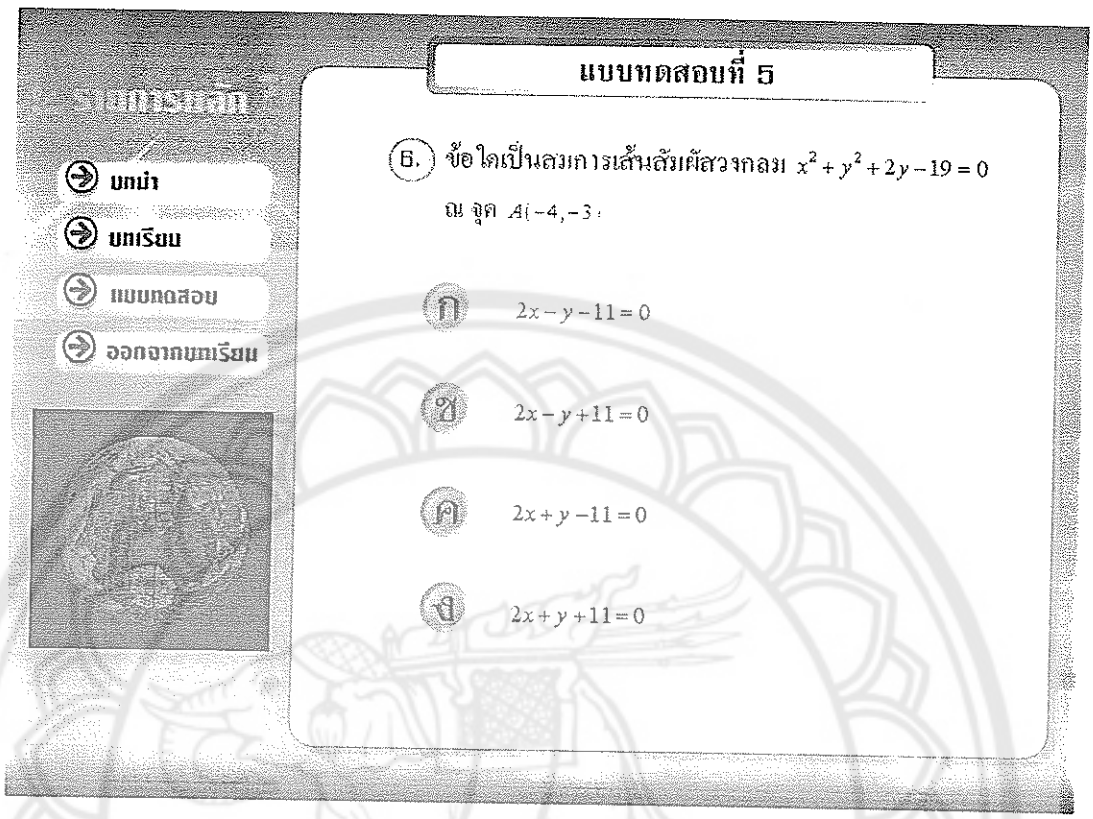

แบบทดสอบที่ 5
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
1. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2+6x+5y-21=0$ ที่จุด $A(1,2)$
ก $8x-9y+26=0$
ข $8x+9y-26=0$
ค $8x+9y+26=0$
ง $8x-9y-26=0$

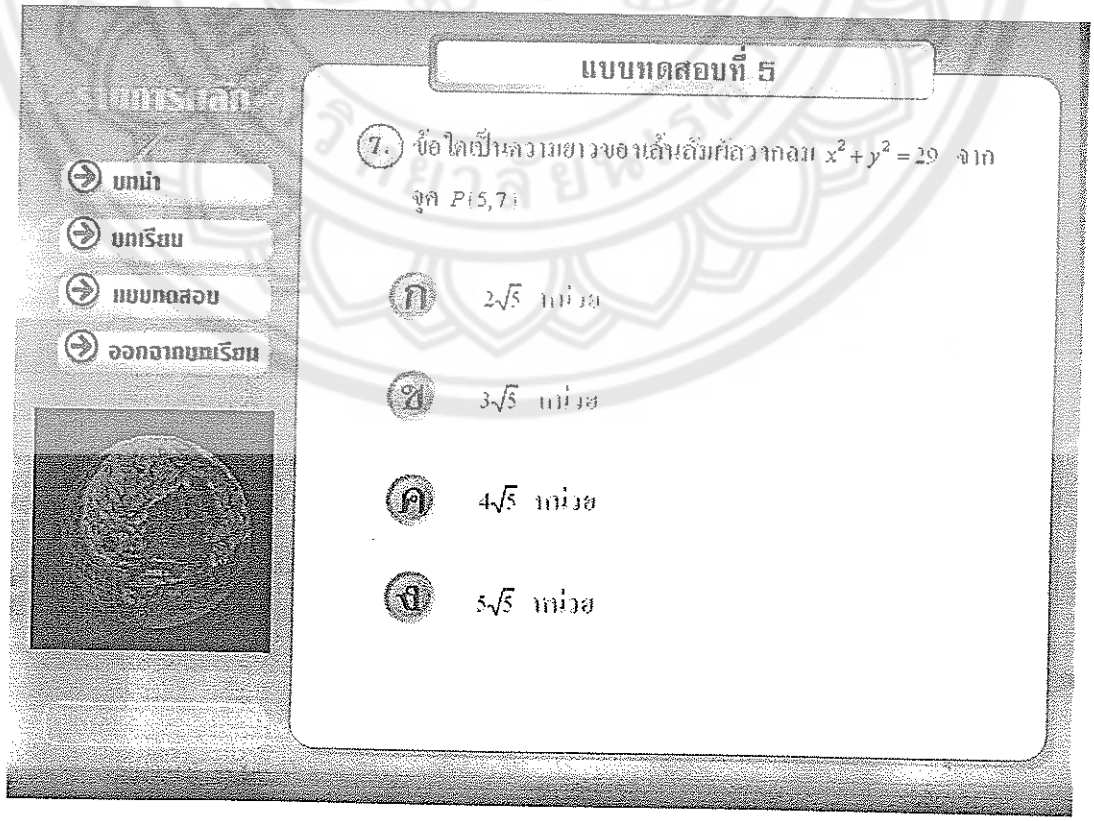

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
2. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม $x^2+y^2=9$
ก $\sqrt{26}$ หน่วย
ข 26 หน่วย
ค 52 หน่วย
ง $2\sqrt{26}$ หน่วย

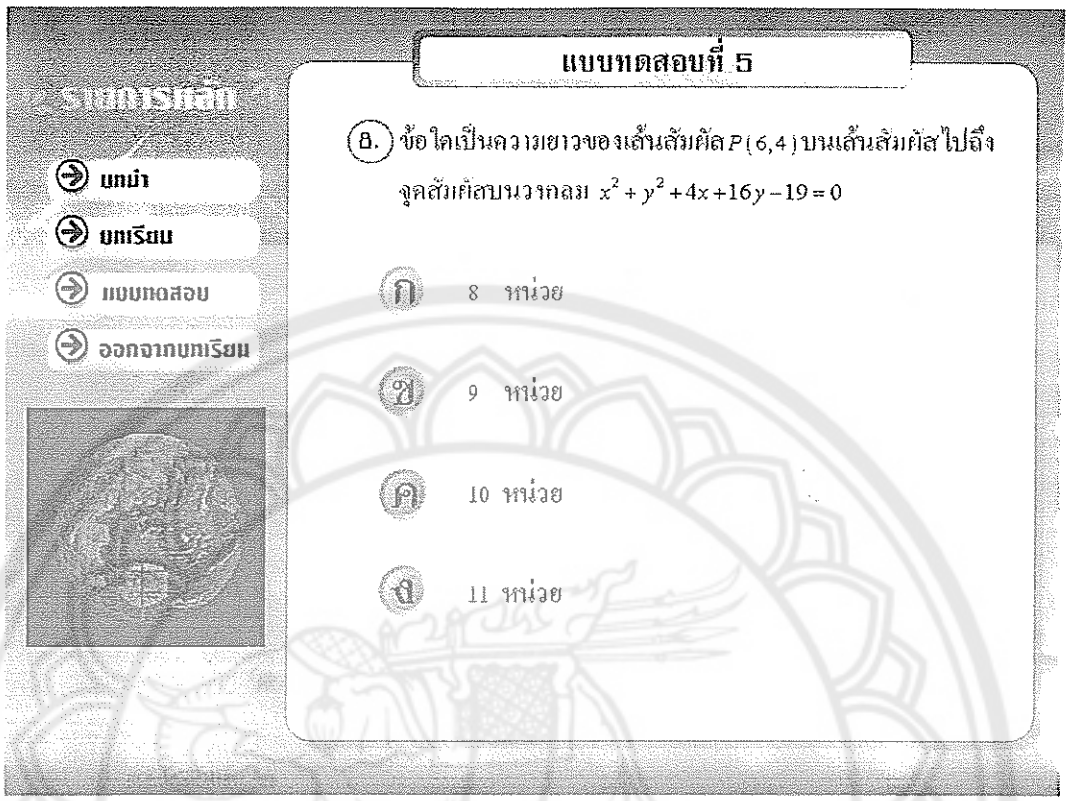

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
3. ข้อใดเป็นสมการของเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม $(x+2)^2+(y+1)^2=5$ ที่จุด $A(-3,1)$
ก $x-2y+5=0$
ข $x+2y-5=0$
ค $x-2y-5=0$
ง $-x-2y+5=0$

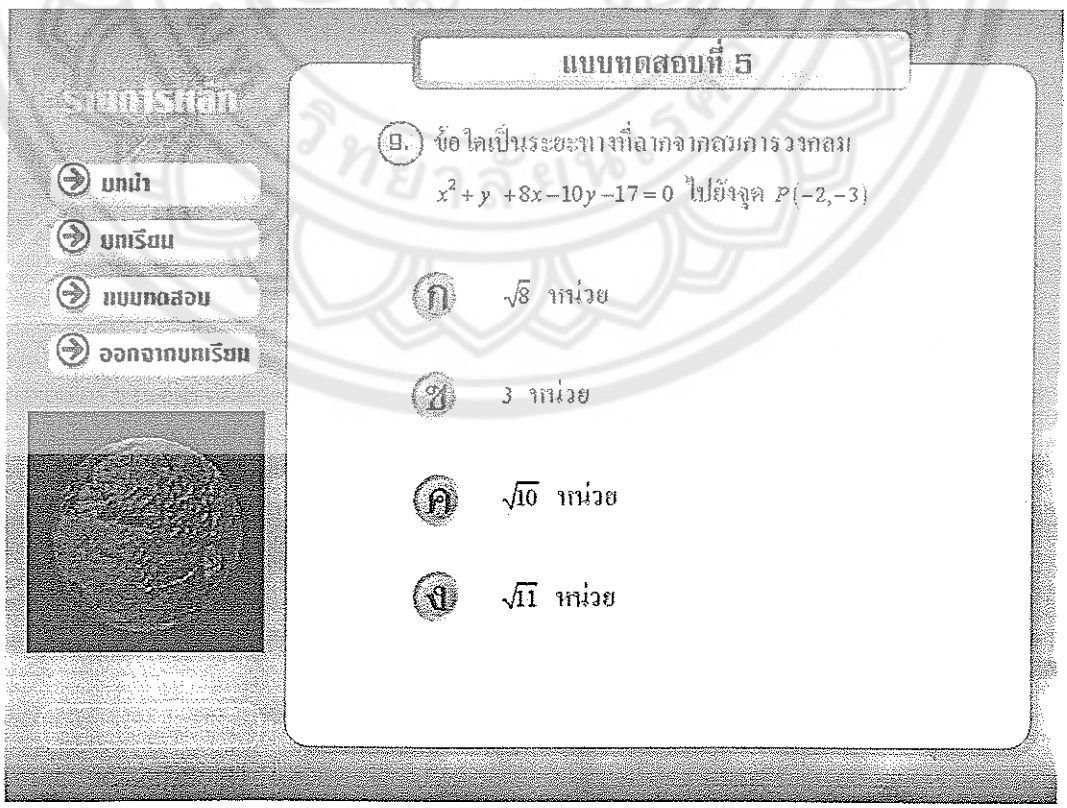

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
4. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{41}{4}$ ณ จุด $A(-1,-1)$
ก $4x-5y+9=0$
ข $4x-5y-9=0$
ค $4x+5y+9=0$
ง $4x+5y-9=0$

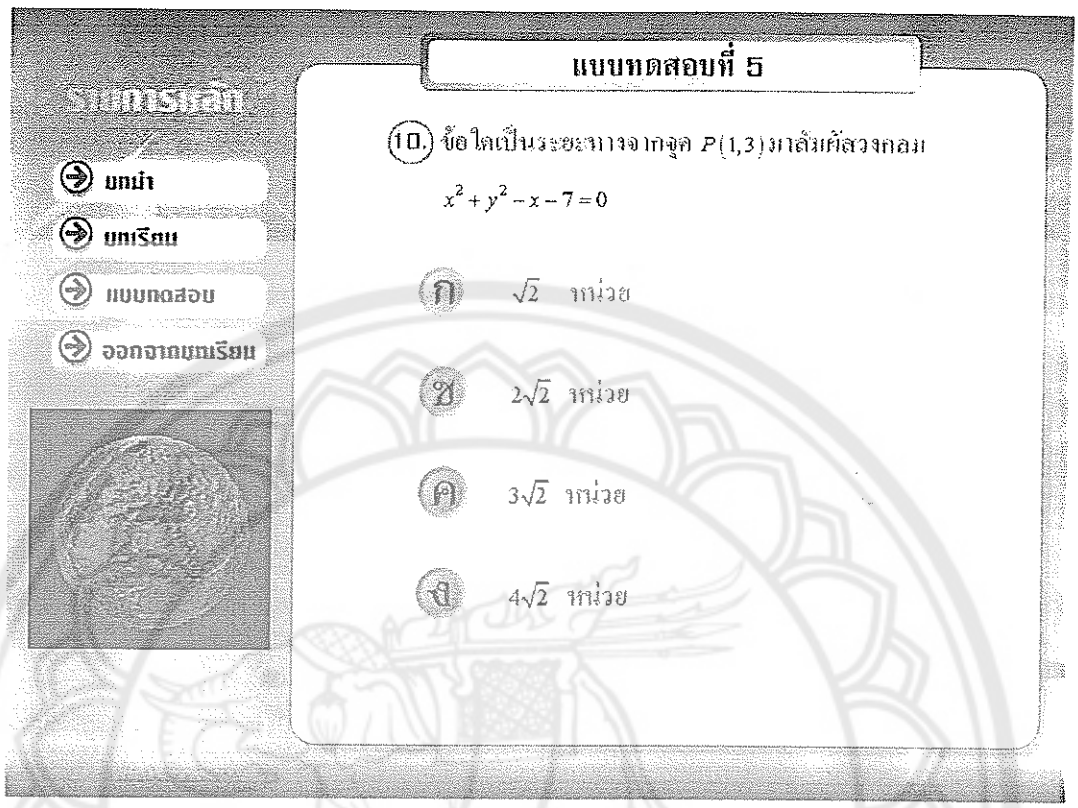

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
5. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=169$ ณ จุด $A(5,-12)$
ก $5x-12y=169$
ข $5x-12y=-169$
ค $5x+12y=169$
ง $5x+12y=-169$

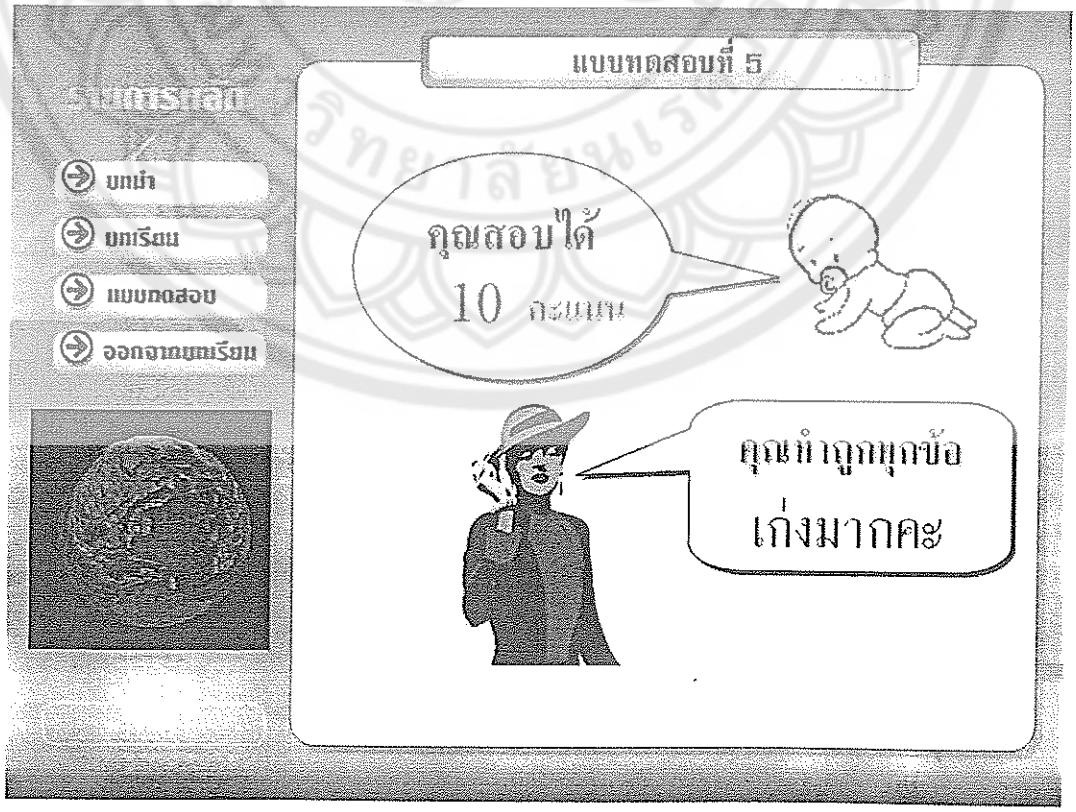

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
6. ข้อใดเป็นสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2+2y-19=0$ ณ จุด $A(-4,-3)$
ก $2x-y-11=0$
ข $2x-y+11=0$
ค $2x+y-11=0$
ง $2x+y+11=0$

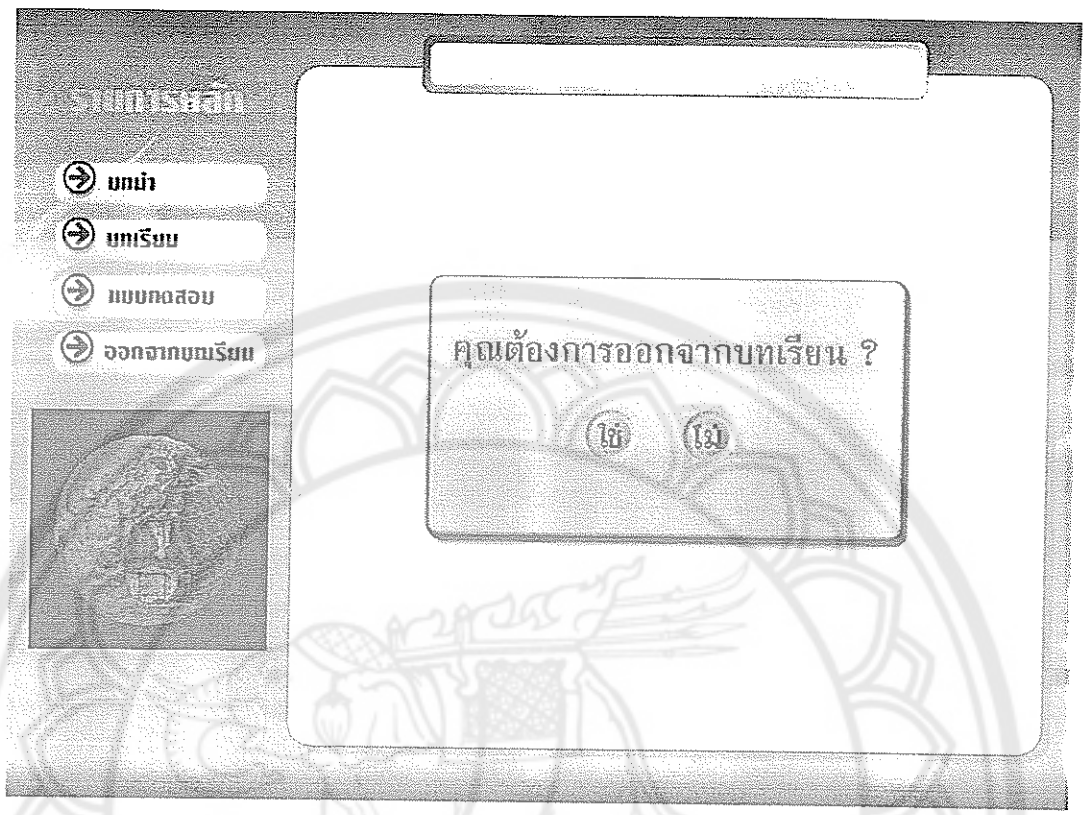

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
7. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2=29$ จากจุด $P(5,7)$
ก $2\sqrt{5}$ หน่วย
ข $3\sqrt{5}$ หน่วย
ค $4\sqrt{5}$ หน่วย
ง $5\sqrt{5}$ หน่วย

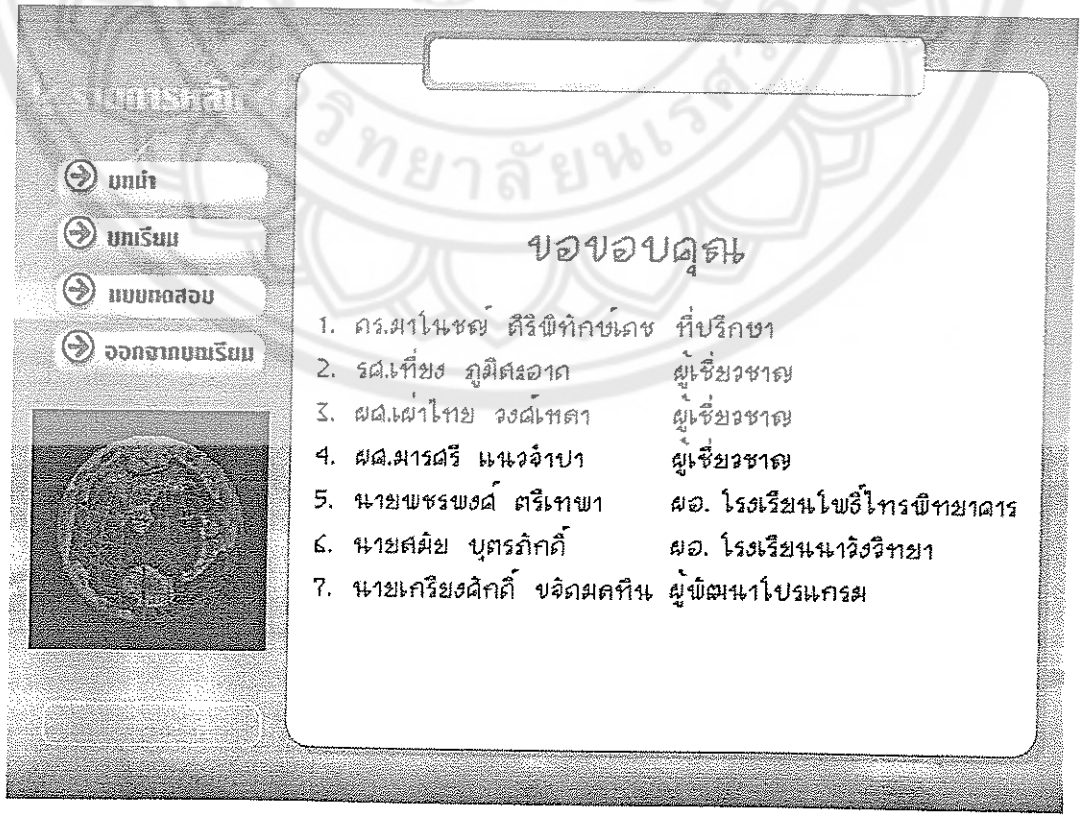

บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
8. ข้อใดเป็นความยาวของเส้นสัมผัส $P(6,4)$ บนเส้นสัมผัสไปถึงจุดสัมผัสบนวงกลม $x^2+y^2+4x+16y-19=0$
ก 8 หน่วย
ข 9 หน่วย
ค 10 หน่วย
ง 11 หน่วย


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
9. ข้อใดเป็นระยะทางที่ลากจากจุดกำเนิดวงกลม $x^2+y^2+8x-10y-17=0$ ไปยังจุด $P(-2,-3)$
ก $\sqrt{8}$ หน่วย
ข 3 หน่วย
ค $\sqrt{10}$ หน่วย
ง $\sqrt{11}$ หน่วย


วิทยาศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
10. ข้อใดเป็นระยะทางจากจุด $P(1,3)$ มาสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-x-7=0$
ก $\sqrt{2}$ หน่วย
ข $2\sqrt{2}$ หน่วย
ค $3\sqrt{2}$ หน่วย
ง $4\sqrt{2}$ หน่วย


วิทยาศาสตร์
บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
แบบทดสอบที่ 5
คุณสอบได้
10 คะแนน
คุณทำถูกทุกข้อ
เก่งมากคะ


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
คุณต้องการออกจากบทเรียน ?
ใช่
ไม่


บทนำ
บทเรียน
แบบทดสอบ
ออกจากบทเรียน
ขอขอบคุณ
1. ดร.มาโนชญ์ ตีรพิทักษ์เดช ที่ปรึกษา
2. รศ.เที่ยง ภูมิตะอาด ผู้เชี่ยวชาญ
3. ผศ.เผ่าไทย วงศ์เทศา ผู้เชี่ยวชาญ
4. ผศ.มารศรี แนวจำปา ผู้เชี่ยวชาญ
5. นายพชรพงศ์ ตรีเทพา ผอ. โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร
6. นายสมัย บุตรภักดี ผอ. โรงเรียนนาวังวิทยา
7. นายเกรียงศักดิ์ ขจิตมดหิน ผู้พัฒนาโปรแกรม

ภาคผนวก ซ

หนังสือราชการ

ที่ ศธ 0527.02.01/[illegible]

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
อำเภอเมืองฯ จังหวัดพิษณุโลก 65000

18 กรกฎาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

เรียน รองศาสตราจารย์เที่ยง ภูมิสะอาด

สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. โครงร่างการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ
2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ

ด้วยนางอรอนงค์ ไชเหลาคำ รหัสประจำตัว 46090767 นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย รหัสประจำตัว 46090619 นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน รหัสประจำตัว 46090833 นายเถลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ รหัสประจำตัว 46090866 และนางเพ็ญจิตร สุจินพลัม รหัสประจำตัว 46090882 นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4-MAT กับการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี " เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิตโดยมี ดร.มาโนชญ์ ศิริพิทักษ์เดช เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ในการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญพิจารณาตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ดังแนบมาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ นภีรงค์)
รองคณบดีฝ่ายบริหารและประกันคุณภาพ รักษาราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร

งานบริการการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย
โทร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 116 - 119
โทรสาร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 111

ที่ ศธ 0527.02.01/๔๙๕

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
อำเภอเมืองฯ จังหวัดพิษณุโลก 65000

18 กรกฎาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์เผ่าไทย วงศ์เหลา

สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. โครงร่างการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ
2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ

ด้วยนางอรอนงค์ ไขเหลาคำ รหัสประจำตัว 46090767 นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย รหัสประจำตัว 46090619 นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน รหัสประจำตัว 46090833 นายเถลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ รหัสประจำตัว 46090866 และนางเพ็ญจิตร ศุจินพลัม รหัสประจำตัว 46090882 นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4-MAT กับการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี " เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิตโดยมี ดร.มาโนชญ์ ศิริพิทักษ์เดช เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ในการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญพิจารณาตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ดังแนบมาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ นภีรงค์)
รองคณบดีฝ่ายบริหารและประกันคุณภาพ รักษาราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร

งานบริการการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย
โทร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 116 - 119
โทรสาร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 111

ที่ ศธ 0527.02.01/ [illegible]

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
อำเภอเมืองฯ จังหวัดพิษณุโลก 65000

18 กรกฎาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

เรียน ผู้ช่วยศาสตราจารย์มารศรี แนวจำปา

สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. โครงร่างการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ
2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ

ด้วยนางอรอนงค์ ไขเหลาคำ รหัสประจำตัว 46090767 นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย รหัสประจำตัว 46090619 นายเกริงศักดิ์ ขจัดมลทิน รหัสประจำตัว 46090833 นายเถลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ รหัสประจำตัว 46090866 และนางเพ็ญจิตร สุจินพลัม รหัสประจำตัว 46090882 นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4-MAT กับการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี " เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิตโดยมี ดร.มาโนชญ์ ศิริพิทักษ์เดช เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ในการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญพิจารณาตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ดังแนบมาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ นภีรงค์)
รองคณบดีฝ่ายบริหารและประกันคุณภาพ รักษาราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร

งานบริการการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย
โทร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 116 - 119
โทรสาร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 111

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ บัณฑิตวิทยาลัย งานบริการการศึกษา โทร. 0 – 5526 – 1169 - 70 ต่อ 116 - 119

ที่ ศธ 0527.02.01/ [illegible] วันที่ 18 กรกฎาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

เรียน ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี

ด้วยนางอรอนงค์ ไชเหลาคำ รหัสประจำตัว 46090767 นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย รหัสประจำตัว 46090619 นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน รหัสประจำตัว 46090833 นายเถลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ รหัสประจำตัว 46090866 และนางเพ็ญจิตร สุจินพลัม รหัสประจำตัว 46090882 นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4-MAT กับการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี " เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิตโดยมี ดร.มาโนชญ์ ศิริพิทักษ์เดช เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ในการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ บัณฑิตวิทยาลัย พิจารณาแล้วเห็นว่าท่านเป็นผู้ที่มีความรู้ความเชี่ยวชาญในเรื่องนี้เป็นอย่างดียิ่ง จึงใคร่ขอเรียนเชิญท่านเป็นผู้เชี่ยวชาญพิจารณาตรวจแก้ไขเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้า ดังแนบมาพร้อมนี้ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ นภีรงค์)

รองคณบดีฝ่ายบริหารและประกันคุณภาพ รักษาราชการแทน

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

ที่ ศธ 0527.02.01/ [illegible]

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร
อำเภอเมืองฯ จังหวัดพิษณุโลก 65000

18 กรกฎาคม 2548

เรื่อง ขอความร่วมมือเก็บข้อมูลเพื่อการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

เรียน ผู้อำนวยโรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร

สิ่งที่ส่งมาด้วย 1. โครงร่างการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ
2. เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง จำนวน 1 ฉบับ

ด้วยนางอรอนงค์ ไขเหลาคำ รหัสประจำตัว 46090767 นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย รหัสประจำตัว 46090619 นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน รหัสประจำตัว 46090833 นายเถลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ รหัสประจำตัว 46090866 และนางเพ็ญจิตร สุจินพลัม รหัสประจำตัว 46090882 นิสิตปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สังกัดบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ทำการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง เรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4-MAT กับการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี " เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญามหาบัณฑิตโดยมี ดร.มาโนชญ์ ศิริพิทักษ์เดช เป็นอาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าด้วยตนเอง

ในการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับเรื่องนี้ จำเป็นต้องเก็บข้อมูลจากหน่วยงานของท่าน บัณฑิตวิทยาลัย จึงใคร่ขอความอนุเคราะห์จากท่าน โปรดอนุญาตให้นิสิตดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลในการศึกษาค้นคว้าซึ่งจะเป็นประโยชน์ทางวิชาการต่อไป บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร หวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงจะได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี และขอขอบคุณอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาให้ความอนุเคราะห์

ขอแสดงความนับถือ

(รองศาสตราจารย์ ดร.เพ็ญศิริ นภีรงค์)
รองคณบดีฝ่ายบริหารและประกันคุณภาพ รักษาราชการแทน
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร

งานบริการการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย
โทร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 116 - 119
โทรสาร 0 - 5526 - 1169 - 70 ต่อ 111

บันทึกข้อความ

โรงเรียนนาวังวิทยา
รับที่ 345/48 245
31 / ม.ค. / 48
ผู้รับ

ส่วนราชการ โรงเรียนนาวังวิทยา

ที่.....วันที่ 31 ตุลาคม 2548

เรื่อง ขออนุญาตทดลองเครื่องมือเพื่อเก็บข้อมูลวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนนาวังวิทยา

ด้วยข้าพเจ้า นายเฉลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ ตำแหน่ง ครู โรงเรียนนาวังวิทยาและคณะนิสิตระดับบัณฑิตศึกษา ภาคฤดูร้อน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4 MAT กับ รูปแบบการสอนแบบ CAI วิชาคณิตศาสตร์ ค41202 เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอุบลราชธานี เขต 2" และได้สร้างเครื่องมือในการทดลองในครั้งนี้เสร็จเรียบร้อยแล้ว

เพื่อให้การวิจัยครั้งนี้บรรลุตามวัตถุประสงค์ของการวิจัย ข้าพเจ้าจึงขออนุญาตทดลองเครื่องมือที่สร้างขึ้นเพื่อหาประสิทธิภาพของเครื่องมือ โดยใช้กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนนาวังวิทยา จำนวน 60 คน

จึงเรียนมาเพื่อโปรดทราบและพิจารณาอนุญาต

(นายเฉลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์)
ครู

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียน
- นายเฉลิงศักดิ์ ขออนุญาต
ทดลองเครื่องมือเพื่อเก็บข้อมูลวิจัย

31 ม.ค. 48

- ทราบ
- อนุญาต

31 ม.ค. 48

ที่ ศธ 04184.228/ว. 773

โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร
อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี
34340

2 ธันวาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ผู้ร่วมวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนคำยางพิทยา

ด้วยนายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร ซึ่งเป็นนักศึกษาระดับปริญญาโท ภาคฤดูร้อน มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัย เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องวงกลม โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับวิธีการสอนแบบ 4 MAT โดยมีนางอรอนงค์ ไขเหลาคำ ข้าราชการครู โรงเรียนคำยางพิทยา เป็นผู้ร่วมวิจัยนั้น

เพื่อให้การวิจัยดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย บรรลุตามวัตถุประสงค์ โรงเรียนจึงขออนุญาตให้นางอรอนงค์ ไขเหลาคำ ข้าราชการครู โรงเรียนคำยางพิทยา ไปร่วมดำเนินการวิจัย ในวันที่ 6 – ธันวาคม 2548 ณ โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร โรงเรียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาดำเนินการต่อไป

ขอแสดงความนับถือ

(นายพชรพงศ์ ตรีเทพา)
ผู้อำนวยการสถานศึกษาโรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร

งานธุรการ
โทร 0-4549-6030
โทรสาร 0-4549-6031

ที่ ศธ 04184.228/ว. 773

โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร
อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี
34340

2 ธันวาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ผู้ร่วมวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนประชารัฐพัฒนาการ

ด้วยนายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร ซึ่งเป็นนักศึกษาระดับปริญญาโท ภาคฤดูร้อน มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัย เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องวงกลม โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับวิธีการสอนแบบ 4 MAT โดยมีนางศิริลักษณ์ แสงกระจาย ข้าราชการครู โรงเรียนประชารัฐพัฒนาการ เป็นผู้ร่วมวิจัยนั้น

เพื่อให้การวิจัยดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย บรรลุตามวัตถุประสงค์ โรงเรียนจึงขออนุญาตให้นางศิริลักษณ์ แสงกระจาย ข้าราชการครู โรงเรียนประชารัฐพัฒนาการ ไปร่วมดำเนินการวิจัย ในวันที่ 6 – 9 ธันวาคม 2548 ณ โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร โรงเรียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาดำเนินการต่อไป

ขอแสดงความนับถือ

(นายพชรพงศ์ ตรีเทพา)
ผู้อำนวยการสถานศึกษาโรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร

งานธุรการ
โทร 0-4549-6030
โทรสาร 0-4549-6031

ที่ ศธ 04184.228/ว. 773

โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร
อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี
34340

2 ธันวาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ผู้ร่วมวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนบ้านโนนเขืองดงเจริญ

ด้วยนายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร ซึ่งเป็นนักศึกษาระดับปริญญาโท ภาคฤดูร้อน มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัย เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องวงกลม โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับวิธีการสอนแบบ 4 MAT โดยมีนางเพ็ญจิตร สุจินพลัม ข้าราชการครู โรงเรียนบ้านโนนเขืองดงเจริญ เป็นผู้ร่วมวิจัยนั้น

เพื่อให้การวิจัยดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย บรรลุตามวัตถุประสงค์ โรงเรียนจึงขออนุญาตให้นางเพ็ญจิตร สุจินพลัม ข้าราชการครู โรงเรียนบ้านโนนเขืองดงเจริญ ไปร่วมดำเนินการวิจัย ในวันที่ 6 – 9 ธันวาคม 2548 ณ โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร โรงเรียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาดำเนินการต่อไป

ขอแสดงความนับถือ

(นายพชรพงศ์ ตรีเทพา)
ผู้อำนวยการสถานศึกษาโรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร

งานธุรการ
โทร 0-4549-6030
โทรสาร 0-4549-6031

ที่ ศธ 04184.228/ว. 773

โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร
อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี
34340

2 ธันวาคม 2548

เรื่อง ขอความอนุเคราะห์ผู้ร่วมวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนนาวังวิทยา

ด้วยนายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร ซึ่งเป็นนักศึกษาระดับปริญญาโท ภาคฤดูร้อน มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัย เรื่อง การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องวงกลม โดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนกับวิธีการสอนแบบ 4 MAT โดยมีนายเฉลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ ข้าราชการครู โรงเรียนนาวังวิทยา เป็นผู้ร่วมวิจัยนั้น

เพื่อให้การวิจัยดำเนินไปด้วยความเรียบร้อย บรรลุตามวัตถุประสงค์ โรงเรียนจึงขออนุญาตให้นายเฉลิงศักดิ์ ศุภฤกษ์ ข้าราชการครู โรงเรียนนาวังวิทยา ไปร่วมดำเนินการวิจัย ในวันที่ 6 – 9 ธันวาคม 2548 ณ โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร โรงเรียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าคงได้รับความอนุเคราะห์จากท่านด้วยดี ขอขอบคุณมา ณ โอกาสนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดพิจารณาดำเนินการต่อไป

ขอแสดงความนับถือ

(นายพชรพงศ์ ศรีเทพา)
ผู้อำนวยการสถานศึกษาโรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาคาร

งานธุรการ
โทร 0-4549-6030
โทรสาร 0-4549-6031

รับที่ 1595
6 ธ.ค. 48
ผู้รับ ✓ 250

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี

ที่............../2548 **วันที่** 6 เดือนธันวาคม พ.ศ. 2548

เรื่อง ขออนุญาตดำเนินการเก็บข้อมูลงานวิจัย

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ

ด้วยข้าพเจ้า นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน ตำแหน่ง ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ และคณะนิสิตระดับปริญญาโท ภาคฤดูร้อน มหาวิทยาลัยนเรศวร ได้ดำเนินการวิจัยเรื่อง "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรูปแบบการสอนแบบ 4 MAT กับ รูปแบบการสอนแบบ CAI เรื่อง วงกลม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ อำเภอโพธิ์ไทร จังหวัดอุบลราชธานี" และจะดำเนินการเก็บข้อมูลระหว่างวันที่ 6 – 9 ธันวาคม 2548

เพื่อให้การดำเนินการวิจัยเป็นไปด้วยความเรียบร้อยและบรรลุตามวัตถุประสงค์ ข้าพเจ้าขอความอนุเคราะห์จากโรงเรียน ดังนี้

1. ขออนุญาตใช้ห้อง English Lab
2. ขออนุญาตนำนักเรียนเข้าร่วมการทดลองในการวิจัยซึ่งมีรายชื่อตามที่แนบมาพร้อมนี้

จึงเรียนมาเพื่อโปรดทราบและพิจารณาอนุญาต

เรียน ผู้อำนวยการสถานศึกษา โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ
- เพื่อโปรดทราบ และพิจารณา

6 ธ.ค. 48

(นายเกรียงศักดิ์ ขจัดมลทิน)
ครู โรงเรียนโพธิ์ไทรพิทยาการ

- เห็นสมควรอนุญาต
๖ ธ.ค. ๔๘

๑ ทราบ
๒ อนุญาต ดำเนินการ
๖ ธ.ค. ๔๘

รายชื่อนักเรียนที่เข้าร่วมเก็บข้อมูลการวิจัย

ลำดับที่	ชื่อ - สกุล	ชั้น	ลำดับที่	ชื่อ - สกุล	ชั้น
1	น.ส.ณัฐติยา สิงห์มุ้ย	4/1	31	น.ส.ศันสนีย์ มีเลิศ	4/2
2	น.ส.มาลัย นันทรักษ์	4/1	32	นายวัชราชัย ปลื้มใจ	4/2
3	น.ส.จิราภร โสดา	4/1	33	น.ส.วิวริยา อ่างศิลป์	4/2
4	น.ส.จุฑามาศ วงศ์ราษฎร์	4/1	34	นายประจักร์ เกาเกลี้ยง	4/2
5	น.ส.มลิวัลย์ สายสด	4/1	35	นายปริญญา ภาพันธ์	4/2
6	นายทินกร กุลโชติ	4/1	36	น.ส.ปานหทัย กันหาไชย	4/2
7	น.ส.จิตติยาภร สิงห์น้อย	4/1	37	น.ส.พนิดา แสงแดง	4/2
8	น.ส.โสพิศ แก้วเนตร	4/1	38	น.ส.ลำไพร ศรีบ้านดู่	4/2
9	น.ส.จิฬาภรณ์ สมศรี	4/1	39	น.ส.ลัดดา ลาราษฎ์	4/2
10	น.ส.ลักขณา แคนแก้ว	4/1	40	น.ส.จิตรดา แสงแดง	4/2
11	น.ส.มลฤดี ทองทับ	4/1	41	น.ส.อักษร ปราบโสม	4/2
12	น.ส.วิภาวดี มีเลิศ	4/1	42	นายปิยณัฐ เพชรพันธ์	4/2
13	น.ส.ขวัญฤดี สิงห์โส	4/1	43	น.ส.เยาวลักษณ์ มีแวงแสง	4/2
14	นายวุฒิไกร พันโบ	4/1	44	น.ส.เกศินี คงทน	4/2
15	น.ส.สุดาวรรณ พันธ์เสถียร	4/1	45	น.ส.พัชดากร คำมงคล	4/2
16	นายสัจจา สรรพสาร	4/1	46	น.ส.สุชีรา เหล่าก้อนคำ	4/2
17	น.ส.ปรียา พิรักษา	4/1	47	น.ส.ศศิมาภรณ์ ไชยพันโท	4/2
18	น.ส.สิรินทร์ทิพย์ แก้วเนตร	4/1	48	น.ส.รัชนู มาตย์นอก	4/2
19	น.ส.สุธิดา ไชยพันโท	4/1	49	น.ส.อนงค์ สายทอง	4/2
20	น.ส.เพ็ญประภา พลแสน	4/1	50	น.ส.ดวงเดือน กุลโชติ	4/2
21	น.ส.วิลัย ปัญญาแก้ว	4/1	51	น.ส.จุฑาธิป วงศ์เคน	4/2
22	น.ส.นิตยา อินธิชิต	4/1	52	น.ส.จินตรา เทียนหอม	4/2
23	น.ส.รัตนพร คุณพาที	4/1	53	น.ส.ผุสรัตน์ พั่วแดง	4/2
24	น.ส.วราภรณ์ แก้วชิณ	4/1	54	น.ส.ภาวิณี กุมภาพงษ์	4/2
25	น.ส.สุจิตรา ศรีงาม	4/1	55	น.ส.อัจฉราพร สาทอนราช	4/2
26	น.ส.เบญจพร ไชยพันโท	4/1	56	น.ส.จุรีรัตน์ เหล่าบุตรศรี	4/3
27	น.ส.นิตยา มูลรัตน์	4/1	57	นายประเวช ฮสราช	4/3
28	นายนันทวัฒน์ วรรณสุพริ้ง	4/1	58	น.ส.สมปอง สองศรี	4/3
29	นายเข็มชาติ ทุมบู่	4/1	59	น.ส.วิลดา อินธิชิต	4/3
30	น.ส.กัลยาณี พรมสำลี	4/2	60	น.ส.สุพรรณี ขันสิงห์	4/3