

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้มุ่งศึกษาการสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสมแบบต่าง ๆ สำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ พิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์แบบต่าง ๆ สำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์จากค่าของเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม และเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติคือ RSM และตัวแบบ Kriging ที่สร้างจากข้อมูลที่ได้จากแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่แตกต่างกัน โดยมีทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

ประเภทของแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์

ขั้นตอนวิธีการสุ่มค้น เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมและการสลับสมาชิก

ตัวแบบทางสถิติ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

โดยมีรายละเอียดดังนี้

ประเภทของแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์

การสร้างแผนการทดลองเป็นหนึ่งในกระบวนการของ CSE ที่มีความสำคัญเป็นอย่างมาก เนื่องจากแผนการทดลองที่เหมาะสมจะช่วยให้ตัวแบบทางสถิติที่สร้างจากข้อมูลที่ได้จากแผนการทดลองดังกล่าวมีความแม่นยำในการพยากรณ์สูง ตลอดจนทำให้การทดลองมีประสิทธิภาพมากขึ้น ดังนั้นในการทำวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยต้องการศึกษาการสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสมสำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ โดยอาศัยแผนการทดลองตั้งต้นที่แตกต่างกัน 3 แบบ ได้แก่ แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์อย่างสุ่ม แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สมมาตรและแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สร้างจากหลักการแถวลำดับเชิงตั้งฉาก ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์อย่างสุ่ม (Random Latin hypercube designs: RLHD)

แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์อย่างสุ่ม (Random Latin hypercube designs: RLHD) สำหรับ CSE เป็นแผนการทดลองที่สร้างจากแผนการสุ่มตัวอย่างแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ (Latin hypercube sampling: LHS) (Fang, Li and Sudjianto, 2006, p. 47)

แผนการทดลองดังกล่าวถูกนำเสนอเป็นครั้งแรกโดย McKay, Beckman and Conover (1979) เป็นแผนการทดลองของเมทริกซ์ X ประกอบด้วย n แถว d สดมภ์ เมื่อ n คือจำนวนจุดทดลอง และ d คือจำนวนตัวแปรอิสระ สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $RLHD(n,d)$ และจำนวนแผนการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $(n!)^d$ ข้อดีของ RLHD คือ เป็นแผนการทดลองที่เน้นการกระจายของจุดทดลองเพื่อเติมเต็มปริภูมิของการทดลองให้มากที่สุดและการกำหนดจุดทดลองสำหรับตัวแปรอิสระต่าง ๆ ค่อนข้างยืดหยุ่น ข้อจำกัดของ RLHD คือ หากมิติปัญหามีขนาดใหญ่ขึ้น จะทำให้บริเวณในการค้นหาเพิ่มมากขึ้น ส่งผลให้การค้นหาแผนการทดลองแบบ RLHD ที่เหมาะสมทำได้ยากและใช้เวลานาน

ในอดีตนั้นการสร้างแผนการทดลองแบบ RLHD จะสร้างโดยใช้แนวคิดของการสุ่มตัวอย่างแบบแบ่งชั้นภูมิ (Stratified sampling) (Fang, Li and Sudjianto, 2006) แนวคิดดังกล่าวจะทำให้จุดทดลองในบริเวณย่อย (Subregion) ทั้งหมดของปริภูมิทดลองถูกสุ่มด้วยความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน ซึ่ง LHS จะคำนวณจาก

$$X_{ij} = \frac{\pi_{ij} - U_{ij}}{n} \quad (1)$$

โดยที่ $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \dots, \pi_{id}$ คือการเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) อย่างสุ่มที่อิสระกันของ $\{1, 2, \dots, d\}$ และ U_{ij} คือค่าของตัวแปรสุ่มที่อิสระกันของ π_{ij} มีการแจกแจงแบบ $U(0,1)$ มีมิติ $n \times d$ เมื่อ $(i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, d)$

ตัวอย่างที่ 1 การสร้าง RLHD กรณี $n=8, d=2$ โดยใช้เทคนิค LHS

การสร้าง LHS มีขั้นตอนการสร้างดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างเมทริกซ์ของ π_{ij}

การสร้างเมทริกซ์ของ π_{ij} ทำได้จากการสุ่มค่ามาใส่ในแต่ละสดมภ์โดยการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของสมาชิก $\{1, 2, \dots, 8\}$ สมมติสมาชิกที่สุ่มได้มีดังต่อไปนี้

$$\pi_{i1} = \{2, 5, 1, 7, 4, 8, 3, 6\} \text{ และ } \pi_{i2} = \{5, 8, 3, 6, 1, 4, 7, 2\}$$

ดังนั้น $RLHD(8,2)$ คือ

$$\pi_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 4 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 สร้างเมทริกซ์ของ U_{ij}

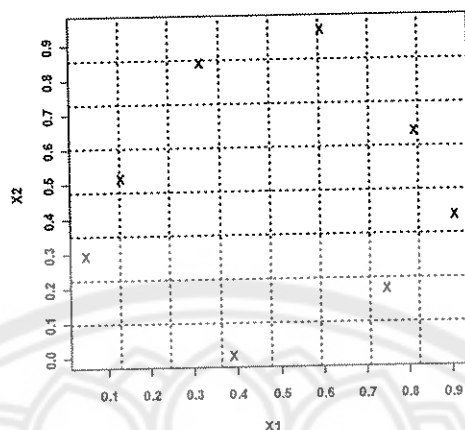
ในตัวอย่างนี้ U_{ij} เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 8×2 สมาชิกในแต่ละสดมภ์ได้มาจากการสุ่มค่าในช่วง $[0,1]^2$ ดังนั้นเมทริกซ์ของ U_{ij} คือ

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} 0.9501 & 0.8214 \\ 0.2311 & 0.4447 \\ 0.6068 & 0.6154 \\ 0.4860 & 0.7914 \\ 0.8913 & 0.9218 \\ 0.7621 & 0.7382 \\ 0.4565 & 0.1763 \\ 0.0185 & 0.4057 \end{bmatrix}$$

จากนั้นจึงแทนค่า π_{ij} และ U_{ij} ในสมการ (1) จะได้ LHS ดังต่อไปนี้

$$X = \frac{\pi_{ij} - U_{ij}}{n} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 4 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.9501 & 0.8214 \\ 0.2311 & 0.4447 \\ 0.6068 & 0.6154 \\ 0.4860 & 0.7914 \\ 0.8913 & 0.9218 \\ 0.7621 & 0.7382 \\ 0.4565 & 0.1763 \\ 0.0185 & 0.4057 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.1312 & 0.5223 \\ 0.5961 & 0.9444 \\ 0.0491 & 0.2981 \\ 0.8143 & 0.6510 \\ 0.3886 & 0.0098 \\ 0.9047 & 0.4077 \\ 0.3179 & 0.8530 \\ 0.7477 & 0.1993 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำ LHS มาทำการลงจุดทดลองเพื่อดูการกระจาย ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังภาพ 2



ภาพ 2 แสดงการกระจายของจุดทดลองสำหรับแผนการทดลอง LHS

จากภาพ 2 จะเห็นได้ว่า จุดทดลองจำนวน 8 จุดทดลองจะกระจายอยู่ส่วนใดส่วนหนึ่งภายในเส้นตาราง (Grid line) ในแต่ละช่องของปริภูมิทดลอง

ในเวลาต่อมาได้มีผู้พัฒนาการสร้าง RLHD โดยใช้แผนการสุ่มตัวอย่างแบบละตินไฮเพอร์คิวบ์ที่จุดกึ่งกลาง (Midpoint Latin hypercube sampling: MLHS หรือ Centered Latin hypercube sampling) แทน LHS ซึ่งวิธีดังกล่าวจะตัดพจน์ U_{ij} ในสมการ (1) ที่เกิดจากการสุ่มค่าของจำนวนที่มีการแจกแจงแบบ $U(0,1)$ ดังนั้น MLHS ใหม่ที่มีโครงสร้างแลตทิซ (Lattice structure) คือ

$$X_{ij} = \frac{\pi_{ij} - 0.5}{n} \quad (2)$$

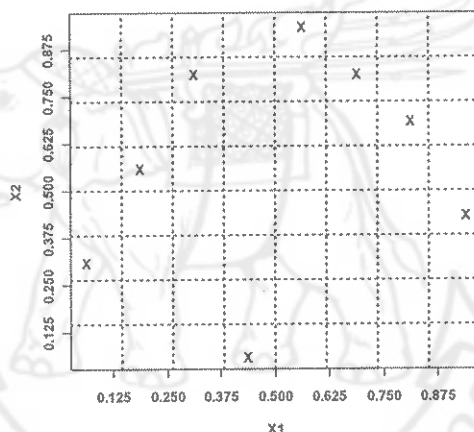
และเมื่อทำการลงจุดทดลองที่คำนวณได้จากสมการ (2) จุดทดลองดังกล่าวจะอยู่บริเวณจุดกึ่งกลางในแต่ละเซลล์ของปริภูมิทดลอง

ตัวอย่างที่ 2 การสร้าง RLHD กรณี $n=8, d=2$ โดยใช้เทคนิค MLHS

จากตัวอย่างที่ 1 เมื่อแทนที่สมาชิกในเมทริกซ์ U_{ij} ด้วย 0.5 จะได้เมทริกซ์ของแผนการทดลองแบบ MLHS คือ

$$X = \frac{\pi_y - 0.5}{n} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 4 & 1 \\ 8 & 4 \\ 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.5625 \\ 0.5625 & 0.9375 \\ 0.0625 & 0.3125 \\ 0.8125 & 0.6875 \\ 0.4375 & 0.0625 \\ 0.9375 & 0.4375 \\ 0.3125 & 0.8125 \\ 0.6875 & 0.1875 \end{bmatrix}$$

เมื่อนำ MLHS มาทำการลงจุดทดลองเพื่อดูการกระจาย ผลลัพธ์ที่ได้แสดงดังภาพ 3



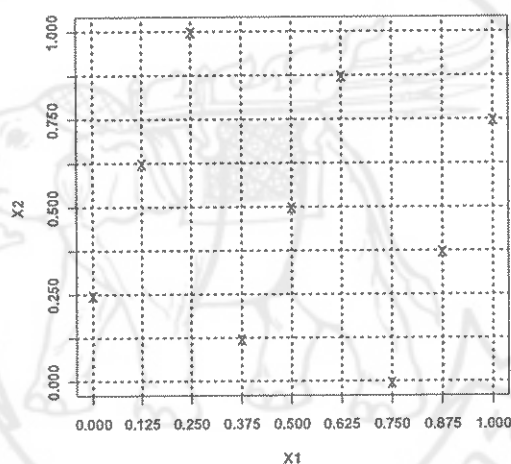
ภาพ 3 แสดงการกระจายของจุดทดลองสำหรับแผนการทดลอง MLHS

จากภาพ 3 จะเห็นได้ว่า เมื่อทำการลงจุดทดลองของ RLHD โดยใช้เทคนิค MLHS จะเห็นได้ว่า จุดทดลองจำนวน 8 จุดทดลองจะกระจายอยู่บริเวณจุดกึ่งกลางของเส้นตารางในแต่ละช่องของปริภูมิทดลอง

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นพัฒนาการของการสร้างแผนการทดลองแบบ RLHD แต่ในทางปฏิบัติสามารถสร้างได้ง่ายขึ้นโดยการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ในแต่ละสดมภ์ของแผนการทดลอง ดังนั้นสดมภ์จำนวน d สดมภ์ จะถูกรวมเข้าด้วยกันเป็นแผนการทดลองของเมทริกซ์ X ที่มี n แถวและ d สดมภ์ ดังเมทริกซ์ของแผนการทดลองต่อไปนี้

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_d \\ x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix}_{n \times d}$$

กำหนดให้ X_{ij} แทนสมาชิกของจุดทดลองที่ i ของตัวแปรอิสระตัวที่ j เมื่อ $i=1,2,\dots,n$ และ $j=1,2,\dots,d$ และการลงจุดทดลองจะลงบริเวณขอบบนทางขวาของแต่ละเส้นตาราง ดังแสดงในภาพ 4



ภาพ 4 แสดงการกระจายของจุดทดลองสำหรับแผนการทดลอง RLHD ที่ลงจุดทดลองบริเวณขอบบนทางขวาของเส้นตาราง

จากการลงจุดทดลองที่แสดงในภาพ 4 จะเห็นได้ว่า จุดทดลองกระจายบริเวณมุมบนทางขวาของเส้นตารางในแต่ละช่องของปริภูมิทดลอง ซึ่งการลงจุดทดลองสามารถลงบริเวณใดก็ได้ของเส้นตาราง อาจจะเป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตารางหรือบริเวณมุมบนทางขวาของเส้นตารางต่างให้ผลลัพธ์ที่ไม่แตกต่างกัน ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้จึงเลือกให้การลงจุดทดลองในบริเวณมุมบนทางขวาของเส้นตาราง

จากที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการสร้าง RLHD กรณีข้อมูลเป็นจำนวนจริง แต่การสร้าง RLHD จากข้อมูลที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ จะทำให้แผนการทดลองที่สร้างง่ายต่อการคำนวณ ซึ่ง Ye, Li and Sudjianto (2000) ได้นำเสนอเกี่ยวกับการแปลงข้อมูลจากจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]$

และเนื่องจาก RLHD แต่ละแผนการทดลองจะประกอบด้วยตัวแปรอิสระ d ตัว ดังนั้นช่วง $[0,1]$ ที่ต้องพิจารณาคือ

$$\underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]}_{d\text{-times}} = [0,1]^d$$

สูตรที่ใช้ในการแปลงข้อมูลให้อยู่ในช่วง $[0,1]$ สำหรับตัวแปรอิสระแต่ละตัว (Ye, Li and Sudjianto, 2000) คือ

$$\{0, 1/(n-1), 2/(n-1), \dots, 1\} \quad (3)$$

เมื่อแปลงข้อมูลให้อยู่ในช่วง $[0,1]^d$ โดยใช้สูตรในการแปลงจากสมการ (3) เรียบร้อยแล้ว จากนั้นจึงนำสมาชิกที่แปลงโดยสมการ (3) ในแต่ละสดมภ์ของ RLHD มาเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่ม

ตัวอย่างที่ 3 แสดงการสร้าง RLHD กรณีแปลงค่าตัวแปรอิสระจากจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ เมื่อ $n=9, d=2$

เนื่องจากแผนการทดลองที่พิจารณาคือ $RLHD(9,2)$ มีมิติ 9×2 ดังนั้นจำนวนแผนการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ $(n!)^d = (9!)^2 \approx 1.3168 \times 10^{11}$ แผนการทดลอง

และเนื่องจากข้อมูลในตัวอย่างนี้เป็นจำนวนจริงและแต่ละสดมภ์จะประกอบด้วย การเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ดังนั้นถ้าทำการแปลงข้อมูลที่เป็นจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ โดยใช้สูตรในการแปลงจากสมการ (3) จะได้เซตของข้อมูลที่จะนำไปเรียงสับเปลี่ยนในแต่ละสดมภ์ของแผนการทดลองดังต่อไปนี้

$$\left\{0, \frac{1}{9-1}, \frac{2}{9-1}, \frac{3}{9-1}, \frac{4}{9-1}, \frac{5}{9-1}, \frac{6}{9-1}, \frac{7}{9-1}, \frac{8}{9-1}\right\} = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

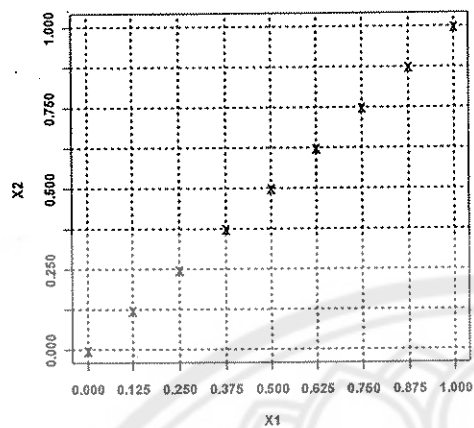
และเมื่อนำ $\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}, 1\right\}$ มาเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มในแต่ละสดมภ์ของแผนการทดลอง จะได้เมทริกซ์ของแผนการทดลองดังต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccc}
 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{6}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{7}{8} & \frac{7}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & 1 \\ \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{6}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{7}{8} & 0 \\ 1 & \frac{6}{8} \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{2}{8} & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{6}{8} & 0 \\ \frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{6}{8} \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & \frac{2}{8} \\ 1 & \frac{4}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 \\ 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{6}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix} &
 \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{4}{8} \\ \frac{6}{8} & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & 1 \\ \frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & \frac{6}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & 0 \end{bmatrix} \\
 (1) & (2) & (3) & (4) & (5)
 \end{array}$$

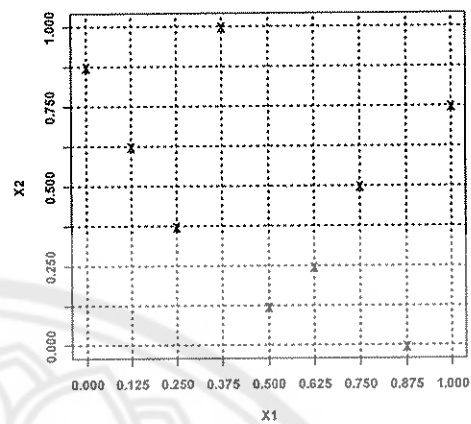
$(9!)^2 \approx 1.3168 \times 10^{11}$ แผนการทดลอง

เมื่อนำแผนการทดลองดังกล่าวมาวาดกราฟเพื่อดูการกระจายของจุดทดลอง จะ

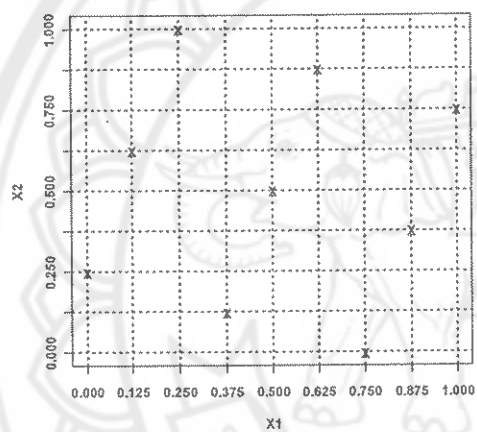
ได้ผลดังภาพ 5



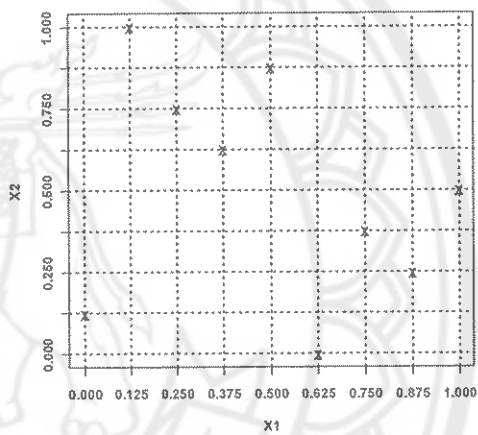
(1)



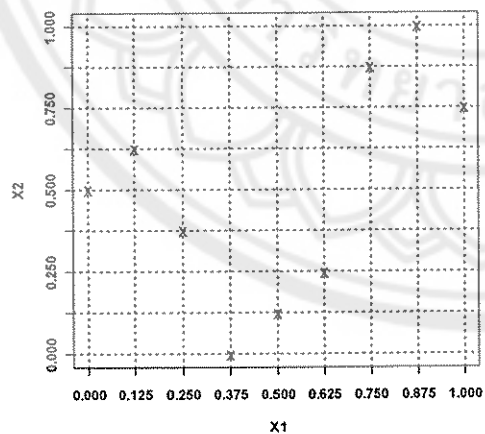
(2)



(3)



(4)



(5)

ภาพ 5 แสดงการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 9 x 2

จากเมทริกซ์ของแผนการทดลองและการกระจายของจุดทดลองในภาพ 5 แสดงให้เห็นว่า แผนการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ของแผนการทดลองแบบ RLHD มีจำนวนมาก และแผนการทดลองที่สมาชิกในเมทริกซ์ของแผนการทดลองแตกต่างกัน จะส่งผลให้การกระจายของจุดทดลองแตกต่างกันตามไปด้วย

2. แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สมมาตร (Symmetric Latin hypercube designs: SLHD)

Ye, Li and Sudjianto (2000) เป็นผู้นำเสนอการสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สมมาตร (Symmetric Latin hypercube designs: SLHD) ในเวลาต่อมา แนวคิดดังกล่าวได้ถูกนำมาใช้โดย Fang, Li and Sudjianto (2006; Na-udom, 2008) SLHD เป็นแผนการทดลองที่เป็นกรณีพิเศษของ LHD ที่สมาชิกในแผนการทดลองมีความสมมาตรกัน สามารถค้นหาแผนการทดลองแบบ LHD ที่เหมาะสมได้อย่างมีประสิทธิภาพ การกำหนดจุดทดลองสำหรับตัวแปรอิสระต่างๆ ค่อนข้างยืดหยุ่นและเป็นแผนการทดลองที่ช่วยลดการสูญเสียเวลาในการประมวลผล สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $SLHD(n, d)$ ซึ่งแผนการทดลองแบบ SLHD จะเป็นแผนการทดลองที่มีมิติ $n \times d$ เมื่อ n คือจำนวนจุดทดลอง และ d คือจำนวนตัวแปรอิสระ

แผนการทดลองแบบ SLHD ที่ถูกสร้างโดย Ye, Li and Sudjianto (2000) นี้จะมีการสะท้อน (Reflection) ของจุดทดลอง กล่าวคือถ้าจุดทดลองใดจุดทดลองหนึ่งถูกเลือกเข้ามาในแผนการทดลอง แล้วจะมีหนึ่งจุดทดลองที่เป็นตัวสะท้อนของจุดทดลองดังกล่าว จะต้องถูกเลือกมาอยู่ในแผนการทดลองเช่นเดียวกัน เพื่อคงความสมมาตรในแผนการทดลอง

นั่นคือ ถ้าจุดทดลองจุดใดจุดหนึ่งในแผนการทดลองคือ $(a_1, a_2, \dots, a_d)$ ถูกเลือกเข้ามาในแถวใดแถวหนึ่งของแผนการทดลอง แล้วจะมีอีกจุดทดลองหนึ่งที่เป็นตัวสะท้อนของจุดทดลองดังกล่าวคือ $(n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_d)$ จะต้องถูกเลือกให้อยู่ในแผนการทดลองเช่นเดียวกันเพื่อคงความสมมาตรไว้

การสร้างแผนการทดลองแบบ SLHD แบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่และกรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่ ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 กรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่

การสร้าง SLHD กรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ นั้น จะพิจารณาการสะท้อนของแถวในแผนการทดลองทั้งหมดทีละคู่ กล่าวคือ ถ้า $(a_1, a_2, \dots, a_d)$ เป็นสมาชิกในแถวหนึ่งของเมทริกซ์ของแผนการทดลอง แล้วเวกเตอร์ $(n+1-a_1, n+1-a_2, \dots, n+1-a_d)$ จะเป็นสมาชิก ในแถวอื่น ๆ ของเมทริกซ์ของแผนการทดลอง เมื่อพิจารณาจนครบทุกแถวทุกคู่แล้วพบว่า

เมทริกซ์ของแผนการทดลองมีการสะท้อนของสมาชิกในแต่ละคู่ของแถวในเมทริกซ์ของแผนการทดลอง จะเรียกเมทริกซ์ของแผนการทดลองดังกล่าวว่า $SLHD(n, d)$

เมื่อสร้าง $SLHD$ เสร็จแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแปลงค่าของข้อมูลในแผนการทดลองที่เป็นจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0, 1]^d$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD

ตัวอย่างที่ 4 แสดงการสร้าง $SLHD$ กรณี $n=10, d=2$

การสร้างเมทริกซ์ของแผนการทดลองใน $SLHD$ กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ จะพิจารณาแถวของสมาชิกในเมทริกซ์ของแผนการทดลองที่ละคู่ที่มีการสะท้อนซึ่งตัวอย่างนี้ สมาชิกในแต่ละสดมภ์เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1, 2, \dots, 10\}$

ถ้าพิจารณาสมาชิกในเมทริกซ์ของแผนการทดลองคู่แรก สมมติสมาชิกในแถวที่ 1 ที่สุ่มได้คือ $(a_1, a_2) = (1, 6)$ จะได้ว่า

$(n+1-a_1, n+1-a_2) = (10+1-1, 10+1-6) = (10, 5)$ เป็นสมาชิกแถวอื่น ๆ ในเมทริกซ์ของแผนการทดลอง ซึ่งกรณีนี้คือสมาชิกในแถวที่ 10 ของเมทริกซ์ของแผนการทดลองและจะเห็นได้ว่าสมาชิกทั้ง 2 แถวดังกล่าวมีการสะท้อนกัน ซึ่งสมาชิกในแถวของคู่อื่น ๆ สามารถสร้างได้ในทำนองเดียวกันดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น กล่าวคือ

แถวที่มีสมาชิกคือ (2, 2) จะสะท้อนกับแถวที่มีสมาชิกคือ (9, 9)

แถวที่มีสมาชิกคือ (3, 1) จะสะท้อนกับแถวที่มีสมาชิกคือ (8, 10)

แถวที่มีสมาชิกคือ (4, 3) จะสะท้อนกับแถวที่มีสมาชิกคือ (7, 8)

แถวที่มีสมาชิกคือ (5, 7) จะสะท้อนกับแถวที่มีสมาชิกคือ (6, 4)

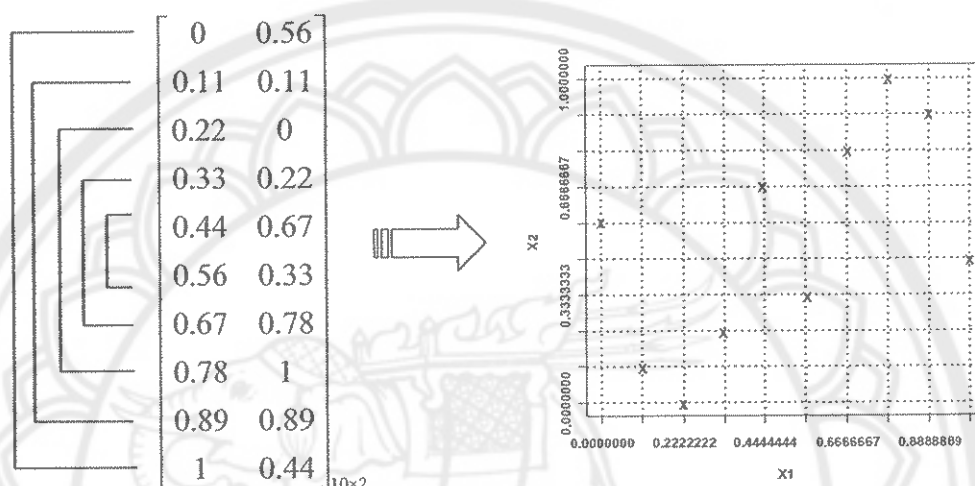
เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาสร้างเมทริกซ์ของแผนการทดลอง จะได้แผนการทดลอง

ดังต่อไปนี้

1	6
2	2
3	1
4	3
5	7
6	4
7	8
8	10
9	9
10	5

10×2

หลังจากได้แผนการทดลองที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงแล้ว จากนั้นจึงทำการแปลงสมาชิกในแผนการทดลองดังกล่าวให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD ดังนั้นเมทริกซ์ของแผนการทดลองใหม่ที่ได้และการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 10×2 แสดงในภาพ 6 ดังต่อไปนี้



ภาพ 6 แสดงเมทริกซ์ของแผนการทดลองและการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 10×2

จากเมทริกซ์ของแผนการทดลองที่แสดงในภาพ 6 จะเห็นได้ว่า มีจำนวนแถวที่สะท้อนกันทั้งหมด 5 คู่ และเมื่อพิจารณาแผนภาพแสดงการกระจายของจุดทดลองควบคู่กับเมทริกซ์ของแผนการทดลอง จะได้ว่า แผนการทดลองดังกล่าวมีความสมมาตร ดังนั้น แผนการทดลองที่ได้นี้จึงเป็นแผนการทดลองแบบ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่

2.2 กรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่

การสร้าง SLHD ในกรณีนี้จะเหมือนกับกรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ แต่สิ่งที่แตกต่างกันคือ กรณีนี้จะมีสมาชิกหนึ่งแถวซึ่งเป็นแกนกลางที่ไม่ถูกสะท้อนกับแถวใด ๆ โดยสมาชิกของแถวดังกล่าวจะมีค่าเท่ากันหมด คือมีค่าเท่ากับ $\frac{(n+1)}{2}$

ตัวอย่างที่ 5 แสดงการสร้าง SLHD กรณี $n=9, d=2$

การสร้างเมทริกซ์ของแผนการทดลองใน SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่ จะพิจารณาแถวของสมาชิกที่ละคู่ที่มีการสะท้อนกัน ซึ่งตัวอย่างนี้สมาชิกในแต่ละสดมภ์เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1, 2, \dots, 9\}$

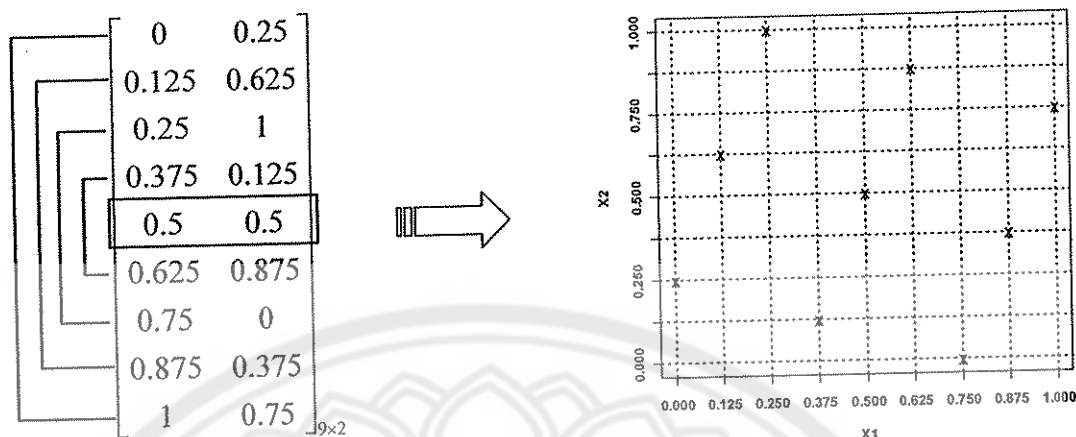
ถ้าพิจารณาคู่แรกในเมทริกซ์ของแผนการทดลอง สมมติสมาชิกในแถวที่ 1 ที่สุ่มได้คือ $(a_1, a_2) = (1, 3)$ จะได้ว่า $(n+1-a_1, n+1-a_2) = (9+1-1, 9+1-3) = (9, 7)$ เป็นสมาชิกในแถวอื่น ๆ ของเมทริกซ์ของแผนการทดลอง ซึ่งกรณีนี้คือสมาชิกในแถวที่ 9 และจะเห็นได้ว่าสมาชิกทั้ง 2 แถวดังกล่าวสะท้อนกัน ทั้งนี้สมาชิกในแถวของคู่อื่นๆ ในเมทริกซ์ของแผนการทดลองสามารถสร้างได้ในทำนองเดียวกันกับที่กล่าวมาข้างต้น ยกเว้นสมาชิกในแถวที่ 5 ที่มีสมาชิกคือ $(5, 5)$ จะเป็นแถวที่ไม่สะท้อนกับแถวใด ๆ เนื่องจากสมาชิกในแถวดังกล่าวคือ แกนกลางของเมทริกซ์ของแผนการทดลอง

เมื่อนำผลลัพธ์ที่ได้มาสร้างเมทริกซ์ของแผนการทดลอง จะได้แผนการทดลองดังต่อไปนี้

1	3
2	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
8	4
9	7

แกนกลาง = $\frac{(n+1)}{2} = \frac{9+1}{2} = 5$

หลังจากได้แผนการทดลองที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงแล้ว จากนั้นจึงทำการแปลงสมาชิกในแผนการทดลองดังกล่าวให้อยู่ในช่วง $[0, 1]^2$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD ดังนั้น เมทริกซ์ของแผนการทดลองใหม่ที่ได้และการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 9×2 แสดงในภาพ 7 ดังต่อไปนี้



ภาพ 7 แสดงเมทริกซ์ของแผนการทดลองและการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 9 x 2

จากเมทริกซ์ของแผนการทดลองที่แสดงในภาพ 7 จะเห็นได้ว่า มีจำนวนแถวที่สะท้อนกันทั้งหมด 4 คู่ และมีสมาชิกเพียงแถวเดียวที่ไม่สะท้อนกับแถวใดๆ อยู่ตรงกลาง ดังนั้นแผนการทดลองที่ได้นี้จึงเป็นแผนการทดลองแบบ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่

3. แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สร้างจากหลักการแถวลำดับเชิงตั้งฉาก (Orthogonal array-based Latin hypercube designs: OALHD)

Tang (1993) เป็นผู้นำเสนอการสร้าง LHD โดยใช้แถวลำดับเชิงตั้งฉากระหว่างสัณฐานของแผนการทดลองหรือที่เรียกว่า OALHD ในเวลาต่อมาได้มีนักวิจัยที่นำหลักการของ Tang (1993) มาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยคือ Leary, Bhaskar and Keane (2003) โดยกำหนดให้เมทริกซ์ A มีมิติ $n \times d$ เป็นแถวลำดับเชิงตั้งฉากของกำลัง (Strength) r (เมื่อ $2 \leq r \leq d$) ที่มี n จุดทดลอง d ตัวแปรอิสระ และ q ระดับ ซึ่งแต่ละเมทริกซ์ย่อยของ A ที่มีมิติ $n \times r$ ประกอบด้วยเวกเตอร์แถวทั้งหมดที่เป็นไปได้ มีมิติ $1 \times r$ ด้วยความถี่ λ ที่เหมือนกัน โดยที่ λ คือ ดัชนีของแถวลำดับ (Index of array) เมื่อ $\lambda = n/q^r$ สัญลักษณ์ที่ใช้ของแผนการทดลองแบบ OALHD คือ $OA(n, d, q, r)$

ก่อนที่จะสร้างแผนการทดลองแบบ OALHD ได้นั้น มิติปัญหาที่ใช้สร้างแถวลำดับเชิงตั้งฉากอย่างสุ่ม (Random orthogonal array) จะต้องหาค่าได้ก่อน ดังนั้นการวิจัยครั้งนี้จึงกำหนดมิติปัญหาโดยใช้หลักการที่นำเสนอโดย Tang (1993) แต่เนื่องจากมีบางมิติปัญหาที่ไม่สามารถสร้างแผนการทดลองโดยอาศัยมิติปัญหาจากหลักการของ Tang (1993) ได้ ผู้วิจัยจึงได้ประยุกต์ใช้หลักการของ Bose and Bush (1952) ควบคู่กับหลักการของ Tang (1993)

เพื่อให้สามารถสร้างแผนการทดลองได้ในทุกๆ มิติปัญหาที่ผู้วิจัยสนใจทำการศึกษา ซึ่งหลักการกำหนดมิติปัญหาของ Bose and Bush (1952) มีดังต่อไปนี้

Bose and Bush (1952) ได้นำเสนอการหาตัวแปรอิสระที่มีค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของแผนการทดลองแถวลำดับเชิงตั้งฉากกรณีกำลัง 2 ($r = 2$) โดยสมมติให้จำนวนจุดทดลอง (n) คงที่ ดังนั้นจำนวนตัวแปรอิสระ (d) สูงสุดที่เป็นไปได้ คำนวณได้จาก

$$\lambda q^r - 1 \geq \binom{d}{1}(q-1) + \dots + \binom{d}{u}(q-1)^u \quad (4)$$

โดยที่ $r = 2u$

ดังนั้นเมื่อพิจารณากรณีกำลัง 2 ($r = 2$)

เนื่องจาก $r = 2u$

จะได้ว่า $2 = 2u$

$\therefore u = 1$

เมื่อแทนค่า $r = 2$ และ $u = 1$ ในสมการ (4) ดังนั้นจำนวน d สูงสุดที่เป็นไปได้คือ

$$\lambda q^2 - 1 \geq \binom{d}{1}(q-1)$$

$$\lambda q^2 - 1 \geq d(q-1)$$

$$\therefore d \leq \frac{\lambda q^2 - 1}{q-1} \quad \text{เมื่อ } \lambda = \frac{n}{q^r}$$

ดังนั้นแผนการทดลองแถวลำดับเชิงตั้งฉากที่ได้คือ $OA(\lambda q^2, d, q, 2)$

จากหลักการที่นำเสนอโดย Tang (1993; Bose and Bush, 1952) ที่กล่าวถึงข้างต้น จะได้ว่าในการวิจัยครั้งนี้แผนการทดลองที่สร้างจากหลักการแถวลำดับเชิงตั้งฉากจากหลักการของ Tang (1993) คือ $OA(9, 2, 3, 2)$, $OA(16, 3, 4, 2)$, $OA(16, 4, 4, 2)$, $OA(16, 5, 4, 2)$, $OA(25, 6, 5, 2)$, $OA(49, 7, 7, 2)$, $OA(49, 8, 7, 2)$, $OA(64, 9, 8, 2)$ และ $OA(81, 10, 9, 2)$ และแผนการทดลองที่สร้างจากหลักการแถวลำดับเชิงตั้งฉากที่ได้จากการใช้หลักการของ Bose and Bush (1952) คือ $OA(16, 4, 4, 2)$ และ $OA(49, 7, 7, 2)$

สค
769
วช
วชทก
2554.

13 JUL 2011



15550828

หลังจากทราบมติปัญหาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ นำแผนการทดลองดังกล่าวมาสร้างชุดทดสอบ
แผนการทดลองแถวลำดับเชิงตั้งฉากอย่างสุ่ม จากนั้นจึงแปลงแผนการทดลองดังกล่าวให้เป็น
LHD หรือที่เรียกว่าแผนการทดลองแบบ OALHD โดยอาศัยหลักการของ Tang (1993) ดังมี
ขั้นตอนในการสร้างดังต่อไปนี้

ขั้นตอนวิธีในการสร้าง OALHD

Tang (1993) ได้นำเสนอการแปลงแถวลำดับเชิงตั้งฉากอย่างสุ่มให้เป็น LHD
หรือเรียกว่า OALHD มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดให้เมทริกซ์ของแผนการทดลองสำหรับแถวลำดับเชิงตั้งฉาก
อย่างสุ่มหรือ $OA(n, d, q, r)$ คือ A และคำนวณหาค่า λ เมื่อ $\lambda = n/q^r$

ขั้นตอนที่ 2 แทนที่แต่ละสดมภ์ของ A ทั้งหมด λq^{r-1} ตำแหน่งในแต่ละค่าของ k
โดยการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ

$$\{(k-1)\lambda q^{r-1} + 1, (k-1)\lambda q^{r-1} + 2, \dots, (k-1)\lambda q^{r-1} + \lambda q^{r-1} = k\lambda q^{r-1}\}$$

สำหรับทุก ๆ $k = 1, 2, \dots, q$ ทำจนครบทุกระดับในแต่ละสดมภ์ (ทำครบทุก k) จะได้
เมทริกซ์ A ที่สร้างขึ้นใหม่ โดยที่เมทริกซ์ใหม่ที่ได้จะถูกเรียกว่า OALHD

เมื่อได้แผนการทดลองแบบ OALHD แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะทำการแปลงค่าของข้อมูล
ในแผนการทดลองที่เป็นจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0, 1]^d$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD

ตัวอย่างที่ 6 การสร้าง OALHD กรณี $n = 9, d = 2$

การสร้าง OALHD กรณี $n = 9, d = 2$ มีขั้นตอนในการสร้างดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้าง $OA(9, 2, 3, 2)$ และคำนวณ λ

สร้างเมทริกซ์ของแผนการทดลองสำหรับแถวลำดับเชิงตั้งฉากอย่างสุ่ม นั่นคือสร้าง
 $OA(9, 2, 3, 2)$ ซึ่งแผนการทดลองดังกล่าวจะเป็นแผนการทดลองที่มีตัวแปรอิสระ 2 ตัว จำนวน
จุดทดลอง 9 จุดทดลองและจำนวนระดับ (q) เท่ากับ 3

จากแผนการทดลองดังกล่าวแสดงว่า ในแต่ละสดมภ์จะมีสมาชิก 1 จำนวน 3 ตัว
สมาชิก 2 จำนวน 3 ตัวและสมาชิก 3 จำนวน 3 ตัว ดังแสดงในเมทริกซ์ของแผนการทดลองต่อไปนี้

$$A = OA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

และเนื่องจาก $n=9, d=2, q=3$ และ $r=2$

$$\text{ดังนั้น } \lambda = \frac{n}{q^r} = \frac{9}{3^2} = 1$$

ขั้นตอนที่ 2 สร้าง OALHD

จากขั้นตอนที่ 1 เนื่องจาก $\lambda=1$

ดังนั้นจะต้องแทนที่ $\lambda q^{r-1} = (1)(3)^{2-1} = 3$ ตำแหน่งในแต่ละ k เมื่อ $k=1,2,3$

นั่นคือ

เมื่อ $k=1$ จะแทนที่สมาชิกในสดมภ์ที่มีค่าเท่ากับ 1 ของ A ด้วยการเรียง
สับเปลี่ยนของ

$$\{(1-1)(1)(3)^{2-1} + 1, (1-1)(1)(3)^{2-1} + 2, (1)(1)(3)^{2-1}\} = \{1, 2, 3\}$$

เมื่อ $k=2$ จะแทนที่สมาชิกในสดมภ์ที่มีค่าเท่ากับ 2 ของ A ด้วยการเรียง
สับเปลี่ยนของ

$$\{(2-1)(1)(3)^{2-1} + 1, (2-1)(1)(3)^{2-1} + 2, (2)(1)(3)^{2-1}\} = \{4, 5, 6\}$$

เมื่อ $k=3$ จะแทนที่สมาชิกในสดมภ์ที่มีค่าเท่ากับ 3 ของ A ด้วยการเรียง
สับเปลี่ยนของ

$$\{(3-1)(1)(3)^{2-1} + 1, (3-1)(1)(3)^{2-1} + 2, (3)(1)(3)^{2-1}\} = \{7, 8, 9\}$$

ดังนั้นเมทริกซ์ A ที่เกิดจากการแทนที่ คือ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 4 & 2 \\ 5 & 5 \\ 6 & 8 \\ 7 & 3 \\ 8 & 6 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = OALHD$$

และเมื่อแปลงข้อมูลจากจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ เมทริกซ์ของแผนการทดลองที่ได้คือ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.125 & 0.375 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.375 & 0.125 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.625 & 0.875 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0.875 & 0.625 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = OALHD$$

จากที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นการวางแผนการทดลองแบบตั้งต้นด้วยโครงสร้าที่แตกต่างกัน 3 แบบคือ แบบสุ่ม แบบสมมาตรและแบบเชิงตั้งฉาก แต่อย่างไรก็ตามแผนการทดลองที่เหมาะสมภายใต้การตั้งต้นที่แตกต่างกัน 3 แบบนี้จะต้องถูกค้นหาโดยใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้นควบคู่กับเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

ขั้นตอนวิธีการสืบค้น เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมและการสลับสมาชิก

1. ขั้นตอนวิธีการสืบค้น (Search algorithm)

ในการทดลองที่มีปัญหามีขนาดใหญ่ นั้น จำนวนแผนการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้ของแผนการทดลองแบบ LHD จะมีจำนวนมากและเป็นไปได้อย่างยากที่จะหาแผนการทดลองที่เหมาะสมจากแผนการทดลองทั้งหมดได้ ดังนั้นการใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้นควบคู่กับเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมจึงเป็นทางเลือกหนึ่งที่ช่วยแก้ไขปัญหาดังกล่าว

ขั้นตอนวิธีการสืบค้นที่ถูกใช้อย่างกว้างขวาง ได้แก่ SA, GA และ CP เป็นต้น แต่เนื่องจาก SA เป็นขั้นตอนวิธีการสืบค้นที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายและมีงานวิจัยได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ SA, GA และ CP ซึ่งผลการศึกษารายงานว่า SA เป็น ขั้นตอนวิธีการสืบค้นที่มีประสิทธิภาพเหนือกว่าทั้ง CP และ GA (Leary, et al., 2003; Rungrattanaubol and Na-udom, 2007) ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเลือกใช้ SA เป็นขั้นตอนวิธีการสืบค้นควบคู่กับเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมคือ เกณฑ์ ϕ_p เข้ามาช่วยในการตัดสินใจว่าจะหยุดการสืบค้นและรายงานแผนการทดลองที่เหมาะสมเมื่อใด

Morris and Mitchell (1995) ได้ดัดแปลงขั้นตอนวิธีการสืบค้นคือ SA เพื่อหาแผนการทดลองที่เหมาะสมโดยใช้เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมคือ เกณฑ์ ϕ_p หลักการทำงานของ SA จะใช้หลักการสลับสมาชิกของ 2 จุดทดลองอย่างสุ่มในแผนการทดลอง ซึ่งการสลับสมาชิกของขั้นตอนวิธีการสืบค้นใน SA จะพิจารณาคุณสมบัติของแผนการทดลองว่าดีขึ้นหรือไม่โดยใช้เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม ϕ_p

ขั้นตอนการทำงานของ SA มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กำหนดค่า t_0, I_{MAX}, FAC_t และ p

ขั้นตอนที่ 2 สุ่มเลือก X มา 1 แผนการทดลอง ที่มีมิติ $n \times d$

กำหนดให้ $X_{best} = X$

และ $t = t_0$

ขั้นตอนที่ 3 กำหนดให้ $FLAG = 0$

และ $I = 1$

ขั้นตอนที่ 4 กำหนดให้ $X_{ny} = X$

และสลับ 2 สมาชิกที่สุ่มเลือกมาจากสมมติของ X_{ny} ที่ถูกเลือกมาอย่างสุ่ม

ขั้นตอนที่ 5 ถ้า $\phi_p(X_{ny}) < \phi_p(X)$

จะกำหนดให้ $X = X_{ny}$

และ $FLAG = 1$

ถ้าเป็นกรณีอื่นคือ $e^{-[\phi_p(X_{try}) - \phi_p(X)]/t} = 1$

จะกำหนดให้ $X = X_{try}$

และ $FLAG = 1$

ขั้นตอนที่ 6 ถ้า $\phi_p(X_{try}) < \phi_p(X_{best})$

กำหนดให้ $X_{best} = X_{try}$

และ $I = 1$

ถ้าเป็นกรณีอื่น

$I = I + 1$

ขั้นตอนที่ 7 ถ้า $I < I_{MAX}$

กลับไปทำขั้นตอนที่ 4 ใหม่

ขั้นตอนที่ 8 ถ้า $FLAG = 1$

$t = t * FAC_t$

กลับไปทำขั้นตอนที่ 3 ใหม่

ขั้นตอนที่ 9 หยุดและรายงานค่า X_{best}

จากขั้นตอนการทำงานของ SA ข้างต้น เนื่องจาก SA จะทำงานได้นั้นจะต้องมีการกำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ดีที่สุดก่อน เพื่อให้ SA สามารถทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ ซึ่งพารามิเตอร์ตั้งต้นที่ต้องกำหนดเพื่อให้ SA ทำงานได้ (Rungrattanaubol and Na-udom, 2007) มีดังต่อไปนี้

1.1 t_0 คืออุณหภูมิความเย็นเริ่มต้น (Initial cooling temperature)

$$t_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left[\sum_{l=1}^d (X_i^{(l)} - X_j^{(l)})^2 \right]^{1/2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n d_{ij}}{n}$$

เมื่อ d_{ij} คือ ระยะทางแบบยูคลิด (Euclidean distance) ของสมาชิกในจุดทดลองที่ i และจุดทดลองที่ j ในเมตริกซ์ระยะทางแบบยูคลิด ซึ่งสมาชิกที่อยู่ด้านบนและด้านล่างของแนวทแยงมุมในเมตริกซ์ระยะทางแบบยูคลิดนั้นจะสมมาตรกัน ดังนั้นการวิจัย

ครั้งนี้จึงคำนวณระยะทางแบบยุคลิดโดยพิจารณาแค่สมาชิกที่อยู่ด้านบนของสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ระยะทางแบบยุคลิดเท่านั้น

1.2 I_{MAX} คือจำนวนการสับเปลี่ยนที่มากที่สุดเพื่อค้นหาแผนการทดลองที่ดีขึ้นก่อนมีการลดอุณหภูมิ โดยที่ค่านี้จะต้องมากพอที่จะทำให้กลไกของ SA หลุดออกจากค่าที่ดีที่สุดในระดับกลุ่ม (Local minimum) ในการศึกษาครั้งนี้จะกำหนดให้ $I_{MAX} = 100$

1.3 FAC , คืออัตราในการลดอุณหภูมิ ในการศึกษาครั้งนี้จะกำหนดให้ $FAC = 0.95$

1.4 p แทนจำนวนเต็มบวก (Positive integer) ในการศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยกำหนดให้ $p = 5$

2. เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม (Optimality criteria)

เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมนอกจากจะเป็นเกณฑ์หนึ่งที่เราหาไม่ได้สำหรับขั้นตอนวิธีการสืบค้นแล้ว ยังเป็นเกณฑ์ที่ใช้พิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลองเริ่มต้นแบบ LHD แบบต่าง ๆ เพื่อใช้หาแผนการทดลองที่เหมาะสมในแต่ละมิติปัญหา ซึ่งเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมที่ใช้ในการพิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลองแบบ LHD แบบต่าง ๆ สำหรับงานวิจัยในครั้งนี้คือ เกณฑ์แมกซ์มิน เกณฑ์ ϕ_p และค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลอง เนื่องจากเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมของการวิจัยในครั้งนี้ ได้แก่ เกณฑ์ ϕ_p และค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลองนั้นก่อนที่จะคำนวณได้จะต้องหาค่าระยะแบบยุคลิด (Morris and Mitchell, 1995) ก่อน ดังนั้นผู้วิจัยจึงจะกล่าวถึงรายละเอียดของเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมที่ใช้สำหรับการวิจัยครั้งนี้ ดังต่อไปนี้

ระยะทางแบบยุคลิด ใช้สำหรับการหาระยะห่างระหว่างจุดทดลอง ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ สมาชิกในแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับ 0 สมาชิกที่อยู่ด้านบนและด้านล่างของสมาชิกในแนวทแยงมุมจะสมมาตรกันและสูตรที่ใช้ในการหาระยะทางแบบยุคลิดคือ

$$d(x_i, x_j) = d_{ij} = \left[\sum_{l=1}^d (x_i^{(l)} - x_j^{(l)})^2 \right]^{1/2} \quad (5)$$

โดยที่ $d(x_i, x_j)$ หรือ d_{ij} คือ ระยะทางแบบยุคลิดของสมาชิกในจุดทดลองที่ i และจุดทดลองที่ j

l แทนจำนวนตัวแปรอิสระ เมื่อ $l = 1, 2, \dots, d$

และเมื่อนำจุดทดลอง i และ j ไปแทนค่าในสมการ (5) จะได้เมทริกซ์ระยะทางแบบยุคลิด (D) คือ

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

ตัวอย่างที่ 7 แสดงการหาระยะทางแบบยุคลิด กรณี $n=5, d=2$

สมมติแผนการทดลองแบบ RLHD ที่มีมิติ 5×2 คือ

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 1 & 0.25 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.75 & 0.5 \end{bmatrix}_{5 \times 2} \end{array}$$

การคำนวณหาระยะทางแบบยุคลิดจากแผนการทดลองดังกล่าว ทำได้ดังนี้
เนื่องจากสูตรในการหาระยะทางแบบยุคลิดคือ

$$d(x_i, x_j) = d_{ij} = \left[\sum_{l=1}^d (x_i^{(l)} - x_j^{(l)})^2 \right]^{1/2}$$

$$\text{ดังนั้น } d_{ij} = \left[\sum_{l=1}^2 (x_i^{(l)} - x_j^{(l)})^2 \right]^{1/2}$$

จึงได้ว่า

$$d_{11} = \left[\sum_{l=1}^2 (x_1^{(l)} - x_1^{(l)})^2 \right]^{1/2} = \left[(x_1^{(1)} - x_1^{(1)})^2 + (x_1^{(2)} - x_1^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \left[(0.25 - 0.25)^2 + (0.75 - 0.75)^2 \right]^{1/2} = 0$$

$$d_{12} = \left[\sum_{l=1}^2 (x_1^{(l)} - x_2^{(l)})^2 \right]^{1/2} = \left[(x_1^{(1)} - x_2^{(1)})^2 + (x_1^{(2)} - x_2^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \left[(0.25 - 1)^2 + (0.75 - 0.25)^2 \right]^{1/2} = 0.9013878 = d_{21}$$

$$d_{13} = \left[\sum_{l=1}^2 (x_1^{(l)} - x_3^{(l)})^2 \right]^{1/2} = \left[(x_1^{(1)} - x_3^{(1)})^2 + (x_1^{(2)} - x_3^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \left[(0.25 - 0.5)^2 + (0.75 - 0)^2 \right]^{1/2} \\ = 0.7905694 = d_{31}$$

⋮

$$d_{55} = \left[\sum_{l=1}^2 (x_5^{(l)} - x_5^{(l)})^2 \right]^{1/2} = \left[(x_5^{(1)} - x_5^{(1)})^2 + (x_5^{(2)} - x_5^{(2)})^2 \right]^{1/2} = \left[(0.75 - 0.75)^2 + (0.5 - 0.5)^2 \right]^{1/2} = 0$$

ดังนั้นเมื่อนำค่าที่คำนวณได้มาใส่ในเมทริกซ์ระยะทางแบบยุคลิด จะได้เมทริกซ์ระยะทางแบบยุคลิดคือ

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.9013878 & 0.7905694 & 0.3535534 & 0.559017 \\ 0.9013878 & 0 & 0.559017 & 1.25 & 0.3535534 \\ 0.7905694 & 0.559017 & 0 & 1.118034 & 0.559017 \\ 0.3535534 & 1.25 & 1.118034 & 0 & 0.9013878 \\ 0.559017 & 0.3535534 & 0.559017 & 0.9013878 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

เมื่อคำนวณหาระยะทางแบบยุคลิดแล้วขั้นตอนต่อไปจะกล่าวถึงเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมที่ใช้พิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลอง ได้แก่ เกณฑ์แมกซิมิน เกณฑ์ ϕ_p และค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลอง ดังรายละเอียดต่อไปนี้

2.1 เกณฑ์แมกซิมิน (Maximin distance criterion)

เกณฑ์แมกซิมิน (Maximin distance criterion) ถูกพัฒนาโดย Johnson, Moore and Ylvisaker (1990) ต่อมา Morris and Mitchell (1995; Ye, Li and Sudjianto, 2000) ได้นำเกณฑ์ดังกล่าวมาใช้ ซึ่งเกณฑ์แมกซิมินเป็นการพิจารณาสมาชิกที่อยู่ด้านบนของสมาชิกแนวทแยงมุมในเมทริกซ์ระยะทางแบบยุคลิด เพื่อหาระยะทางแบบยุคลิดที่มีค่าต่ำที่สุดของแผนการทดลองแบบ LHD จากนั้นจึงนำค่าต่ำที่สุดของระยะทางแบบยุคลิดในแต่ละ

แผนการทดลองมาพิจารณาเพื่อหาระยะทางแบบยุคลิดที่มีค่าสูงที่สุด สามารถพิจารณาได้จากสมการต่อไปนี้

$$\text{maximin} = \max_{i,j} \min d(X_i, X_j); i \neq j; 1 \leq i, j \leq n \quad (6)$$

โดยที่ $d(X_i, X_j)$ แทนระยะทางแบบยุคลิดของสมาชิกในจุดทดลองที่ i และจุดทดลองที่ j

การวิจัยครั้งนี้จะสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสมแบบต่าง ๆ จากขั้นตอนวิธีการสุ่มค้น โดยใช้แผนการทดลองตั้งต้นที่แตกต่างกัน 10 แผนการทดลอง และจากแผนการทดลอง 10 แผนการทดลองนั้นจะคำนวณค่าเมทริกซ์ของระยะทางแบบยุคลิดได้ 10 เมทริกซ์ จากนั้นนำเมทริกซ์ของระยะทางแบบยุคลิดแต่ละเมทริกซ์มาพิจารณาเพื่อหาค่าต่ำสุดของระยะทางแบบยุคลิดจำนวน 10 ค่า แล้วนำค่าทั้ง 10 ค่ามาเฉลี่ยกัน หลังจากได้ค่าต่ำสุดโดยเฉลี่ยของระยะทางแบบยุคลิดในแต่ละแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสมที่แตกต่างกันแล้ว แผนการทดลองใดที่ค่าต่ำสุดโดยเฉลี่ยของระยะทางแบบยุคลิดมีค่ามากที่สุดจะเป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุดในแต่ละมิติปัญหา

2.2 เกณฑ์ ϕ_p (ϕ_p criterion)

เกณฑ์ ϕ_p ถูกนำเสนอโดย Morris and Mitchell (1995) เป็นเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมที่พัฒนามาจากเกณฑ์แมกซิมิน คำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

$$\phi_p = \left[\sum_{j=1}^m J_j d_j^{-p} \right]^{1/p} \quad (7)$$

โดยที่ d_j คือระยะทาง (Distance list) $(d_1, d_2, \dots, d_m)$ ซึ่ง $d_1 < d_2 < \dots < d_m$

J_j คือดัชนี (Index list) $(J_1, J_2, \dots, J_m)$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ของจุดทดลองในแผนการทดลองที่ถูกแยกออกโดยระยะทาง d_j

p แทนจำนวนเต็มบวก ในการวิจัยครั้งนี้จะใช้ $p=5$ เนื่องจากผลการศึกษาของ Morris and Mitchell (1995) พบว่า p ที่เหมาะสมสำหรับเกณฑ์ ϕ_p คือ 5

และ m มีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง $\binom{n}{2}$ เนื่องจากเราพิจารณาเมทริกซ์เฉพาะสมาชิกด้านบนของสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ระยะทาง

Jin, Chen and Sudjianto (2005) ได้นำเสนอสมการในการหาค่า ϕ_p ที่ง่ายกว่าสมการ (7) ดังต่อไปนี้

$$\phi_p = \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{d_{ij}^p} \right]^{1/p} \quad (8)$$

เมื่อ d_{ij} คือ ระยะทางแบบยูคลิดของสมาชิกในจุดทดลองจุดที่ i และจุดทดลองจุดที่ j

จากความสัมพันธ์ของสมาชิกด้านบนและด้านล่างของสมาชิกในแนวทแยงมุมในเมทริกซ์ระยะทางแบบยูคลิด ดังนั้นระยะทางแบบยูคลิดที่ใช้ในการคำนวณหาค่า ϕ_p จึงพิจารณาเฉพาะสมาชิกที่อยู่ด้านบนของแนวทแยงมุมในเมทริกซ์ระยะทางแบบยูคลิดเท่านั้น เมื่อพิจารณาคูณลักษณะของแผนการทดลองแบบ LHD จากเกณฑ์ ϕ_p แผนการทดลองใดที่ค่า ϕ_p น้อยที่สุดในมิติปัญหานั้นๆ แสดงว่าแผนการทดลองดังกล่าวเป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุด

2.3 ค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลอง (Mean of correlation between design columns)

การหาค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลองคือ การหาค่าเฉลี่ยของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สัน (Pearson correlation coefficient) (Montgomery, Peck and Vinning, 2006, p. 107) นั่นเอง ซึ่งเป็นเกณฑ์ที่ใช้วัดความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระที่ละคู่ในแต่ละสดมภ์ของแผนการทดลอง สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สันจะมีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง 1 สมาชิกในแนวทแยงมุมมีค่าเท่ากับ 1 สัญลักษณ์ที่ใช้คือ r และสูตรที่ใช้ในการคำนวณคือ

$$r_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^n (x_{ui} - \bar{x}_i)(x_{uj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{u=1}^n (x_{ui} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\sum_{u=1}^n (x_{uj} - \bar{x}_j)^2}} \quad (9)$$

เมื่อ r_{ij} คือ สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สันระหว่างสดมภ์ที่ i กับสดมภ์ที่ j

สำหรับแผนการทดลองที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ d ตัว สหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลองจะมีจำนวนทั้งหมด $\binom{d}{2}$ ค่า เมื่อได้ค่าของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์

ของแผนการทดลองจำนวน $\binom{d}{2}$ ค่าแล้วจึงนำค่าที่ได้จากแต่ละครั้งมาเฉลี่ยกันและเมื่อพิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลองแบบ LHD จากค่าเฉลี่ยของสหสัมพันธ์ระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลอง แผนการทดลองใดที่มีค่าดังกล่าวเข้าใกล้ศูนย์มากที่สุด ในมิติปัญหานั้น ๆ แสดงว่าแผนการทดลองดังกล่าวเป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุด

3. การสลับสมาชิก (Element exchange)

การสลับสมาชิกในแผนการทดลองเป็นขั้นตอนหนึ่งในขั้นตอนวิธีการสับคั่น หลักการคือ จะเป็นการสลับสมาชิกของ 2 จุดทดลองอย่างสุ่มในแผนการทดลอง เมื่อมีการสลับสมาชิกในแผนการทดลองแล้วจะทำให้ได้แผนการทดลองใหม่ที่ยังคงเป็นแผนการทดลองแบบ LHD เหมือนเดิม ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการสลับสมาชิกสำหรับ RLHD, SLHD และ OALHD ดังต่อไปนี้

3.1 การสลับสมาชิกใน RLHD และ OALHD

ผู้วิจัยได้ประยุกต์ใช้หลักการสลับสมาชิกของ Park (1994; Ye, Li and Sudjianto, 2000) ในการสลับสมาชิกในสดมภ์ ซึ่ง RLHD และ OALHD จะมีหลักการสลับสมาชิกที่เหมือนกัน คือ กำหนดให้ X คือเมทริกซ์ของแผนการทดลองแบบ LHD มีมิติ $n \times d$ แต่ละสดมภ์เกิดจากการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ซึ่ง X_j คือตัวแปรอิสระตัวที่ j และ x_{ij} คือสมาชิกแถวที่ i ในตัวแปรอิสระตัวที่ j เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ และ $j = 1, 2, \dots, d$

ขั้นตอนในการสลับสมาชิกของเมทริกซ์ของแผนการทดลองสำหรับ RLHD และ OALHD

1. สุ่ม X มา 1 แผนการทดลอง
2. สุ่มเลือกสดมภ์ (X_j) มา 1 สดมภ์
3. สุ่มเลือกแถวภายในสดมภ์ที่เลือกจากขั้นตอนที่ 2 มา 2 แถวที่ไม่ซ้ำกันแล้ว

สลับสมาชิกใน 2 แถวที่เลือกมา

ตัวอย่างที่ 8 แสดงการสลับสมาชิกของเมทริกซ์ของแผนการทดลองกรณี

RLHD(9,2)

ขั้นตอนวิธีในการสลับสมาชิก มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สุ่ม RLHD มา 1 แผนการทดลอง ดังนี้

X_1	X_2
0.25	0
0	0.125
0.375	0.375
0.125	0.5
0.875	0.25
1	0.625
0.5	0.75
0.625	0.875
0.75	1

ขั้นตอนที่ 2 สุ่มเลือกสดมภ์มา 1 สดมภ์ สมมติได้สดมภ์ที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 สุ่มเลือกแถวภายในสดมภ์ที่เลือก สมมติได้แถวที่ 2 และ 5

นั่นคือได้สมาชิกในแถวคือ 0 และ 0.875 ตามลำดับ

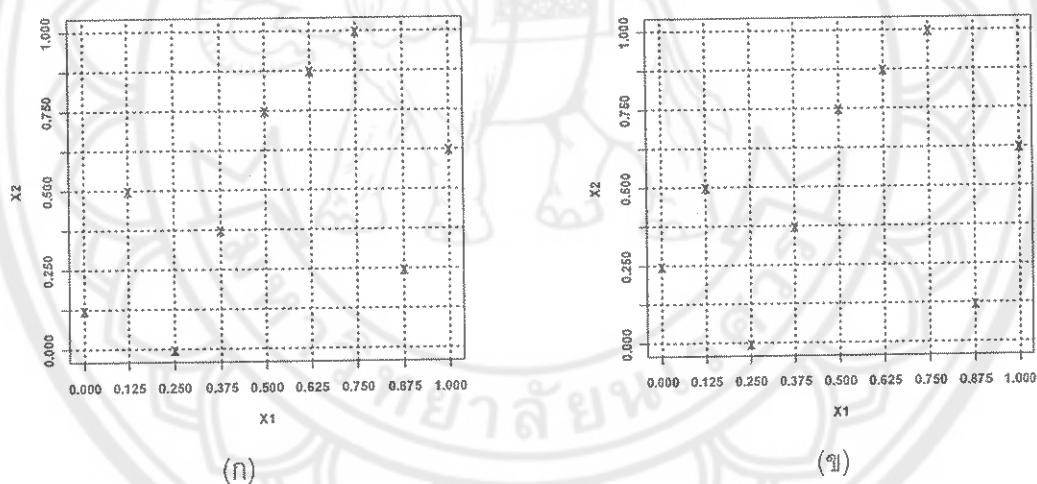
จากนั้นจึงสลับสมาชิกในแถวที่ 2 และ 5 ของสดมภ์ที่ 1

X_1	X_2
0.25	0
0	0.125
0.375	0.375
0.125	0.5
0.875	0.25
1	0.625
0.5	0.75
0.625	0.875
0.75	1

ดังนั้นเมทริกซ์ของแผนการทดลองใหม่ที่ได้คือ

X_1	X_2
0.25	0
0.875	0.125
0.375	0.375
0.125	0.5
0	0.25
1	0.625
0.5	0.75
0.625	0.875
0.75	1

เมื่อนำแผนการทดลองแบบ RLHD ก่อนและหลังการแลกเปลี่ยนสมาชิก มาวาดกราฟ จะได้ดังภาพ 8



ภาพ 8 แสดงแผนการทดลองแบบ RLHD ก่อนและหลังการสลับสมาชิก

จากภาพ 8 จะเห็นได้ว่า แผนการทดลองที่ได้จากก่อนและหลังการแลกเปลี่ยนสมาชิกแตกต่างกัน

3.2 การสลับสมาชิกใน SLHD

การสลับสมาชิกสำหรับ SLHD เพื่อความสะดวกต่อการคำนวณจะใช้สมาชิกที่เป็นจำนวนจริงก่อน หลังจากนั้นจึงแปลงค่าของข้อมูลที่เป็นจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]^d$

ซึ่งการสลับสมาชิกสำหรับ SLHD จะแบ่งเป็น 2 กรณีคือ กรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ และกรณีที่จำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่ (Ye, Li and Sudjianto, 2000) ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.2.1 การสลับสมาชิกสำหรับ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่

การสลับสมาชิกสำหรับ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- 1) สุ่ม SLHD มา 1 แผนการทดลอง
- 2) สุ่มเลือกสดมภ์มา 1 สดมภ์
- 3) สุ่มเลือกแถวของแผนการทดลองที่สะท้อนกันมา 2 แถว (1 คู่)

สมมติคู่ของแถวที่สะท้อนกัน 1 คู่คือ 1 และ n ดังนั้นจะสลับสมาชิก ดังนี้ ถ้าสมาชิก 1 สลับกับสมาชิก i แล้วสมาชิก n สลับกับสมาชิก $n+1-i$ เพื่อคงความสมมาตรไว้ เมื่อ $i=1,2,\dots,n$

ตัวอย่างที่ 9 แสดงการสลับสมาชิกกรณี $SLHD(10,2)$

ขั้นตอนวิธีในการสลับสมาชิก มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สุ่ม SLHD มา 1 แผนการทดลอง ดังนี้

	X_1	X_2
1	1	6
2	2	2
3	3	1
4	4	3
5	5	7
6	6	4
7	7	8
8	8	10
9	9	9
10	10	5

ขั้นตอนที่ 2 สุ่มเลือกสดมภ์มา 1 สดมภ์ สมมติได้สดมภ์ที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจากจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ จากสดมภ์ที่ถูกเลือก

จะเห็นได้ว่าจุดทดลองที่เป็นเงาสะท้อนต่อกันได้แก่

1 และ 10

2 และ 9

3 และ 8

4 และ 7

5 และ 6

จึงสุ่มเลือกแถวใดๆ ในสตมภ์ที่ 1 มา 1 แถว สมมติได้สมาชิก 1

X_1	X_2
1	6
2	2
3	1
4	3
5	7
6	4
7	8
8	10
9	9
10	5

ถ้าสมาชิก 1 สลับกับสมาชิก i แล้วจะได้ว่า สมาชิก 10 ซึ่งเป็นเงาสะท้อนของ 1 จะต้องถูกสลับที่กับสมาชิก $n+1-i$

ถ้า $i=2$ แสดงว่า สมาชิก 1 จะถูกสลับกับ 2 และสมาชิก 10 จะถูกสลับกับ 9 เพื่อคงความเป็นสมมาตรดั้งเดิม

X_1	X_2
1	6
2	2
3	1
4	3
5	7
6	4
7	8
8	10
9	9
10	5

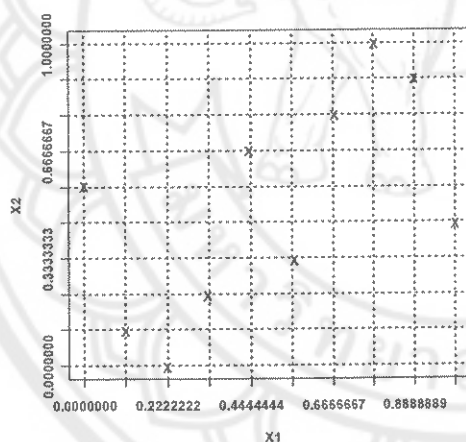
ดังนั้นเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการสลับสมาชิกคือ

X_1	X_2
2	6
1	2
3	1
4	3
5	7
6	4
7	8
8	10
10	9
9	5

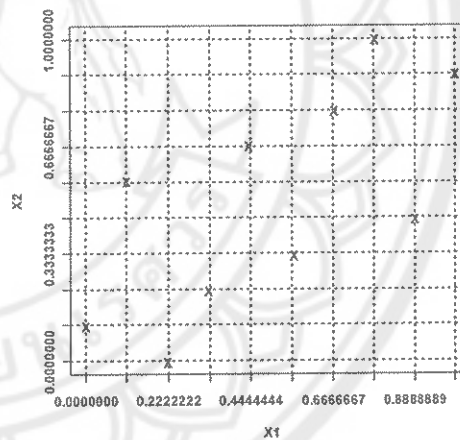
หลังจากได้แผนการทดลองแล้ว จึงแปลงสมาชิกในแผนการทดลองดังกล่าวให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD ดังนั้นเมทริกซ์ของแผนการทดลองใหม่ที่ได้คือ

X_1	X_2
0.11	0.56
0	0.11
0.22	0
0.33	0.22
0.44	0.67
0.56	0.33
0.67	0.78
0.78	1
1	0.89
0.89	0.44

และเมื่อนำเมทริกซ์ของแผนการทดลองมาวาดกราฟเพื่อดูการกระจาย
ของจุดทดลองสำหรับมิติ 10×2 จะได้ดังภาพ 9



(ก)



(ข)

ภาพ 9 แสดงจุดทดลองก่อนและหลังการสลับสมาชิกของแผนการทดลองแบบ SLHD
กรณี n เป็นเลขคู่

จากภาพ 9 จะเห็นได้ว่า แผนการทดลองที่ได้จากก่อนและหลัง
การแลกเปลี่ยนสมาชิกแตกต่างกัน

3.2.2 การสลับสมาชิกสำหรับ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่

การสลับสมาชิกสำหรับ SLHD กรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่ จะมีขั้นตอนเหมือนกับกรณีจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคู่ แต่สิ่งที่แตกต่างกันคือ ในกรณีนี้แถวที่เป็นแกนกลางคือ แถวที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเท่ากับ $\frac{(n+1)}{2}$ จะไม่ถูกสลับกับแถวอื่น ๆ เมื่อ $i=1,2,\dots,n$ และ $i \neq \frac{(n+1)}{2}$

ตัวอย่างที่ 10 แสดงการสลับสมาชิกกรณี $SLHD(9,2)$

ขั้นตอนวิธีการในการสลับสมาชิก มีดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 สุ่ม SLHD มา 1 แผนการทดลอง ดังนี้

X_1	X_2
1	3
2	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
8	4
9	7

ขั้นตอนที่ 2 สุ่มเลือกสดมภ์มา 1 สดมภ์ สมมติได้สดมภ์ที่ 1

ขั้นตอนที่ 3 เนื่องจากจำนวนจุดทดลองเป็นเลขคี่

ดังนั้นในการสลับสมาชิกจะไม่สลับแถวที่เป็นแกนกลาง คือแถวที่มีสมาชิกคือ (5,5) และจากสดมภ์ที่ถูกเลือกจะเห็นว่า จุดทดลองที่เป็นเงาสะท้อนต่อกัน ได้แก่

1 และ 9

2 และ 8

3 และ 7

4 และ 6

จึงสุ่มเลือกแถวใดๆ ในสดมภ์ที่ 1 มา 1 แถว สมมติว่าได้สมาชิก 1

X_1	X_2
1	3
2	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
8	4
9	7

ถ้าสมาชิก 1 สลับกับสมาชิก i แล้วจะได้ว่า สมาชิก 9 ซึ่งเป็นเงาสะท้อนของ 1 จะต้องถูกสลับที่กับสมาชิก $n+1-i$

ถ้า $i=2$ แสดงว่า สมาชิก 1 จะถูกสลับกับ 2 และสมาชิก 9 จะถูกสลับกับ 8 เพื่อคงความเป็นสมมาตร

X_1	X_2
1	3
2	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
8	4
9	7

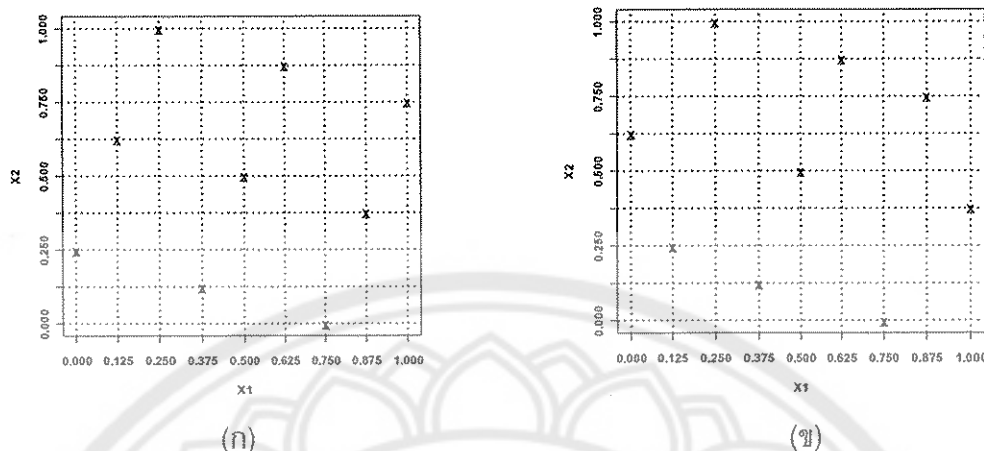
ดังนั้นเมทริกซ์ใหม่ที่เกิดจากการสลับสมาชิกคือ

X_1	X_2
2	3
1	6
3	9
4	2
5	5
6	8
7	1
9	4
8	7

หลังจากได้แผนการทดลองแล้ว จึงแปลงสมาชิกในแผนการทดลองดังกล่าวให้อยู่ในช่วง $[0,1]^2$ ดังที่ได้กล่าวถึงใน RLHD ดังนั้นเมทริกซ์ของแผนการทดลองใหม่ที่ได้คือ

X_1	X_2
0.125	0.25
0	0.625
0.25	1
0.375	0.125
0.5	0.5
0.625	0.875
0.75	0
1	0.375
0.875	0.75

และเมื่อนำเมทริกซ์ของแผนการทดลองมาวาดกราฟเพื่อดูการกระจายของจุดทดลองสำหรับมิติ 9×2 จะได้ดังภาพ 10



ภาพ 10 แสดงจุดทดลองก่อนและหลังการสลับสมาชิกของแผนการทดลองแบบ SLHD
กรณี n เป็นเลขคี่

จากภาพ 10 จะเห็นได้ว่า แผนการทดลองที่ได้จากก่อนและหลัง
การแลกเปลี่ยนสมาชิกแตกต่างกัน

ตัวแบบทางสถิติ

ตัวแบบทางสถิติที่ใช้สำหรับการวิจัยครั้งนี้คือ RSM และตัวแบบ Kriging ซึ่งตัวแบบ
ทางสถิติทั้ง 2 ตัวแบบจะสร้างมาจากข้อมูลที่ได้จากแผนการทดลองแบบ LHD ที่เหมาะสม 3 แบบ
ตามที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ รายละเอียดของตัวแบบทางสถิติทั้ง 2 ตัวแบบมีดังต่อไปนี้

1. วิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response surface methodology: RSM)

วิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response surface methodology: RSM) เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมสำหรับการสร้างตัวแบบเพื่อการพยากรณ์ เนื่องจากวิธีดังกล่าวเป็นวิธีพื้นฐาน
และง่ายต่อการใช้งาน ซึ่งส่วนใหญ่แล้ว RSM เป็นตัวแบบทางสถิติที่ถูกนำมาใช้กับตัวแบบพหุนาม
อันดับ 2 (Second-order polynomial model) และเทคนิคที่ใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ คือ
วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Myers, et al., 2009) ดังนั้นการทำการวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยจึงเลือกใช้ RSM
กรณีที่รูปแบบความสัมพันธ์เป็นพหุนามอันดับ 2

RSM เป็นตัวแบบทางสถิติที่อาศัยสมมติฐานของความคลาดเคลื่อนโดยสุ่ม ซึ่งเกิด
จากการเพิ่มขึ้นของตัวแปรอิสระอย่างไม่มีนัยสำคัญ (Simpson, et al., 2001) กำหนดให้ y

แทนตัวแปรตาม และ x แทนเวกเตอร์ของตัวแปรอิสระ สามารถเขียนฟังก์ชันความสัมพันธ์ระหว่าง y กับ x ดังต่อไปนี้

$$y = f(x) + \varepsilon \quad (10)$$

โดยที่ ε คือ ความคลาดเคลื่อนอย่างสุ่มที่ถูกสมมติให้มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนเป็น σ^2

$f(x)$ คือ ฟังก์ชันพื้นผิวตอบสนองที่แท้จริง

เนื่องจากไม่ทราบค่าฟังก์ชันพื้นผิวตอบสนองที่แท้จริง ดังนั้นพื้นผิวตอบสนอง $g(x)$ จึงถูกสร้างสำหรับเป็นค่าประมาณของ $f(x)$ นั่นคือ ค่าพยากรณ์เป็นการหาค่าโดยใช้ $\hat{y} = g(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามของ $(X_1, X_2, \dots, X_d)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y &= \hat{y} + \varepsilon \\ &= g(x) + \varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

Simpson, Lin and Chen (2001; Fang and Horstemeyer, 2006) เขียนรูปแบบของฟังก์ชัน $g(x)$ ที่ใช้กันโดยทั่วไป คือ

$$\hat{y}(x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_i x_i + \sum_{i=1}^d \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{d-1} \sum_{j=i+1}^d \beta_{ij} x_i x_j \quad (12)$$

โดยที่ $\beta_i, \beta_{ii} (i=1, 2, \dots, d)$ และ $\beta_{ij} (i < j=1, 2, \dots, d)$ เป็นพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า ซึ่งเป็นค่าประมาณจากค่าสังเกตสำหรับ n เวกเตอร์ของตัวแปร $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ และสอดคล้องกับ ค่าของฟังก์ชัน $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ ในสมการ (11) ซึ่งรูปแบบฟังก์ชันในสมการ (12) สามารถเขียนในเทอมของค่าสังเกตได้ดังต่อไปนี้

$$y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^d \beta_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^d \beta_{jj} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{d-1} \sum_{k=j+1}^d \beta_{jk} x_{ij} x_{ik} + \varepsilon_i \quad (13)$$

สมการ (13) สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ X ได้ดังนี้

$$y_0 = X\beta + \varepsilon \quad (14)$$

$$\text{โดยที่ } y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_d \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

ซึ่งการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ถดถอย β ในสมการ (14) ทำโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด นั่นคือทำสมการ (15) ให้มีค่าต่ำที่สุด

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (y_0 - X\beta)^T (y_0 - X\beta) \\ &= y_0^T y_0 - \beta^T X^T y_0 - y_0^T X\beta + \beta^T X^T X\beta \\ &= y_0^T y_0 - 2\beta^T X^T y_0 + \beta^T X^T X\beta \end{aligned} \quad (15)$$

จากสมการ (15) เนื่องจาก $\beta^T X^T y_0$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 1×1 หรือเป็นค่าคงที่นั่นเอง ดังนั้น $(\beta^T X^T y_0)^T = y_0^T X\beta$ จึงเป็นค่าคงที่เช่นเดียวกัน ตัวประมาณโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของสมการ (15) หาได้จากการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ β ดังผลลัพธ์ที่แสดงในสมการ (16)

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\beta}} = -2X^T y_0 + 2X^T X\hat{\beta} = 0 \quad (16)$$

จากสมการ (16) เมื่อจัดรูปสมการใหม่จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$X^T X\hat{\beta} = X^T y_0 \quad (17)$$

ดังนั้นตัวประมาณโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของ β คือ

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y_0 \quad (18)$$

2. ตัวแบบ Kriging (Kriging model)

ตัวแบบ Kriging เป็นตัวแบบทางสถิติที่นิยมใช้กับ CSE ถูกนำเสนอโดย Sacks, et al. (1989) ตัวแบบทางสถิตินี้อาศัยแนวคิดที่ว่า ตัวแปรตาม (y) สามารถกำหนดให้เป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระร่วมกับกระบวนการอื่น ๆ ที่สามารถพิจารณาโดยใช้กระบวนการสโตแคสติก ($Z(x)$) (Sacks, et al., 1989) และตัวพยากรณ์ที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best linear unbiased predictor: BLUP) ดังรูปแบบสมการต่อไปนี้

$$y = \sum_{j=1}^k \beta_j f_j(x) + Z(x) \quad (19)$$

เมื่อ β_j แทน พารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระ

เมื่อ $j = 1, 2, \dots, d$

$f_j(x)$ แทน ฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระ เมื่อ $j = 1, 2, \dots, d$

$Z(x)$ แทน กระบวนการสโตแคสติก

ฟังก์ชันพหุนามในสมการ (19) สามารถทำให้การประมาณค่าพารามิเตอร์และฟังก์ชันดังกล่าวง่ายขึ้นโดยกำหนดให้เป็นค่าคงที่ ซึ่งนักวิจัยส่วนใหญ่เชื่อว่าไม่มีอิทธิพลต่อความสามารถในการพยากรณ์ (Sacks, et al., 1989; Welch, et al., 1992) ดังนั้นฟังก์ชันใหม่ที่ได้คือ

$$y = \beta + Z(x) \quad (20)$$

เมื่อ $Z(x)$ แทนกระบวนการสโตแคสติก ที่มีค่าเฉลี่ยเป็น 0 และความแปรปรวนร่วมระหว่าง $Z(x_i)$ และ $Z(x_j)$ คือ

$$\text{Cov}[Z(x_i), Z(x_j)] = \sigma^2 R(x_i, x_j) \quad (21)$$

โดยที่ σ^2 คือ ความแปรปรวนของกระบวนการ

$R(x_i, x_j)$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ระหว่างจุดทดลองที่ i และ j

และเนื่องจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์มีความหลากหลายในการเลือกใช้ (Sacks, et al., 1989) ผู้วิจัยจึงนำเสนอรูปแบบของฟังก์ชันสหสัมพันธ์เกาส์เซียนซึ่งเป็นรูปแบบที่ใช้บ่อยที่สุด ดังสมการต่อไปนี้

$$R(X_i, X_j) = \prod_{j=1}^d \exp\left(-\theta_j |X_i - X_j|^2\right) \quad (22)$$

โดยที่ $\theta_j > 0$

จากข้อกำหนดของการแจกแจงแบบปกติของตัวแบบ Kriging แบบเกาส์เซียน ฟังก์ชันความหนาแน่นของ y_0 เขียนได้เป็น

$$f(\beta, \sigma^2, R | y_0) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} |R|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (y_0 - I\beta)^T R^{-1} (y_0 - I\beta)\right\} \quad (23)$$

ตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหาได้จากค่าล๊อคของฟังก์ชันของภาวะน่าจะเป็น ดังนี้

$$l(\beta, \sigma^2, R | y_0) = -\frac{1}{2} \left[n \ln \sigma^2 + \ln |R| + (y_0 - I\beta)^T R^{-1} (y_0 - I\beta) / \sigma^2 \right] \quad (24)$$

จากสมการ (24) การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดของ β คือ

$$\hat{\beta} = (I^T R^{-1} I)^{-1} I^T R^{-1} y_0 \quad (25)$$

และการประมาณค่าโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ σ^2 คือ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} (y_0 - I\hat{\beta})^T R^{-1} (y_0 - I\hat{\beta}) \quad (26)$$

แทนค่า $\hat{\beta}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ในสมการ (24) เพื่อหาค่าประมาณของ θ ซึ่งเป็นปัญหาค่าสูงสุดเชิงตัวเลข ได้เป็น

$$-\frac{1}{2} (n \ln \hat{\sigma}^2 + \ln |R|) \quad (27)$$

หลังจากประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการสร้างตัวพยากรณ์ของ $y(x)$ หรือ $\hat{y}(x)$ ณ จุดพยากรณ์ (Prediction point) ใด ๆ คือ

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta} + r^T(x) R^{-1} (y_0 - I\hat{\beta}) \quad (28)$$

โดยที่ $r(x)$ เป็นเวกเตอร์ขนาด $n \times 1$ ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน ($Z(X)$) ที่จุดทดลองของแผนการทดลองกับจุดพยากรณ์ นั่นคือจุดที่ไม่ได้ทำการทดลองของแผนการทดลอง เขียนได้เป็น

$$r(x) = [R(x, x_1) R(x, x_2) \dots R(x, x_n)]^T \quad (29)$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Tang (1993) นำเสนอวิธีการสร้าง LHD โดยใช้แถวลำดับเชิงตั้งฉากระหว่างสดมภ์ของแผนการทดลอง หรือที่เรียกว่า OALHD มิติปัญหาที่ใช้คือ $4 \times 2, 6 \times 2, 8 \times 2, 9 \times 2$ และ 49×8 ซึ่ง OALHD จะเป็นแผนการทดลองที่เหมาะสมสำหรับ CSE มากกว่าแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์แผนการทดลองอื่นๆ และเป็นการหาปริพันธ์เชิงตัวเลขโดยใช้วิธีมอนติคาร์โล ซึ่งเป็นวิธีที่มีประโยชน์และเหมาะสำหรับการหาปริพันธ์เชิงซ้อน (Complex integral) ในมิติสูง ๆ ข้อจำกัดของ OALHD คือ มิติปัญหาของ OALHD จะขึ้นอยู่กับมิติปัญหาของแถวลำดับเชิงตั้งฉากอย่างเต็มที่ที่สามารถสร้างได้

Ye (1998) ได้ประยุกต์ใช้วิธีการของ Tang (1993) มานำเสนอการสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์เชิงตั้งฉาก โดยใช้วิธีทางพีชคณิตที่เรียกว่า ผลคูณของโคเรเน็คเกอร์ ซึ่งวิธีของ Ye (1998) ทำงานได้เป็นอย่างดีสำหรับการประยุกต์ใช้ใน CSE เนื่องจากแผนการทดลอง

ดังกล่าวมีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากจึงส่งผลให้ตัวแปรอิสระในแต่ละสดมภ์อิสระต่อกัน ข้อจำกัดของ Ye (1998) คือ ขนาดของจุดทดลองที่ไม่ยืดหยุ่น นั่นคือจำนวนจุดทดลองจำกัดอยู่ที่ 2^d หรือ $2^d + 1$ สำหรับจำนวนตัวแปรอิสระคือ $2d - 2$ เท่านั้น ซึ่งมีมิติปัญหาที่ใช้คือ $5 \times 2, 8 \times 4, 9 \times 4$ และ 17×6

Ye, Li and Sudjianto (2000) ได้นำเสนอการสร้าง SLHD ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของ LHD ที่มีความสมมาตรและมีบางคุณลักษณะของแผนการทดลองเป็นเชิงตั้งฉากและนำเสนอการสลับสมาชิกสำหรับการสร้าง SLHD ที่เหมาะสม โดยเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีของ Park (1994; Morris and Mitchell, 1995 (SA); Li and Wu, 1997 (CP)) ตลอดจนเปรียบเทียบ RLHD และ SLHD โดยใช้มิติของปัญหา 6 มิติที่แตกต่างกัน ผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษามีดังนี้ เมื่อเกณฑ์ที่พิจารณาคือ เกณฑ์เอนโทรปีและเกณฑ์แมกซ์มิน พบว่า SLHD จะเป็นแผนการทดลองที่ดีกว่า RLHD นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบขั้นตอนวิธีการสุ่มที่สุ่มสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์อย่างสุ่มที่เหมาะสม (Optimal random Latin hypercube design) กับแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่สมมาตรที่เหมาะสม (Optimal symmetric Latin hypercube design) พบว่าขั้นตอนวิธีการสุ่ม SA จะเหมาะสมสำหรับแผนการทดลองมิติใหญ่ ส่วนแผนการทดลองมิติเล็ก ขั้นตอนวิธีการสุ่ม CP มีประสิทธิภาพมากกว่า SA

Butler (2001) นำเสนอการสร้างแผนการทดลองแบบ LHD ที่เหมาะสมโดยใช้หลักการแปลงของวิลเลียม ซึ่งการแปลงข้อมูลดังกล่าวจะใช้สร้างแผนการทดลอง 2 ชนิดคือ แผนการทดลอง $D_n(g_1, g_2, \dots, g_m)$ โดยที่ $m \leq n_0$ และ $n_0 = (n-1)/2$ เมื่อ m คือจำนวนของตัวแปรอิสระ และ n คือจำนวนจุดทดลอง และแผนการทดลอง $E_n(g_1, g_2, \dots, g_r)$ เมื่อ $m = n_0 + r$ และ $1 \leq r \leq n_0$ มิติปัญหาที่ใช้ในงานวิจัยคือ $9 \times 2, 19 \times 3, 37 \times 4$ และ 59×5 ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิจัยคือ แผนการทดลองที่สร้างได้สามารถนำไปใช้ในการพยากรณ์ปัญหาต่าง ๆ ได้ดี แต่มีข้อจำกัดคือ จำนวนจุดทดลอง (n) จะต้องเป็นจำนวนคี่หรือจำนวนเฉพาะเท่านั้นและจำนวนตัวแปรอิสระจะน้อยกว่าหรือเท่ากับ $(n-1)/2$

Leary, Bhaskar and Keane (2003) ได้นำแนวคิดของ Tang (1993) มาทำการศึกษาการสร้าง LHD โดยใช้แนวคิดของ OA หรือเรียกว่า OALHD สัญลักษณ์ที่ใช้คือ $OA(n, d, q, r)$ เมื่อ n คือจำนวนจุดทดลอง d คือจำนวนตัวแปรอิสระ q คือจำนวนระดับ และ r คือกำลัง (Strength) มิติของแผนการทดลองที่ใช้ในการวิจัยของ Leary, Bhaskar and Keane (2003) มีดังนี้ $OA(8, 2, 2, 2), OA(9, 2, 3, 2), OA(25, 2, 5, 2), OA(81, 4, 3, 4)$ และ $OA(128, 7, 2, 7)$ ตลอดจนเปรียบเทียบประสิทธิภาพของขั้นตอนวิธีการสุ่มคือ SA และ CP ที่ใช้สร้างแผนการทดลอง

แบบ LHD ที่เหมาะสมภายใต้เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมคือ เกณฑ์ ϕ_p ผลการศึกษาปรากฏว่า OALHD จะเติมเต็มปริภูมิทดลองได้ดีกว่า RLHD และเมื่อจำนวนจุดทดลองเพิ่มมากขึ้น SA จะค้นหาผลลัพธ์ได้ดีกว่า CP

Bursztyn and Steinberg (2006) ได้ศึกษาเปรียบเทียบแผนการทดลอง 5 แบบคือ LHD แผนการทดลองแบบยู (U-design) แผนการทดลองแลตทิซ (Lattice design) แผนการทดลองการหมุน (Rotation design) และแผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลบางส่วนสองระดับ (Two-level fractional factorial design) โดยพิจารณาคุณลักษณะของแผนการทดลองดังกล่าวจาก เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม 4 เกณฑ์ ได้แก่ เกณฑ์ผลรวมกำลังสองแบบแฝง (Alias sum of squares criterion) เกณฑ์เอนโทรปี เกณฑ์ระยะทางที่ต่ำที่สุด (Minimum distance criterion) และเกณฑ์ *IMSE* (Integrated mean squared error criterion) โดยใช้จำนวนตัวแปรอิสระและจำนวนจุดทดลองที่แตกต่างกัน ซึ่งจำนวนตัวแปรอิสระที่ใช้สำหรับแผนการทดลองที่พิจารณา คือ 5, 9 และ 21 ตัวแปร ผลลัพธ์ที่ได้คือ เมื่อใช้เกณฑ์ผลรวมกำลังสองแบบแฝงพบว่า แผนการทดลองการหมุนและแผนการทดลองแลตทิซมีแนวโน้มเป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุดสำหรับทั้งแผนการทดลองที่พิจารณาตัวแปรอิสระทั้งหมดและแผนการทดลองที่เลือกตัวแปรอิสระบางส่วน มาพิจารณา ส่วนแผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลบางส่วนสองระดับเป็นแผนการทดลองที่แย่ที่สุดในทุก ๆ กรณีและ LHD เป็นแผนการทดลองที่ดีในแผนการทดลองที่เลือกตัวแปรอิสระบางส่วน มาพิจารณา แต่เป็นแผนการทดลองที่ค่อนข้างแย่สำหรับแผนการทดลองที่พิจารณาตัวแปรอิสระทั้งหมด นอกจากนี้เมื่อใช้เกณฑ์ *IMSE* จะได้ว่าแผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลบางส่วนสองระดับเป็นแผนการทดลองที่แย่ที่สุด ส่วนแผนการทดลองอื่นๆ จะมีค่าใกล้เคียงกัน และเมื่อพิจารณาเกณฑ์เอนโทรปีและเกณฑ์ระยะทางที่ต่ำที่สุดจะได้ว่า ทั้งสองเกณฑ์มีแนวโน้มว่าแผนการทดลองที่ดีที่สุดคือ แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลบางส่วนสองระดับ

Rungrattanaubol and Na-udom (2007) ได้ทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของ ขั้นตอนวิธีสืบค้นที่เป็นที่นิยม 2 แบบคือ SA และ GA ภายใต้เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม ซึ่งแผนการทดลองที่ใช้คือ LHD เกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมคือ เกณฑ์ ϕ_p โดยใช้ตัวแปรอิสระ 2 ถึง 10 ตัวแปร และจำนวนจุดทดลอง (n) มีค่าเท่ากับ $2d + 4\binom{d}{2} + 1$ ซึ่งสำหรับแผนการทดลองในแต่ละมิติปัญหานั้นจะสร้างแผนการทดลองแบบ LHD ที่เหมาะสมมิติปัญหาละ 10 แผนการทดลองโดยใช้ค่าตั้งต้นที่แตกต่างกัน ผลการวิจัยพบว่า SA มีประสิทธิภาพดีกว่า GA เนื่องจาก SA ใช้ระยะเวลาในการค้นหาและมีความซับซ้อนในการสร้างน้อยกว่า GA

Na-udom (2007) ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบแผนการทดลอง 5 แบบ คือ แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียล 3 ระดับ 2 ตัวแปร (3^2 Factorial design), แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลบางส่วน (Fractional factorial design: FFD), RLHD, SLHD และแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์เชิงตั้งฉาก ที่สร้างจากหลักการแปลงของวิลเลียมที่นำเสนอโดย Butler (2001) โดยเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ Kriging โดยพิจารณาจากค่า RMSE ปัญหาที่ใช้ทดสอบมี 2 ปัญหา คือ Sine function (Welch, et al., 1992) ซึ่งเป็นปัญหาทดสอบในมิติขนาดเล็ก ($d=2$) ซึ่งมีมิติปัญหาลักษณะนี้ตัวแบบ Kriging จะสร้างจากแผนการทดลองแบบแฟกทอเรียล 3 ระดับ 2 ตัวแปร, RLHD, SLHD และแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์เชิงตั้งฉาก โดยใช้จำนวนจุดทดสอบเท่ากับ 441 จุด และ Cyclone model (Ye, Li and Sudjianto, 2000) ซึ่งเป็นปัญหาทดสอบในมิติขนาดใหญ่ ($d=6$) ตัวแบบ Kriging จะสร้างจากแผนการทดลองแบบต่าง ๆ ดังนี้ FFD, RLHD, SLHD และแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์เชิงตั้งฉาก โดยใช้จำนวนจุดทดสอบจำนวน 500 จุด ผลการศึกษาที่ได้คือ SLHD เป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุดสำหรับมิติปัญหาลักษณะเล็ก สำหรับมิติปัญหาลักษณะใหญ่นั้นแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์เชิงตั้งฉากที่สร้างจากหลักการแปลงของวิลเลียมจะเป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุด เนื่องจากแผนการทดลองดังกล่าวมีค่า RMSE ที่ต่ำที่สุด