บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาของปัญหา

การเคลื่อนที่ของระบบมวลติดสปริงเป็นหัวข้อที่มักถูกกล่าวไว้ในตำราเรียนและการสอนวิชาฟิสิกส์ในระดับปริญญาตรี (Keller, Gettys and Skove, 1993, p. 384; Zill, 2005, p. 190) ระบบมวลติดกับสปริงเป็นตัวอย่างของตัวสั่นทางกล (Mechanical oscillator) เมื่อระบบถูกรบกวน (เช่น เมื่อดึงสปริงให้ยืดออกแล้วปล่อย) มันเริ่มที่จะสั่นด้วยความถี่ธรรมชาติค่าหนึ่ง ซึ่งการสั่นอย่างอิสระนี้จะลดลงตามเวลาแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลเนื่องจากแรงต้านทานต่างๆ เช่น แรงต้านเนื่องจากตัวกลางรอบๆ แรงเหล่านี้เป็นสาเหตุให้พลังงานกลของออสซิลเลเตอร์นั้นลดลง ระบบใดๆ ที่มีพฤติกรรมในลักษณะดังที่กล่าวมานี้จะเรียกว่า ออสซิลเลเตอร์แบบฮาโมนิคที่ถูกหน่วง (Damped Harmonic Oscillator)

การสั่นของออสซิลเลเตอร์แบบฮาโมนิคที่ถูกหน่วง เช่น ระบบมวลติดสปริงและเพนดูลัมที่ถูกกระทำโดยแรงขับภายนอกแรงหนึ่งจะเรียกว่า การสั่นที่ถูกขับหรือการสั่นที่ถูกบังคับ (Driven Oscillator หรือ Forced Oscillator) การสั่นเหล่านี้เกิดขึ้นในวงจรไฟฟ้าและทางกลเป็นส่วนใหญ่ จากการวิเคราะห์โดยใช้วิธีแบบดั้งเดิม (Conventional Method) (Taylor, 2005, p. 184; Arya, 1997, p. 86; James, et al., 1989, p. 137) เพื่อหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่อธิบายการสั่นของระบบดังกล่าว ผลเฉลยจะได้จากผลรวมของผลตอบสนองธรรมชาติ (ซึ่งจะลดหายไปในที่สุด) และผลตอบสนองบังคับเนื่องจากแรงขับภายนอก (จะยังคงอยู่แม้ผลตอบสนองธรรมชาติได้หมดไป) โดยที่ผลตอบสนองธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ และขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้นของผลตอบสนองบังคับที่เวลา $t = 0$ ด้วย (Dimarogonas, 1996, p. 131)

จากที่กล่าวมาข้างต้น ผู้วิจัยจึงได้ออกแบบการทดลองของออสซิลเลเตอร์ที่ถูกแรงบังคับโดยให้มวลที่กำลังสั่นบนสปริงถูกขับในแนวตั้งด้วยดอกลำโพงที่แขวนสปริงนั้น (ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงยึดติดที่ตรงกลางของดอกลำโพงที่คว่ำหน้าลง) และใช้เซนเซอร์วัดระยะทางแบบอินฟราเรด (GP2Y0A02YK) แปลงการเคลื่อนแบบสั่นของมวลให้เป็นสัญญาณทางไฟฟ้า โดยวางไว้ใต้มวลที่กำลังสั่นในแนวตั้ง ซึ่งสเปกตรัมที่ผู้วิจัยคาดหวังไว้จากเซนเซอร์น่าจะมี 2 ความถี่ คือ ความถี่ของผลตอบสนองธรรมชาติ และความถี่ของผลตอบสนองบังคับ แต่จากผลการทดลองสเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์ดังกล่าวได้แสดงให้เห็นแท่งความถี่ทั้งหมด 4 แท่ง ซึ่ง

พบว่า สองในสี่แห่งนี้ไม่สอดคล้องกับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กล่าวไว้ในตำราเรียนข้างต้น จากปัญหาที่เกิดขึ้นนี้ผู้วิจัยจึงได้ค้นคว้าหาข้อมูล จนพบว่า เมื่อไม่นานมานี้ การวิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่สองที่อยู่บนพื้นฐานของเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว (multi-time variable) ได้นำเสนอโดยธงชัย มณีชูเกตุ และคณะ (Maneechukate, et al., 2000, pp. 666-673) ผลของการวิเคราะห์ได้แสดงให้เห็นว่า ขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติ $x_n(t)$ ของระบบขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และผลตอบสนองบังคับ $x_f(\tau)$ ที่เวลา t ใดๆ ดังสมการต่อไปนี้

$$x(t,\tau)=\underbrace{\left[x_0-x_f(\tau)\right]\cos(\omega t)}_{x_n(t)}+x_f(\tau)$$

โดยที่ $x(t,\tau)$ เป็นผลเฉลยสมบูรณ์ที่มีสเกลเวลาแยกออกจากกัน ซึ่งมีความแตกต่างจากผลเฉลยที่ได้มาจากวิธีการแบบดั้งเดิม

$$x(t)=\underbrace{\left[x_0-x_f(0)\right]\cos(\omega t)}_{x_n(t)}+x_f(t)$$

ที่มีขนาดผลตอบสนองธรรมชาติ $x_n(t)$ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และผลตอบสนองบังคับ $x_f(t)$ ที่เวลาเริ่มต้น $t=0$ เท่านั้น $\left(x_f(0)\right)$

ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวมาประยุกต์ใช้เพื่อแก้สมการแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่อธิบายการสั่นแบบฮาร์โมนิคที่ถูกหน่วงของระบบมวลติดสปริงที่ถูกบังคับโดยแรงภายนอกที่เป็นไซนูซอยด์ ซึ่งผลการวิเคราะห์ปรากฏว่า ผลเฉลยที่ได้จะเป็นผลรวมขององค์ประกอบความถี่ทั้งหมดสี่เทอม คือ เทอมของผลตอบสนองธรรมชาติ เทอมของผลตอบสนองบังคับ และอีกสองเทอมใหม่ที่ได้จากการคูณกันของผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับ ซึ่งสองเทอมใหม่นี้จะไม่ปรากฏเมื่อวิเคราะห์โดยใช้วิธีดั้งเดิม จากการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้จากเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับสเปกตรัมของผลการทดลองข้างต้นพบว่า สอดคล้องกันเป็นอย่างดี และยิ่งกว่านั้น ผลเฉลยดังกล่าวสามารถอธิบายพฤติกรรมของแห่งความถี่แต่ละแห่งในสเปกตรัมได้อย่างแม่นยำ

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้วิเคราะห์หาผลเฉลยของระบบเพนดูลัม (ที่สั่นด้วยมุมน้อยๆ) ที่ถูกบังคับด้วยแรงภายนอกโดยใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวและได้ออกแบบการทดลองระบบเพนดูลัมที่ถูกบังคับจากแรงภายนอก ซึ่งได้ผลการทดลองสอดคล้องกับผลเฉลยเช่นกันและเป็นไป

ในทางเดียวกันกับผลการวิเคราะห์และผลการทดลองของระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงภายนอกบังคับ

จุดมุ่งหมายของการวิจัย

1. นำเสนอการวิเคราะห์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่อธิบายการเคลื่อนที่ของมวลติดสปริงที่ถูกแรงบังคับจากภายนอกโดยนำเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวเข้าช่วยในการวิเคราะห์

2. ออกแบบการทดลองระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงบังคับภายนอกเพื่อให้ได้เอาต์พุตของระบบนำไปเปรียบกับการวิเคราะห์ในจุดมุ่งหมายของการศึกษาข้อ 1

ขอบเขตของการวิจัย

วิเคราะห์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองของระบบมวลติดสปริง เพื่อหาผลเฉลยโดยใช้หลักการตัวแปรเวลาหลายตัวและการแปลงฟูเรียร์ ภายใต้สภาวะมีแรงบังคับภายนอก แล้วนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปเปรียบกับเอาต์พุตของการทดลองระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงกระทำเพื่อยืนยันความถูกต้องของผลการวิเคราะห์หรือแบบจำลองที่นำเสนอ

สมมติฐานของการวิจัย

การวิเคราะห์สมการอนุพันธ์อันดับสองที่อธิบายการเคลื่อนที่ของระบบที่มีการเคลื่อนที่แบบสั่น โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลาสามารถนำไปเป็นเครื่องมือเพื่อหาผลเฉลยสมบูรณ์ของระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงบังคับจากภายนอกแบบไซนูซอยด์ โดยที่ระบบจะให้ผลตอบสนองบังคับตามฟังก์ชั่นบังคับอินพุตแบบไซนูซอยด์ แล้วผลตอบสนองบังคับนี้จะไปมีผลต่อค่าแอมปลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติอีกที่หนึ่ง ซึ่งส่งผลให้ผลเฉลยมีองค์ประกอบความถี่ทั้งหมด 4 เทอม ซึ่งสามารถอธิบายผลการทดลองได้อย่างถูกต้องและแม่นยำกว่าวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม