บทที่ 2

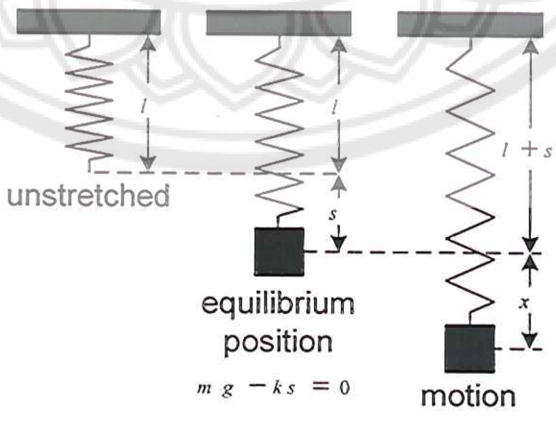
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ได้กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานและหลักการที่จำเป็นสำหรับใช้ในการวิเคราะห์ในบทถัดไป นอกจากนี้ยังได้กล่าวถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อให้เข้าใจแนวทางของงานวิจัยนี้ในเบื้องต้นด้วย

ระบบมวลติดกับสปริงที่สั่นอย่างอิสระ

สมมุติว่าสปริงอันหนึ่งได้แขวนในแนวดิ่งจากคานแข็งอันหนึ่ง และมีมวล m ติดไว้ที่ปลายอิสระของมัน ปริมาณการยืดของสปริงจะขึ้นอยู่กับมวล มวลที่มีน้ำหนักแตกต่างกันจะทำให้สปริงยืดด้วยปริมาณที่แตกต่างกัน จากกฎของฮุก (Hooke's low) สปริงจะออกแรงดึงกลับด้วยตัวมันเองด้วยแรง F ตรงข้ามกับทิศทางที่สปริงยืดออกและเป็นสัดส่วนกับปริมาณที่ยืดออก s กล่าวคือ $F = ks$ ที่ซึ่ง k เป็นค่าคงที่ของสัดส่วน (a constant of proportionality) หรือเรียกว่าค่าคงที่ของสปริง (spring constant) โดยสปริงจะถูกอธิบายลักษณะเฉพาะด้วยค่า k เป็นหลัก

หลังจากมวล m ติดไว้กับสปริงอันหนึ่ง มันจะยืดสปริงออกด้วยปริมาณ s และมาถึงตำแหน่งสมดุล (equilibrium) ที่ซึ่งน้ำหนัก W ของมวลจะเท่ากันกับแรงดึงกลับ ks น้ำหนักได้นิยามโดย $W = mg$ ซึ่งมวลจะถูกวัดในหน่วยกิโลกรัม (kg) และ $g = 9.8$ m/s^2 ตามลำดับ ดังที่แสดงในภาพ 1



ภาพ 1 ระบบมวลติดกับสปริง

เงื่อนไขของการสมดุลคือ $mg = ks$ หรือ $mg - ks = 0$ ถ้ามวลถูกทำให้เคลื่อนที่ไปด้วยปริมาณ x จากตำแหน่งสมดุล ดังนั้นแรงดึงกลับของสปริงคือ $k(x+s)$ สมมุติว่าไม่มีแรงหน่วง (damping force) กระทำกับระบบและสมมุติว่ามวลสั่นอย่างอิสระ (ไม่มีแรงภายนอกใดๆ กระทำ) ดังนั้น กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) เท่ากับแรงลัพธ์ของแรงดึงกลับและน้ำหนัก

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+s) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{=0} = -kx \tag{1}$$

เครื่องหมายลบในสมการ (1) บ่งบอกว่าแรงดึงกลับของสปริงกระทำตรงกันข้ามกับทิศของการเคลื่อนที่

จากการหารสมการ (1) ด้วยมวล m ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง $d^2x/dt^2 + (k/m)x = 0$ หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

ที่ซึ่ง $\omega_0^2 = k/m$ สมการ (2) เป็นสมการที่อธิบายการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค (Simple harmonic motion) หรือ การเคลื่อนที่แบบอิสระที่ไม่ถูกหน่วง (free undamped motion) ถ้าสมมุติให้ $x(t) = e^{rt}$ โดยที่ $\frac{d}{dt}x(t) = re^{rt}$ และ $\frac{d^2}{dt^2}x(t) = r^2e^{rt}$ แล้วนำเทอมเหล่านี้แทนลงในสมการ (2) จะได้

$$\left(r^2 + \omega_0^2\right)e^{rt} = 0$$

หรือ

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \tag{3}$$

สมการ (3) จะถูกเรียกว่าสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) หรือ สมการช่วย (auxiliary equation)

จากสูตรการหารากสมการของสมการกำลังสอง (quadratic equation) $ax^2+bx+c=0$ ที่มีอยู่ว่า

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ดังนั้น รากคำตอบของสมการ (3) คือ

$$\begin{aligned} r &= \frac{-0\pm\sqrt{(0)^2-4(1)\omega_0^2}}{2(1)} \\ &= \pm\sqrt{-\omega_0^2} \\ &= \pm j\omega_0 \end{aligned}$$

ซึ่งแยกออกได้เป็น

$$r_1 = j\omega_0 \quad \text{และ} \quad r_2 = -j\omega_0$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยทั่วไปจาก

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{-j\omega_0 t} \end{aligned} \tag{4}$$

จากผลเฉลยในสมการ (4) มีค่าเชิงซ้อนมาเกี่ยวข้อง แต่การกระจัด $x(t)$ ต้องเป็นจำนวนจริง ดังนั้น สัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 ต้องมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน และเป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกัน กำหนดให้

$$c_1 = \frac{1}{2}(a - jb)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(a + jb)$$

สมการ (4) จะกลายเป็น

$$x(t)=\frac{1}{2}(a-jb)e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}(a+jb)e^{-j\omega_0 t} \tag{5}$$

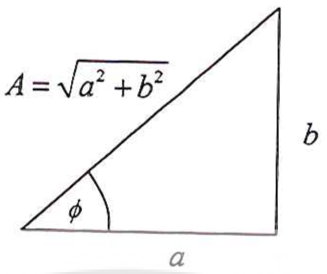
จากสูตรของ Euler $e^{\pm i\omega t}=\cos(\omega t)\pm\sin(\omega t)$ จะทำให้สมการ (5) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
x(t)&=\frac{1}{2}(a-jb)\left(\cos\omega_0 t+j\sin\omega_0 t\right)+\frac{1}{2}(a+jb)\left(\cos\omega_0 t-j\sin\omega_0 t\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(a\cos\omega_0 t+aj\sin\omega_0 t-jb\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(a\cos\omega_0 t-aj\sin\omega_0 t+jb\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(2a\cos\omega_0 t+2b\sin\omega_0 t\right)\\
&=\left(a\cos\omega_0 t+b\sin\omega_0 t\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยในสมการ (6) เป็นจำนวนจริง โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=x_0$ และ $\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}=v(0)=v_0$ ซึ่งก็คือ ตำแหน่ง และความเร็วที่เวลา $t=0$ ตามลำดับ

จากผลเฉลยในสมการ (6) สามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่กะทัดรัดกว่าเดิมและมองเห็นค่าแอมพลิจูดที่แท้จริงได้ชัดเจนขึ้น โดยเริ่มจากการนำ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ คูณสมการ (6) ตลอดจะได้

$$x(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\omega_0 t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\omega_0 t\right] \tag{7}$$



ภาพ 2 ความสัมพันธ์ระหว่าง a, b และ ϕ

จากสามเหลี่ยมมุมฉากในภาพ 2 ได้ความสัมพันธ์ว่า $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi$, $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi$ และ $\tan\phi=\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}=\dfrac{b}{a}$ นำความสัมพันธ์ดังกล่าวแทนลงในสมการ (7) จะได้

$$x(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\phi\cos\omega_0 t+\sin\phi\sin\omega_0 t\right]$$

หรือ

$$x(t)=\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\omega_0 t\cos\phi+\sin\omega_0 t\sin\phi\right] \tag{8}$$

จากสูตรตรีโกณมิติ $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (8) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} x(t)&=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\omega_0 t-\phi\right) \\ &=A\cos\left(\omega_0 t-\phi\right) \end{aligned} \tag{9}$$

โดยที่ $A=\sqrt{a^2+b^2}$ และ $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

จากสมการ (6) สามารถหาค่าของ a และ b ที่อยู่ในรูปเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และ v_0 โดยแทน $t=0$ ในสมการ (6) จะได้

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a\cos\omega_0(0) + b\sin\omega_0(0) \\
&= a
\end{aligned}
$$

หรือ

$$a = x_0$$

จากนั้นหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ 6 เทียบกับเวลา t จะได้

$$\frac{d}{dt}x(t) = -a\omega_0 \sin\omega_0 t + b\omega_0 \cos\omega_0 t \tag{10}$$

แทนค่า $t = 0$ ในสมการ (10) จะได้

$$
\begin{aligned}
v_0 &= -a\omega_0 \sin\omega_0 0 + b\omega_0 \cos\omega_0 0 \\
&= b\omega_0
\end{aligned}
$$

หรือ

$$b = \frac{v_0}{\omega_0}$$

ดังนั้นสมการ (6) เขียนได้เป็น

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \phi\right) \tag{11}$$

โดยที่

$$A = \sqrt{\left(x_0\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ และ } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)$$

ถ้าต้องการให้เฟสเริ่มต้นในสมการ (11) เป็นศูนย์ สามารถกระทำได้โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

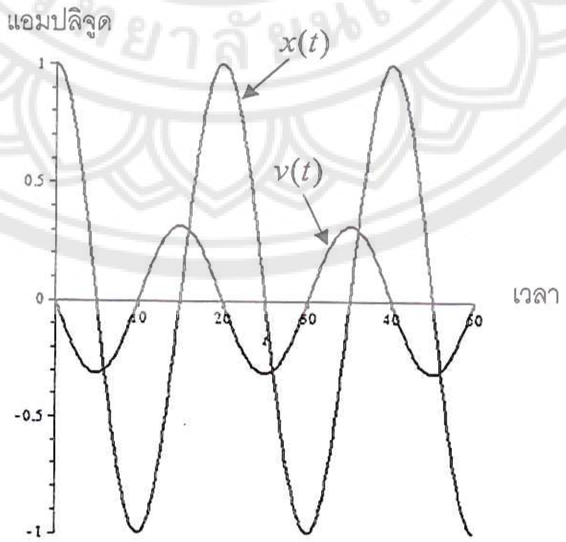
$d\left.\dfrac{x(t)}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 = 0$ และ $x(0) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0$ ดังนั้น

$$x(t) = x_0 \cos\left(\omega_0 t\right)$$

และ

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t$$

สำหรับตัวอย่างกราฟที่แสดงการกระจัด $x(t)$ และความเร็วของการเคลื่อนที่ $v(t)$ ได้แสดงไว้ดังในภาพ 3 โดยที่กราฟที่มีแอมพลิจูดใหญ่กว่าจะเป็น $x(t)$ และกราฟที่มีแอมพลิจูดเล็กกว่าจะเป็น $v(t)$



ภาพ 3 การกระจัดและความเร็วของระบบที่ไม่ถูกหน่วง

ระบบมวลติดกับสปริงที่สั่นภายใต้แรงหน่วง

แนวคิดของการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคอย่างอิสระค่อนข้างจะไม่จริง เนื่องจากการเคลื่อนที่ที่อธิบายโดยสมการ (11) ได้สมมุติว่าไม่มีแรงหน่วงหรือแรงต้าน (damping force) ที่กระทำต่อมวลที่กำลังเคลื่อนที่ เว้นแต่มวลได้แขวนไว้ในสูญญากาศ แต่อย่างน้อยที่สุดก็ยังมีแรงต้านทานหรือแรงหน่วง เนื่องจากตัวกลางที่อยู่รอบๆ ในการศึกษาทางวิชากลศาสตร์ แรงหน่วงที่กระทำต่อวัตถุหนึ่งจะแปรผันตรงกับความเร็ว ณ ขณะใดขณะหนึ่ง นั่นคือ แรงนี้ได้จากการคูณค่าคงที่กับ dx/dt ดังนั้น สมการ (1) สามารถเขียนเพิ่มเติมได้เป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} \qquad (12)$$

โดยที่ β เป็นค่าคงที่การหน่วง และเครื่องหมายลบในสมการเป็นผลเนื่องมาจากแรงหน่วงได้กระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่

ทำการจัดเรียงสมการ (12) ใหม่แล้วหารด้วยมวล m จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของระบบการสั่นที่ถูกหน่วงเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (13)$$

โดยที่ $2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$ และ $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ โดยที่ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ เป็นความถี่ธรรมชาติ

ถ้าสมมุติให้ $x(t) = e^{rt}$ โดยที่ $\dfrac{d}{dt}x(t) = re^{rt}$ และ $\dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = r^2e^{rt}$ แล้วนำเทอมเหล่านี้แทนลงในสมการ (13) จะได้

$$\left(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2\right)e^{rt} = 0$$

ดังนั้นสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \tag{14}$$

และรากสมการของสมการ (14) คือ

$$\begin{aligned} r &= \frac{-2\lambda \pm \sqrt{(2\lambda)^2 - 4(1)\omega_0^2}}{2(1)} \\ &= -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

ซึ่งแยกออกได้เป็น

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{และ} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

ดังนั้น จะได้ผลเฉลยทั่วไปเป็น

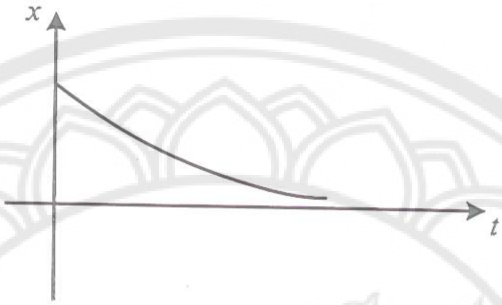
$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= c_1 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \end{aligned} \tag{15}$$

จากสมการ (15) สามารถแบ่งออกได้เป็น 3 กรณีที่เป็นไปได้ซึ่งขึ้นอยู่กับเครื่องหมายทางพีชคณิตของ $\lambda^2 - \omega_0^2$ ดังนี้

กรณีที่ 1: $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ ในสถานการณ์นี้ ระบบถูกหน่วงมากเกินไป (over damped) เนื่องจากว่าสัมประสิทธิ์การหน่วง β มีค่ามากเมื่อเทียบกับค่าคงที่สปริง k ซึ่งผลเฉลยของสมการ (15) กลายเป็น

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \\ &= c_1 e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + c_2 e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าในสมการนี้ สัมประสิทธิ์ของเวลา t เป็นค่าลบทั้งสองเทอม ดังนั้น เทอมทั้งสองนี้จะลดลงตามเวลาที่เพิ่มขึ้นและไม่มีการสั่น ดังภาพ 4 (เมื่อมีการขยับมวลออกจากตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อย)

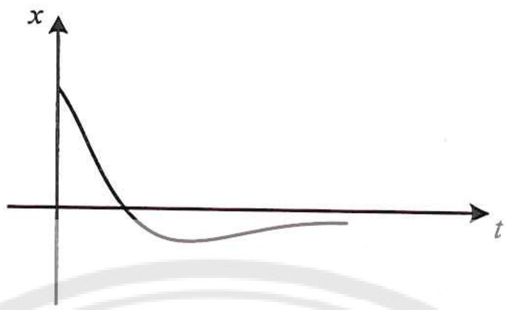


ภาพ 4 การเคลื่อนที่ของระบบที่ถูกหน่วงมากเกินไป

กรณีที่ 2: $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ ระบบจะถูกหน่วงอย่างวิกฤต (critical damped) ในสถานการณ์นี้ มวลจะกลับเข้าสู่สมดุลเร็วกว่ากรณีที่ 1 และไม่สั่น ถ้ามีการลดขนาดของแรงหน่วงเพียงเล็กน้อยก็จะเป็นเหตุทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบสั่นได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (15) กลายเป็น

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_2 t} \\ &= e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t} + c_2 t e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\,t}\right) \\ &= e^{-\lambda t}\left(c_1 e^{\sqrt{0}t} + c_2 t e^{-\sqrt{0}t}\right) \\ &= e^{-\lambda t}\left(c_1 + c_2 t\right) \end{aligned}$$

กราฟแสดงการเคลื่อนที่ตามสมการดังกล่าวได้แสดงไว้ดังภาพ 5



ภาพ 5 การเคลื่อนที่ของระบบที่ถูกหน่วงอย่างวิกฤติ

สังเกตว่าการเคลื่อนที่คล้ายกับการเคลื่อนที่ของระบบหน่วงมากเกิน แต่เห็นได้ชัดเจนว่ามวลสามารถข้ามผ่านตำแหน่งสมดุลอย่างมากที่สุดเพียงครั้งเดียว

กรณีที่ 3: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ ในกรณีนี้ระบบอยู่ภายใต้การหน่วงน้อยๆ (under damped) เนื่องจากว่าสัมประสิทธิ์การหน่วงมีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบค่าคงที่สปริง ในตอนนี้ราก r_1 และ r_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned} r_1 &= -\lambda + \sqrt{(-1)\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)} \\ &= -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{aligned} \quad \text{และ} \quad \begin{aligned} r_2 &= -\lambda - \sqrt{(-1)\left(\omega_0^2 - \lambda^2\right)} \\ &= -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)t} \tag{16}$$

จากผลเฉลยในสมการ (16) มีค่าเชิงซ้อนมาเกี่ยวข้อง แต่การกระจัด $x(t)$ ต้องเป็นจำนวนจริง ดังนั้น สัมประสิทธิ์ c_1 และ c_2 ต้องมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน และเป็นคอนจูเกตซึ่งกันและกัน ถ้ากำหนดให้

$$c_1 = \frac{1}{2}(a - jb)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(a + jb)$$

สมการ (16) จะกลายเป็น

$$x(t)=\frac{1}{2}(a-jb)e^{\left(-\lambda+j\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t}+\frac{1}{2}(a+jb)e^{\left(-\lambda-j\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\right)t} \tag{17}$$

จากสูตรของ Euler $e^{\pm i\omega t}=\cos(\omega t)\pm\sin(\omega t)$ จะทำให้สมการ (17) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
x(t)&=e^{-\lambda t}\left[\frac{1}{2}(a-jb)\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+j\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)+\frac{1}{2}(a+jb)\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t-j\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)\right]\\
&=e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+aj\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t-jb\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)\\
&+e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t-aj\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+jb\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)\\
&=e^{-\lambda t}\frac{1}{2}\left(2a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+2b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)\\
&=e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)
\end{aligned} \tag{18}$$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยในสมการ (18) เป็นจำนวนจริง โดยที่ a และ b เป็นค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=x_0$ และ $\left.\frac{d}{dt}x(t)\right|_{t=0}=v(0)=v_0$ ซึ่งก็คือ ตำแหน่ง และความเร็วที่เวลา $t=0$ ตามลำดับ

จากผลเฉลยในสมการ (18) สามารถทำให้อยู่ในรูปแบบที่กะทัดรัดกว่าเดิมและมองเห็นค่าแอมพลิจูดที่แท้จริงได้ชัดเจนขึ้น โดยเริ่มจากการนำ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$ คูณสมการ (18) ตลอดจะได้

$$x(t)=e^{-\lambda t}\sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right] \tag{19}$$

จากสามเหลี่ยมมุมฉากในภาพ 2 ได้ความสัมพันธ์ว่า $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\phi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\phi$ และ $\tan\phi=\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{b}{a}$ นำความสัมพันธ์ดังกล่าวแทนลงในสมการ (19) จะได้

$$x(t)=e^{-\lambda t}\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\phi\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+\sin\phi\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right]$$

หรือ

$$x(t) = e^{-\lambda t}\sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\cos\phi + \sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\sin\phi\right] \tag{20}$$

จากสูตรตรีโกณมิติ $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$ ดังนั้น สามารถเขียนสมการ (20) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t}\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t-\phi\right) \\ &= e^{-\lambda t}A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t-\phi\right) \end{aligned} \tag{21}$$

โดยที่ $A=\sqrt{a^2+b^2}$ และ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

จากสมการ (18) สามารถหาค่าของ a และ b ที่อยู่ในรูปเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และ v_0 ได้ดังนี้

แทน $t=0$ ในสมการ (18) จะได้

$$\begin{aligned} x_0 &= e^{-\lambda(0)}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0) + b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0)\right) \\ &= a \end{aligned}$$

หรือ

$$a = x_0$$

จากนั้นหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของ $x(t)$ เทียบกับ t จะได้

$$\frac{d}{dt}x(t) = e^{-\lambda t}\left(-a\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + b\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t\right)$$
$$-\lambda e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t\right) \qquad (23)$$

แทน $t = 0$ ในสมการ (23) จะได้

$$\begin{aligned} v_0 &= e^{-\lambda(0)}\left(-a\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0) + b\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0)\right) \\ &\quad -\lambda e^{-\lambda(0)}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0) + b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,(0)\right) \\ &= b\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2} - \lambda a \end{aligned}$$

หรือ

$$b = \frac{v_0 + \lambda a}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$$

เนื่องจาก $a = x_0$ ดังนั้น

$$b = \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}$$

ดังนั้นสมการ (18) เขียนได้เป็น

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(x_0\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t\right)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t) = e^{-\lambda t}A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t - \phi\right) \qquad (24)$$

โดยที่

$$A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right)^2} \text{ และ } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \lambda x_0}{x_0\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right)$$

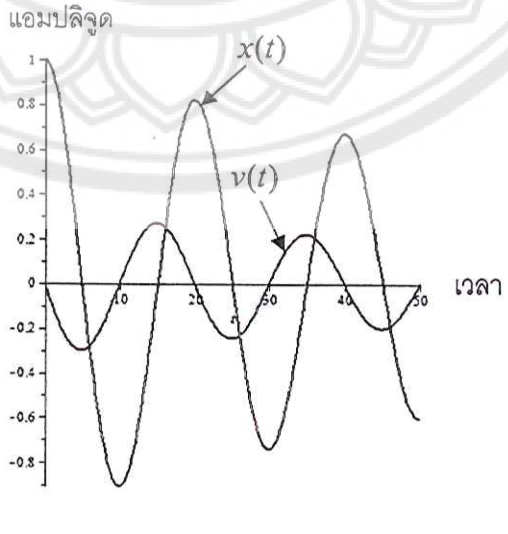
ในกรณีนี้ ถ้าต้องการให้เฟสเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($\phi = 0$) ต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $d\left.\frac{x(t)}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 = -\lambda x_0$ และ $x(0) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0$ ดังนั้น

$$x(t) = e^{-\lambda t} x_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t\right) \qquad (25)$$

และ

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -e^{-\lambda t} x_0 \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t - \lambda e^{-\lambda t} x_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\, t \qquad (26)$$

การกระจัด $x(t)$ และความเร็ว $v(t)$ ที่อธิบายโดยสมการ (25) และ (26) จะเป็นแบบสั่น แต่เนื่องจากในสมการมีสัมประสิทธิ์ $e^{-\lambda t}$ จึงทำให้แอมพลิจูดของการสั่นเข้าสู่ศูนย์เมื่อ t เข้าสู่อนันต์ และตัวอย่างของกราฟของสมการ (25) และ (26) ได้แสดงไว้ดังภาพ 6 โดยที่กราฟที่มีแอมพลิจูดใหญ่กว่าจะเป็น $x(t)$ และกราฟที่มีแอมพลิจูดเล็กกว่าจะเป็น $v(t)$

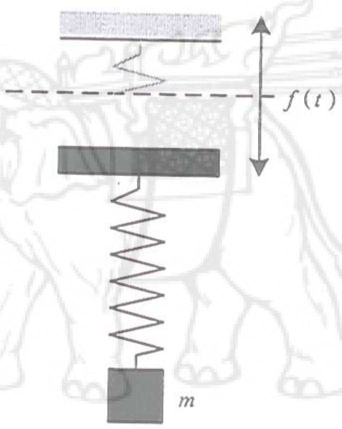


ภาพ 6 การกระจัดและความเร็วของระบบที่ถูกหน่วงน้อยๆ

สำหรับความถี่เชิงมุมของการสั่น $\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ จะน้อยกว่าความถี่ธรรมชาติ ω_0 ดังนั้นการหน่วงมีผลทำให้ความถี่การสั่นลดลง นั่นหมายความว่า แรงเสียดทานทำให้การเคลื่อนที่ช้าลง ซึ่งถ้าไม่มีแรงเสียดทานแล้ว ค่า λ จะเท่ากับศูนย์ และความถี่การสั่น $\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ จะกลายเป็น ω_0 หรือเท่ากับความถี่ธรรมชาติของระบบ ทำให้ผลเฉลยกลายเป็นสมการ (11) ดังที่กล่าวไว้ข้างต้น

ระบบมวลติดสปริงที่สั่นภายใต้แรงหน่วงและแรงบังคับภายนอก

ในลำดับต่อมา สมมุติว่ามีแรงภายนอก $f(t)$ กระทำกับมวลที่กำลังสั่นภายใต้แรงหน่วง โดยที่แรง $f(t)$ อาจเป็นแรงขับที่ทำให้คานยึดสปริงเกิดการเคลื่อนที่แบบสั่นในแนวดิ่งดังภาพ 7



ภาพ 7 ระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงภายนอกกระทำ

เมื่อรวม $f(t)$ เข้าไปในสมการตามกฎข้อที่สองของนิวตันในสมการ (12) ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่ถูกขับหรือถูกแรงกระทำ (driven or forced motion)

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-\beta\frac{dx}{dt}+f(t) \tag{27}$$

ทำการหาผลเฉลยโดยเริ่มจากการหารสมการ (27) ด้วย m แล้วจัดสมการใหม่ จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\lambda\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{1}{m}f(t) \tag{28}$$

ถ้ากำหนดให้ $f(t) = F_0 \cos \omega_f t$ สมการ (28) เขียนได้ใหม่เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \omega_f t \qquad (29)$$

ระบบสมการ (29) จะเป็นสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้น (เทอมขวามือของสมการไม่เท่ากับศูนย์) ซึ่งมีคำตอบสองส่วนคือ

$$x(t) = x_n(t) + x_f(t)$$

โดยเรียก $x_n(t)$ ว่า คำตอบชั่วครู่ (Transient Solution) หรือผลตอบสนองธรรมชาติ (Natural Response) และเรียก $x_f(t)$ ว่า คำตอบสถานะคงตัว (Steady-State Solution) หรือผลตอบสนองบังคับ (Forced Response) เมื่อเวลาผ่านไปนานๆ $x(t) = x_f(t)$

เริ่มต้นด้วยการหา $x_n(t)$ โดยกำหนดให้เทอมขวามือของสมการ (29) เท่ากับศูนย์จะได้

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx_n}{dt} + \omega_0^2 x_n = 0 \qquad (30)$$

สมการลักษณะเฉพาะของสมการ (30) คือ

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

และรากของสมการลักษณะเฉพาะ คือ

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{และ} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

ในที่นี้จะพิจารณาการเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นภายใต้แรงหน่วง (กรณีที่ 3: $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ **)** **ดังนั้น**

$$r_1 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ และ } r_2 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

และทำให้คำตอบชั่วครู่ที่มีรูปสมการเหมือนกับสมการ (18) คือ

$$x_n(t) = e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t + b\sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t\right)$$

และสามารถเขียนได้อีกรูปแบบเหมือนกับสมการ (21) คือ

$$x_n(t) = e^{-\lambda t}A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t - \phi\right)$$

โดยที่ $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

ต่อจากนั้นหา $x_f(t)$ โดยใช้วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ เนื่องจาก $f(t) = F_0\cos\omega_f t$ ดังนั้นจึงสมมุติคำตอบให้สอดคล้องกับ $f(t)$ นั่นคือ กำหนดให้ $x_f(t)$ อยู่ในรูป

$$x_f(t) = A\cos\omega_f t + B\sin\omega_f t \tag{31}$$

จากนั้นหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสองของ $x_f(t)$ เทียบกับเวลา ซึ่งจะได้

$$\frac{dx_f(t)}{dt} = -A\omega_f\sin\omega_f t + B\omega_f\cos\omega_f t \tag{32}$$

$$\frac{d^2x_f(t)}{dt^2} = -A\omega_f^{\,2}\cos\omega_f t - B\omega_f^{\,2}\sin\omega_f t \tag{33}$$

นำสมการ(31) (32) และ (33) แทนใน (29) จะได้

$$-A\omega_f^{\,2}\cos\omega_f t - B\omega_f^{\,2}\sin\omega_f t - 2\lambda A\omega_f\sin\omega_f t$$

$$+2\lambda B\omega_f\cos\omega_f t + \omega_0^2 A\cos\omega_f t + \omega_0^2 B\sin\omega_f t = \frac{1}{m}F_0\cos\omega_f t$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ $\cos\omega_f t$ จะได้

$$-A\omega_f{}^2 + 2\lambda B\omega_f + A\omega_0^2 = \frac{1}{m}F_0 \tag{34}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ $\sin\omega_f t$ จะได้

$$\begin{aligned} -B\omega_f^2 - 2\lambda A\omega_f + \omega_0^2 B &= 0 \\ B\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) &= 2\lambda A\omega_f \\ B &= \frac{2\lambda A\omega_f}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)} \end{aligned} \tag{35}$$

นำสมการ (35) แทนใน (34) เพื่อหาค่าของ A จะได้

$$\begin{aligned} -A\omega_f^2 + \frac{4\lambda^2 A\omega_f^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)} + A\omega_0^2 &= \frac{1}{m}F_0 \\ A\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + \frac{4\lambda^2\omega_f^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)}\right) &= \frac{1}{m}F_0 \\ A &= \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + \frac{4\lambda^2\omega_f^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)}\right)} \end{aligned}$$

นำค่า A ที่ได้แทนใน (35) เพื่อหาค่า B จะได้

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\lambda\omega_f}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)} \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + \frac{4\lambda^2\omega_f^2}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)}\right)} \\ &= \frac{2\lambda\omega_f F_0}{m\left(\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega_f^2\right)} \end{aligned}$$

นำค่า A และ B แทนลงในสมการ (31) จะได้

$$x_f(t)=\frac{F_0}{m\left(\omega_0^2-\omega_f^2+\frac{4\lambda^2\omega_f^2}{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)}\right)}\cos\omega_f t+\frac{2\lambda\omega_f F_0}{m\left(\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+4\lambda^2\omega_f^2\right)}\sin\omega_f t$$

$$=\frac{F_0\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)}{m\left(\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+4\lambda^2\omega_f^2\right)}\cos\omega_f t+\frac{2\lambda\omega_f F_0}{m\left(\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+4\lambda^2\omega_f^2\right)}\sin\omega_f t$$

$$=\frac{F_0}{m}\left(\frac{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)}{\left(\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2\right)}\cos\omega_f t+\frac{2\lambda\omega_f}{\left(\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2\right)}\sin\omega_f t\right)$$

$$=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\left(\frac{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\cos\omega_f t+\frac{2\lambda\omega_f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\sin\omega_f t\right) \tag{36}$$

จากความสัมพันธ์ $\frac{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}=\cos\phi_d$ และ $\frac{2\lambda\omega_f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}=\sin\phi_d$ และ $\tan\phi_d=\frac{\sin\phi_d}{\cos\phi_d}=\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}$ ทำให้สมการ (36) เขียนใหม่ได้เป็น

$$x_f(t)=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\left(\cos\phi_d\cos\omega_f t+\sin\phi_d\sin\omega_f t\right) \tag{37}$$

ซึ่งในที่นี้ ϕ_d ถูกกำหนดให้เป็นความต่างเฟสระหว่างคำตอบสถานะคงตัวกับอินพุตบังคับ เพื่อให้แตกต่างจากเฟสเริ่มต้นของคำตอบชั่วครู่ ϕ

จากสูตรตรีโกณมิติ $\cos(A-B)=\cos B\cos A+\sin B\sin A$ ดังนั้น สมการ (37) จะกลายเป็น

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}} \cos\left(\omega_f t - \phi_d\right) \tag{38}$$

โดยที่ $\phi_d = \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)$ ดังนั้น

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}} \cos\left(\omega_f t - \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right)$$

ในการหาคำตอบ $x_f(t)$ อีกวิธีหนึ่งที่ง่ายกว่าวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ นั่นคือ วิธีเชิงซ้อน โดยการนำจำนวนเชิงซ้อน $z_f = x_f + jy_f$ ที่มี x_f เป็นค่าจริงของ z_f ไปแทน x_f ในสมการ (29) และแทน $\cos\omega_f t$ ของเทอมขวามือของสมการด้วย $e^{j\omega_f t}$ ซึ่งจะได้

$$\frac{d^2 z_f}{dt^2} + 2\lambda\frac{dz_f}{dt} + \omega_0^2 z_f = \frac{1}{m}F_0 e^{j\omega_f t} \tag{39}$$

สมมุติคำตอบสถานะคงตัว $z_f(t)$ ให้สอดคล้องกับ $\frac{1}{m}F_0 e^{j\omega_f t}$ นั่นคือ

$$z_f(t) = Ke^{j\omega_f t} \tag{40}$$

โดยที่ K เป็นค่าคงที่ที่ต้องการทราบค่า ซึ่งหาได้โดยเริ่มจากการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของ $z_f(t)$ เทียบกับเวลา t จะได้

$$\frac{d}{dt}z_f(t) = Kj\omega_f e^{j\omega_f t} \tag{41}$$

และ

$$\frac{d^2}{dt^2}z_f(t) = Kj^2\omega_f^2 e^{j\omega_f t} = -K\omega_f^2 e^{j\omega_f t} \tag{42}$$

ตามลำดับ เมื่อนำสมการ (40) (41) และ (42) แทนลงในสมการ (39) จะได้

$$
\begin{aligned}
-K\omega_f^2 e^{j\omega_f t} + 2\lambda K j\omega_f e^{j\omega_f t} + \omega_0^2 K e^{j\omega_f t} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega_f t} \\
\left(-K\omega_f^2 + 2\lambda K j\omega_f + \omega_0^2 K\right) e^{j\omega_f t} &= \frac{F_0}{m} e^{j\omega_f t} \\
\left(-K\omega_f^2 + 2\lambda K j\omega_f + \omega_0^2 K\right) &= \frac{F_0}{m} \\
K\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\lambda j\omega_f\right) &= \frac{F_0}{m}
\end{aligned}
$$

ซึ่งได้

$$
K = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\lambda j\omega_f\right)}
$$

เมื่อนำ K ที่หาได้นี้แทนลงในสมการ (40) จะได้

$$
z_f(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega_f^2 + 2\lambda j\omega_f\right)} e^{j\omega_f t}
$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$
\begin{aligned}
z_f(t) &= \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}\, e^{j\left[\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right]}} e^{j\omega_f t} \\
&= \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}} e^{j\left[\omega_f t - \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

และสามารถเขียนได้อีกรูปแบบเป็น

$$z_f(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\left(\cos\left[\omega_f t-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)\right]+j\sin\left[\omega_f t-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)\right]\right)$$

ดังนั้น สามารถหาค่า $x_f(t)$ ได้จากส่วนจริงของ $z_f(t)$ นั่นคือ

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\cos\left[\omega_f t-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)\right]$$

จะเห็นได้ว่าการหาคำตอบเฉพาะ $x_f(t)$ ด้วยวิธีนี้จะกระชับกว่าวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ที่กล่าวไว้ก่อนหน้า

ในลำดับต่อไป ทำการหาผลตอบสนองสมบูรณ์ ซึ่งหาได้จาก

$$\begin{aligned} x(t) &= x_n(t)+x_f(t) \\ &= e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t+b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t\right)+x_f(t) \end{aligned} \tag{43}$$

ซึ่งในที่นี้ ผลตอบสนองบังคับยังเขียนเป็น $x_f(t)$ เพื่อความกระชับในการวิเคราะห์สมการในลำดับถัดไป

กำหนด $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ เพื่อให้สมการดูกระชับขึ้น ดังนั้นสมการ (43) เขียนได้ใหม่เป็น

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(a\cos\omega_n t+b\sin\omega_n t\right)+x_f(t) \tag{44}$$

จากสมการ (44) สามารถหาค่าของ a และ b ที่อยู่ในรูปเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 v_0 และผลตอบสนองบังคับที่ $t=0$ ได้โดย

แทน $t=0$ ในสมการ (44) จะได้

$$x(0) = x_0 = a + x_f(0)$$

หรือ

$$a = x_0 - x_f(0) \tag{45}$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (44) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) = v(t) = e^{-\lambda t}\left(-a\omega_n \sin\omega_n t + b\omega_n \cos\omega_n t\right) \\ -\lambda e^{-\lambda t}\left(a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t\right) + x_f{}'(t) \end{aligned} \tag{46}$$

โดยที่ $x_f{}'(t) = \frac{d}{dt}x_f(t)$

แทน $t = 0$ ในสมการ (46) จะได้

$$v(0) = v_0 = b\omega_n - \lambda a + x_f{}'(0)$$

ซึ่งได้

$$b = \frac{v_0 + \lambda a - x_f{}'(0)}{\omega_n} \tag{47}$$

นำสมการ (45) แทนในสมการ (47) จะได้

$$b = \frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(0)\right) - x_f{}'(0)}{\omega_n}$$

ดังนั้นสมการ (44) เขียนใหม่ได้เป็น

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(\left(x_0 - x_f(0)\right)\cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t + \frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(0)\right) - x_f{}'(0)}{\omega_n}\sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t\right) + x_f(t)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t) = e^{-\lambda t} A\cos\left(\omega_n t - \phi\right) + x_f(t) \tag{48}$$

โดยที่

$$A = \sqrt{\left(x_0 - x_f(0)\right)^2 + \left(\frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(0)\right) - x_f{}'(0)}{\omega_n}\right)^2}$$

และ

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(0)\right) - x_f{}'(0)}{\omega_n\left(x_0 - x_f(0)\right)}\right)$$

ถ้าเลือกให้ $\phi = 0$ ต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้ $v(0) = v_0 = -\lambda\left(x_0 - x_f(0)\right) + x_f{}'(0)$ และ $x(0) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0 - x_f(0)$ ดังนั้นสมการ (48) กลายเป็น

$$x(t) = \underbrace{e^{-\lambda t}\left(x_0 - x_f(0)\right)\cos\omega_n t}_{x_n(t)} + x_f(t) \tag{49}$$

จากสมการ (49) จะเห็นได้ว่า ผลตอบสนองธรรมชาติ $x_n(t)$ มีขนาดขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และผลตอบสนองบังคับเมื่อ $t = 0$ เท่านั้น

ในสมการ (38) เป็นผลตอบสนองบังคับเนื่องจากแรงบังคับภายนอกถูกกำหนดให้เป็น $f(t) = F_0\cos(\omega_f t)$ เมื่อนำมาแทนในสมการ (49) จะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์ที่มีการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นเข้าไปแล้ว ซึ่งเป็นกรณีที่เฟสเริ่มต้น $\phi = 0$ ดังนี้

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(x_0-\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f{}^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\cos\left[\omega_f(0)-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f{}^2}\right)\right]\right)\cos\omega_n t$$
$$+\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f{}^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}\cos\left[\omega_f t-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f{}^2}\right)\right] \tag{50}$$

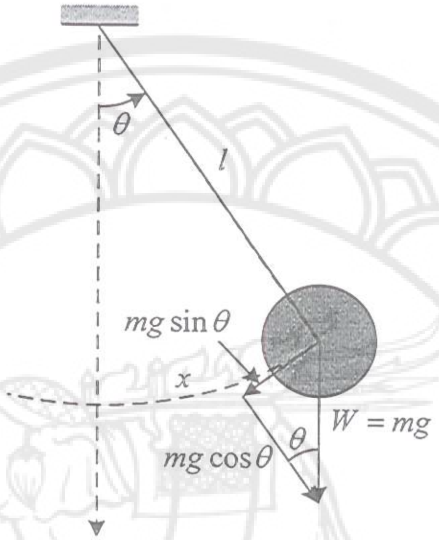
เพื่อความกระชับของสมการ ให้ขนาดของผลตอบสนองบังคับ $\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_f{}^2\right)^2+\left(2\lambda\omega_f\right)^2}}=D$ และ ความต่างเฟสระหว่างผลตอบสนองบังคับกับอินพุตบังคับ $-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f{}^2}\right)=\phi_d$ ดังนั้น สมการ (50) จึงเขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\lambda t}\left[x_0-D\cos\left(\omega_f(0)+\phi_d\right)\right]\cos\omega_n t+D\cos\left(\omega_f t+\phi_d\right)\\&=e^{-\lambda t}\left[x_0-D\underbrace{\cos\left(\phi_d\right)}_{\text{Constant}}\right]\cos\omega_n t+D\cos\left(\omega_f t+\phi_d\right)\end{aligned} \tag{51}$$

จากผลเฉลยในสมการ (51) จะเห็นได้ว่า องค์ประกอบความถี่มีอยู่ 2 เทอม คือ เทอมผลตอบสนองธรรมชาติหรือผลตอบสนองชั่วครู่ที่มีความถี่ $\omega_n=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ และจะมีขนาดลดลงเรื่อยๆ เมื่อ $t>0$ และเทอมผลตอบสนองบังคับที่มีความถี่ ω_f ซึ่งแอมพลิจูดจะคงที่ตราบใดที่แรงบังคับยังคงอยู่

ระบบเพนดูลัมอย่างง่าย

ระบบเพนดูลัมอย่างง่ายเป็นกรณีพิเศษของเพนดูลัมเชิงฟิสิกส์ (physical pendulum) ซึ่งประกอบด้วยแท่งโลหะยาว l ที่มีมวลติดอยู่ปลายด้านหนึ่ง ดังภาพ 8



ภาพ 8 เพนดูลัมอย่างง่าย

ในการอธิบายการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมในแนวตั้ง สมมุติว่ามวลของแท่งโลหะไม่มีความสำคัญ เมื่อดึงลูกตุ้มไปยังปลายข้างหนึ่งของจุดสมดุลจะมีแรงดึงกลับซึ่งมีขนาดเป็น

$$F = -mg\sin\theta \tag{52}$$

ถ้ามุม θ เป็นมุมเล็กๆ ค่าของ $\sin\theta \approx \theta$ และส่วนโค้ง x ในการเคลื่อนที่จะถือว่าเป็นเส้นตรง ซึ่งส่วนโค้ง x ของวงกลมรัศมี l จะสัมพันธ์กับมุมที่รองรับส่วนโค้งนั้น นั่นคือ $x = l\theta$ ดังนั้นสมการ (52) จะกลายเป็น

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} \tag{53}$$

นั่นคือ แรงดึงกลับจะแปรผันตรงกับระยะทาง x และมีทิศทางตรงข้าม จากกฎข้อที่สองของนิวตัน $F = ma$ สมการ (53) เขียนได้เป็น

$$ma = -mg\frac{x}{l}$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\frac{x}{l} \quad (54)$$

หารสมการ (54) ด้วย m ตลอดสมการแล้วจัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (55)$$

โดยที่ $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ ดังนั้น ความถี่ธรรมชาติ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ และจะเห็นได้ว่าสมการ (55) จะคล้ายกันกับสมการ (2) ของระบบมวลติดสปริงซึ่งเป็นสมการอธิบายการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิค ดังนั้นผลเฉลยก็คือ

$$x(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t) = A\cos\left(\omega_0 t - \phi\right)$$

โดยที่

$$A = \sqrt{\left(x_0\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \text{ และ } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right)$$

ถ้ากำหนดเฟสเริ่มต้น ϕ ให้เป็นศูนย์ ต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

$d\left.\frac{x(t)}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 = 0$ และ $x(0) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0$ ดังนั้น

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

และ

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t$$

เช่นเดียวกันกับระบบมวลติดสปริง แนวคิดการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคค่อนข้างจะไม่จริงสำหรับระบบเพนดูลัม เนื่องจากจะมีแรงหน่วงกระทำต่อระบบ เช่น แรงต้านอากาศ แรงเสียดทานของจุดแขวนเพนดูลัม ในทางกลศาสตร์ แรงหน่วงที่กระทำต่อเพนดูลัมจะแปรผันตรงกับความเร็ว ณ ขณะนั้น นั่นคือ $\alpha\frac{dx}{dt} = \alpha v$ ดังนั้น สมการ (54) จะกลายเป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x - \alpha\frac{dx}{dt} \qquad (56)$$

โดยที่ α เป็นค่าคงที่การหน่วง และเครื่องหมายลบในสมการจะหมายถึงแรงหน่วงกระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับการเคลื่อนที่
หารสมการ (56) ด้วย m และจัดเรียงใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{g}{l}x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (57)$$

โดยที่ $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ ซึ่ง 2λ ได้ใช้เพื่อความสะดวกในการคำนวณหารากของสมการลักษณะเฉพาะและ $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

จะเห็นได้ว่า สมการ (57) จะเหมือนกันกับสมการ (13) ของระบบมวลติดสปริง ดังนั้น ผลเฉลยจะอยู่ในรูป

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(x_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t + \frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t\right)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t) = e^{-\lambda t} A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t - \phi\right)$$

โดยที่ $A = \sqrt{(x_0)^2 + \left(\frac{v_0 + \lambda x_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right)^2}$ และ $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \lambda x_0}{x_0\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}\right)$

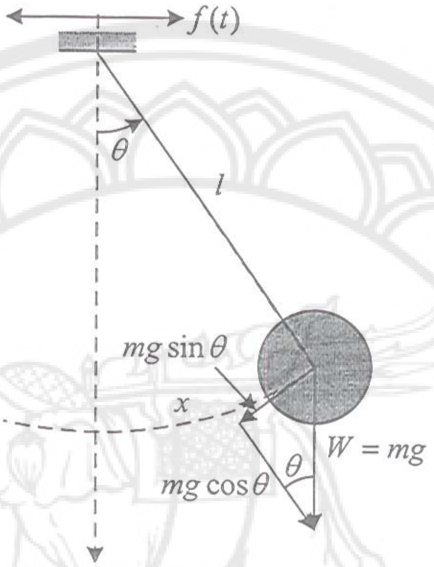
ในกรณีนี้ ถ้าต้องการให้เฟสเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($\phi = 0$) ต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $d\left.\frac{x(t)}{dt}\right|_{t=0} = v(0) = v_0 = -\lambda x_0$ และ $x(0) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0$ ดังนั้น

$$x(t) = e^{-\lambda t} x_0 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t\right)$$

และ

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = -e^{-\lambda t} x_0 \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t - \lambda e^{-\lambda t} x_0 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t$$

ในลำดับต่อมาสมมุติว่ามีแรงภายนอก $f(t)$ กระทำกับเพนดูลัมที่กำลังสั่นภายใต้แรงหน่วง โดยที่แรง $f(t)$ เป็นแรงขับที่ทำให้คานที่ยึดเพนดูลัมสั่นในแนวเดียวกับการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มของเพนดูลัมดังภาพ 9



ภาพ 9 เพนดูลัมถูกแรงกระทำจากภายนอก

เมื่อรวม $f(t)$ เข้าไปในสมการ (56) ทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเพนดูลัมที่ถูกแรงขับเป็นดังนี้

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x - \alpha\frac{dx}{dt} + f(t) \tag{58}$$

หาผลเฉลยโดยเริ่มจากการหารสมการ (58) ด้วย m และจัดสมการใหม่จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \tag{59}$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (59) จะเหมือนกับสมการ (28) ของระบบมวลติดสปริง ดังนั้น ผลเฉลยสมบูรณ์ของระบบเพนดูลัมที่ถูกแรงภายนอกกระทำคือ

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(\left(x_0-x_f(0)\right)\cos\omega_n t+\frac{v_0+\lambda\left(x_0-x_f(0)\right)-x_f'(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)+x_f(t)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t)=e^{-\lambda t}A\cos\left(\omega_n t-\phi\right)+x_f(t)$$

โดยที่

$$A=\sqrt{\left(x_0-x_f(0)\right)^2+\left(\frac{v_0+\lambda\left(x_0-x_f(0)\right)-x_f'(0)}{\omega_n}\right)^2}$$

และ

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{v_0+\lambda\left(x_0-x_f(0)\right)-x_f'(0)}{\omega_n\left(x_0-x_f(0)\right)}\right)$$

ถ้าเลือกให้ $\phi=0$ ต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $v(0)=v_0=-\lambda\left(x_0-x_f(0)\right)+x_f'(0)$ และ $x(0)=x_0$ ซึ่งทำให้ $A=x_0-x_f(0)$ ดังนั้น

$$x(t)=e^{-\lambda t}\left(x_0-x_f(0)\right)\cos\omega_n t+x_f(t) \qquad (60)$$

โดยที่ $\lambda=\dfrac{\alpha}{2m}$ และ $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

สมการ (60) จะคล้ายกับสมการ (49) ของระบบมวลติดสปริงที่ถูกบังคับดังที่อธิบายไว้ก่อนหน้า ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติ $x_n(t)$ มีขนาดขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 และผลตอบสนองบังคับที่ $t=0$

ถ้าแรงบังคับที่กระทำต่อเพนดูลัมเป็นฟังก์ชั่น $f(t) = F_0 \cos\omega_f t$ ดังนั้น ผลตอบสนองบังคับของระบบจะกลายเป็น

$$x_f(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}} \cos\left[\omega_f t - \tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right)\right]$$

เมื่อนำผลตอบสนองบังคับนี้ไปแทนในสมการ (60) จะได้ผลตอบสนองสมบูรณ์เป็น

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda t}\left[x_0 - D\cos\left(\omega_f(0) + \phi_d\right)\right]\cos\omega_n t + D\cos\left(\omega_f t + \phi_d\right) \\ &= e^{-\lambda t}\left[x_0 - D\underbrace{\cos(\phi_d)}_{\text{Constant}}\right]\cos\omega_n t + D\cos\left(\omega_f t + \phi_d\right) \end{aligned} \tag{61}$$

โดยที่ $D = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f{}^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}}$ และ $\phi_d = -\tan^{-1}\left(\dfrac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f{}^2}\right)$

จะเห็นได้ว่า สมการ (61) จะมีองค์ประกอบความถี่อยู่สองเทอม คือ เทอมผลตอบสนองธรรมชาติ(หรือผลตอบสนองชั่วครู่) ที่มีความถี่ $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ ซึ่งจะมีขนาดลดลงเรื่อยๆ เมื่อ $t > 0$ และเทอมผลตอบสนองบังคับที่มีความถี่ ω_f ซึ่งแอมพลิจูดจะคงที่ตราบใดที่แรงบังคับยังคงมีอยู่

ฟังก์ชันถ่ายโอนและผลตอบสนองความถี่

ในการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้น สามารถเขียนสมการความสัมพันธ์ของอินพุตกับผลตอบสนองใดๆ ให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เป็น

$$a_m \frac{d^m y}{dt^m} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y(t) = b_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x(t)$$

ซึ่งมีตัวแปรตาม y (เอาท์พุต) และตัวแปรต้น x (อินพุต)

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาผลตอบสนองความถี่ของระบบผ่านตัวอย่างระบบเชิงเส้นอย่างง่ายระบบหนึ่งที่อธิบายด้วยสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งดังนี้

$$a\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=x(t) \tag{62}$$

ถ้าให้ $x(t)=Ke^{st}$ โดยที่ K เป็นค่าคงที่เชิงซ้อน
ในการหาผลเฉลยของสมการ (62) จะเริ่มจากหาสมการลักษณะเฉพาะของสมการ (62) นั่นคือ

$$br+a=0$$

และรากของสมการ คือ

$$r=-\frac{b}{a}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองธรรมชาติ คือ

$$y_h=ce^{rt}=ce^{-\frac{b}{a}t}$$

เนื่องจากอินพุต $x(t)=Ke^{st}$ ดังนั้นกำหนดให้ y_p ให้สอดคล้องกับ $x(t)$ คือ

$$y_p=Ae^{st}$$

นำ $y_p=Ae^{st}$ แทนในสมการ (62) จะได้

$$asAe^{st}+bAe^{st}=Ke^{st}$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$asA + bA = K$$
$$A(as+b) = K$$
$$A = K\left(\frac{1}{as+b}\right)$$

นำ $A = K\left(\frac{1}{as+b}\right)$ แทนใน $y_p = Ae^{st}$ จะได้

$$y_p = K\left(\frac{1}{as+b}\right)e^{st}$$

ดังนั้น คำตอบสมบูรณ์ในรูปทั่วไปคือ

$$y(t) = y_h + y_p = ce^{-\frac{b}{a}t} + K\left(\frac{1}{as+b}\right)e^{st} \tag{63}$$

จากสมการ (63) จะเห็นว่า $y(t)$ มีสองส่วนประกอบ คือ $ce^{-\frac{b}{a}t}$ ซึ่งเป็นส่วนประกอบชั่วครู่ (transient component) มีความถี่ $-\frac{b}{a}$ ส่วนประกอบชั่วครู่นี้จะเกิดขึ้นตามคุณสมบัติของระบบ และจะลดลงตามเวลา ในส่วน $K\left(\frac{1}{as+b}\right)e^{st}$ เป็นส่วนประกอบสภาวะคงตัว (steady state component) ซึ่งมีความถี่เดียวกับอินพุต ถ้าสมมุติให้ส่วนประกอบชั่วครู่ลดลงเร็วมากกว่าส่วนประกอบสถานะคงตัว ดังนั้น หลังจากช่วงเวลาที่ยาวนาน ส่วนประกอบชั่วครู่จะสามารถตัดทิ้งได้ เพราะฉะนั้น ผลตอบสนองของระบบก็คือ ส่วนประกอบสถานะคงตัว $K\left(\frac{1}{as+b}\right)e^{st}$ กล่าวคือ

$$y(t) = K\left(\frac{1}{as+b}\right)e^{st} \tag{64}$$

ถ้าทำการแปลงฟูเรียร์สมการ (62) ซึ่งมีลำดับการแปลงดังนี้

$$F\left[a\frac{dy}{dt}\right]+F\left[by(t)\right]=F\left[x(t)\right]$$
$$aF\left[\frac{dy}{dt}\right]+bF\left[y(t)\right]=F\left[x(t)\right]$$

จาก $F\left[\frac{d^n y}{dt}\right]=\left(j\omega\right)^n\cdot Y(j\omega)$ และ $F\left[y(t)\right]=Y(j\omega)$ และ $F\left[x(t)\right]=X(j\omega)$ จะได้

$$\begin{aligned}a\left(j\omega\right)Y\left(j\omega\right)+bY\left(j\omega\right)&=X\left(j\omega\right)\\ \left[a\left(j\omega\right)+b\right]Y\left(j\omega\right)&=X\left(j\omega\right)\\ Y\left(j\omega\right)&=\frac{1}{\left[a\left(j\omega\right)+b\right]}X\left(j\omega\right)\end{aligned} \tag{65}$$

ดังนั้น ฟังก์ชั่นถ่ายโอนของระบบ คือ

$$H\left(j\omega\right)=\frac{Y\left(j\omega\right)}{X\left(j\omega\right)}=\frac{1}{\left[a\left(j\omega\right)+b\right]} \tag{66}$$

จึงทำให้สมการ (66) เขียนได้อีกรูปเป็น

$$Y\left(j\omega\right)=H\left(j\omega\right)X\left(j\omega\right)$$

ดังนั้น ฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มของเอาต์พุตก็คือ ผลคูณของของฟังก์ชั่นถ่ายโอนกับฟูเรียร์ทรานส์ฟอร์มสัญญาณอินพุต

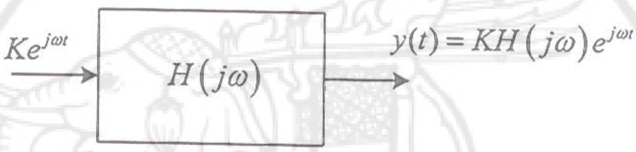
จากสมการ (64) ถ้าให้ $s=j\omega$ จะได้

$$y(t)=K\left(\frac{1}{a\left(j\omega\right)+b}\right)e^{(j\omega)t} \tag{67}$$

จะเห็นได้ว่าเทอม $\left(\frac{1}{a(j\omega)+b}\right)$ ในสมการ (67) จะมีค่าเท่ากับ $H(j\omega)$ ในสมการ (66) ดังนั้น $H(j\omega)$ สามารถเรียกได้อีกอย่างว่า **ผลตอบสนองความถี่ของระบบ ณ สภาวะคงตัว** และสามารถเขียนผลตอบสนองเอาต์พุตเนื่องจากการป้อนอินพุต $x(t) = Ke^{j\omega t}$ ให้กับระบบได้เป็น

$$y(t) = KH(j\omega)e^{j\omega t}$$

ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตได้แสดงไว้ดังภาพ 10



ภาพ 10 ความสัมพันธ์ของอินพุตและเอาต์พุต

ดังนั้น สามารถหาฟังก์ชั่นถ่ายโอนได้อีกทางคือ

$$H(j\omega) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{KH(j\omega)e^{j\omega t}}{Ke^{j\omega t}}$$

ซึ่งอัตราส่วนของแอมพลิจูดทางด้านเอาต์พุตต่อแอมพลิจูดทางด้านอินพุตนี้จะเรียกว่าอัตราการขยาย (gain) ของระบบ เพราะฉะนั้นฟังก์ชั่นถ่ายโอนก็คืออัตราการขยายของระบบนั่นเอง

เมื่อพิจารณาสมการ (62) อีกครั้ง โดยกำหนดให้ $x(t) = Ke^{j\omega t}$ และ $y(t) = KH(j\omega)e^{j\omega t}$ แล้วแทนค่าเหล่านี้ในสมการ (62) จะได้

$$a(j\omega)KH(j\omega)e^{j\omega t} + bKH(j\omega)e^{j\omega t} = Ke^{j\omega t}$$
$$H(j\omega)Ke^{j\omega t}\left(a(j\omega)+b\right) = Ke^{j\omega t}$$
$$H(j\omega) = \frac{1}{a(j\omega)+b}$$

ซึ่งวิธีนี้ก็ทำให้ได้ $H(j\omega)$ ที่มีค่าเท่ากันกับสมการ (66)

ในลำดับต่อไป เมื่อพิจารณาหาส่วนจริงของ $x(t)$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(x(t)\right) &= \operatorname{Re}\left(Ke^{j\omega t}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(|K|e^{j\angle K}e^{j\omega t}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(|K|e^{j(\omega t+\angle K)}\right) \\
&= |K|\cos\left(\omega t+\angle K\right)
\end{aligned} \tag{68}
$$

และส่วนจริงของ $y(t)$ คือ

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(y(t)\right) &= \operatorname{Re}\left(KH(j\omega)e^{j\omega t}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(|K||H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}e^{j\angle K}e^{j\omega t}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(|K||H(j\omega)|e^{j(\omega t+\angle H(j\omega)+\angle K)}\right) \\
&= |K||H(j\omega)|\cos\left(\omega t+\angle H(j\omega)+\angle K\right)
\end{aligned} \tag{69}
$$

เป็นที่ทราบกันดีว่า ส่วนจริงของอินพุตที่เป็นเชิงซ้อนจะก่อให้เกิดส่วนจริงของผลตอบสนองเอาต์พุต ดังนั้น จากการสังเกตสมการ (68) และ (69) จะเห็นได้ว่าอินพุตไซนูซอยด์ที่ความถี่ ω จะก่อให้เกิดผลตอบสนองไซนูซอยด์ที่ความถี่ ω เดียวกัน โดยมีขนาดของผลตอบสนองคือ $|K||H(j\omega)|$ และเฟสของผลตอบสนองคือ $\angle H(j\omega)+\angle K$

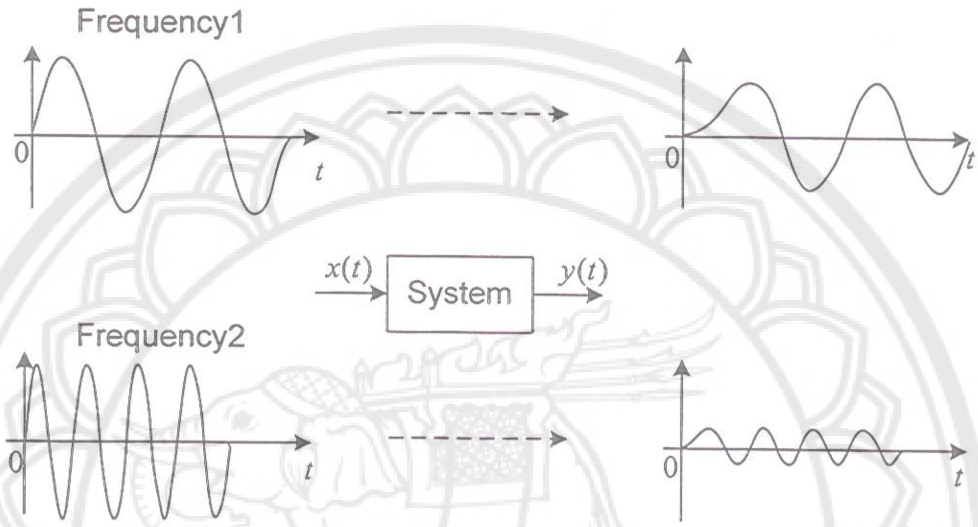
ในทางปฏิบัติ ถ้ากำหนดสัญญาณอินพุตเป็น

$$x(t) = B\sin\omega t$$

จากภาพ 11 สัญญาณอินพุตนี้จะให้ผลตอบสนองชั่วครู่ (transient response) (ซึ่งจะหมดไปในตอนท้าย) และผลตอบสนองสภาวะคงตัว (steady-state response) $y_{ss}(t)$

$$y_{ss}(t) = B|H(j\omega)|\sin(\omega t+\angle H(j\omega))$$

ดังนั้นจะพบว่า ***ผลตอบสนองสภาวะคงตัวแบบไซนูซอยด์จะมีความถี่เดียวกันกับอินพุต แต่แอมพลิจูดและมุมเฟสถูกกำหนดโดยผลตอบสนองทางขนาด $|H(j\omega)|$ และผลตอบสนองทางเฟส $\angle H(j\omega)$ ของระบบที่ความถี่ ω ใดๆ ที่ให้มา***



ภาพ 11 ผลตอบสนองที่เอาต์พุตที่ความถี่ของอินพุตแตกต่างกัน

ตัวอย่าง การผลตอบสนองความถี่ของระบบ ๆ หนึ่ง

ระบบเวลาต่อเนื่อง (continuous-time system) ระบบหนึ่ง ได้อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$Ty'(t) + y(t) = Kx(t)$$

จงหาขนาดและเฟสของผลตอบสนองความถี่ระบบนี้

<u>วิธีทำ</u>

หาฟังก์ชั่นถ่ายโอน (ผลตอบสนองความถี่) โดยใช้การแปลงฟูเรียร์

$$H(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1} = \frac{K}{\underbrace{1}_{\text{Re}} + j\underbrace{T\omega}_{\text{Im}}}$$

เขียนผลตอบสนองความถี่ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว (polar form)

$$H(j\omega)=\frac{K}{\sqrt{1^2+(T\omega)^2}e^{j\left[\tan^{-1}(\frac{T\omega}{1})\right]}}$$

$$=\frac{K}{\sqrt{1^2+(T\omega)^2}}e^{j\left[-\tan^{-1}(T\omega)\right]}=|H(j\omega)|e^{j[\angle H(j\omega)]}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองความถี่ทางขนาดคือ

$$|H(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1^2+(T\omega)^2}}$$

และผลตอบสนองความถี่ทางเฟสคือ

$$\angle H(j\omega)=-\tan^{-1}(T\omega)\ \text{(เรเดียน)}$$

เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว

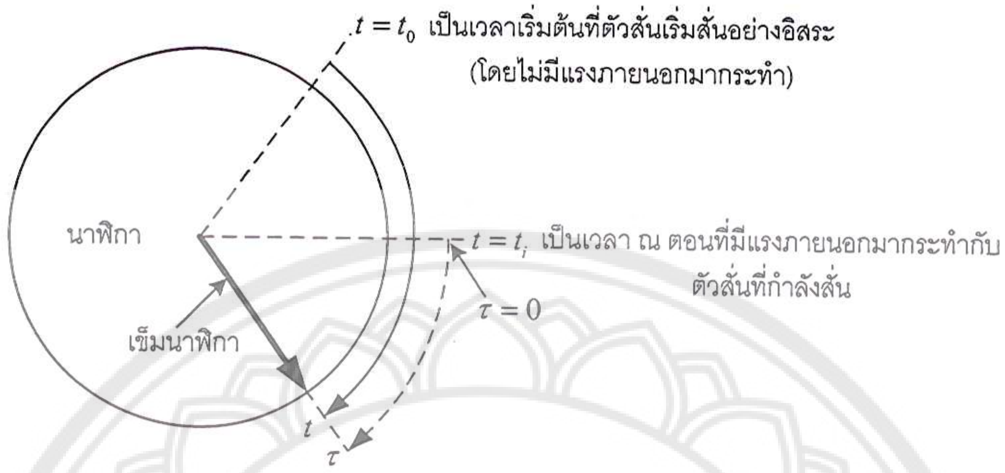
หลักการของตัวแปรเวลาหลายตัวได้สมมุติให้เวลาของผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับแยกออกเป็นสองตัวแปร คือ t และ τ ถ้ากำหนดให้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็นฟังก์ชั่นของ t และผลตอบสนองบังคับเป็นฟังก์ชั่นของ τ ดังนั้น ผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบสามารถเขียนได้เป็น

$$y(t,\tau)=y_h(t)+y_f(\tau) \tag{70}$$

โดยที่ τ เป็นเวลาที่พิจารณาหลังจากการเริ่มเวลา t ของระบบไป Δt นั่นคือ

$$\tau=t-\Delta t \tag{71}$$

ซึ่งในทางปฏิบัติสามารถอธิบายได้ง่ายๆ ดังนี้



ภาพ 12 ความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t และ τ ในทางปฏิบัติ

จากภาพ 12 เมื่อระบบสั่นเริ่มสั่นอย่างอิสระ เวลาเริ่มต้นของระบบจะเท่ากับ $t = t_0$ จากนั้น เมื่อเวลา t เพิ่มขึ้น ตัวสั่นก็คงสั่นอย่างอิสระต่อไป ตราบใดที่ยังไม่มีการบังคับจากภายนอกมากระทำกับระบบ แต่ถ้ามีการบังคับจากภายนอกเริ่มกระทำกับระบบที่กำลังสั่นอยู่นั้นที่เวลา $t = t_i$ ณ ตอนนี้ เวลา τ ก็จะเริ่มต้นขึ้น โดยเริ่มจาก $\tau = 0$ จากนั้น เมื่อเวลา t เพิ่มขึ้น เวลา τ ก็จะเพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์เป็น $\tau = t - (t_i - t_0) = t - \Delta t$ โดยที่ $\Delta t = t_i - t_0$ ซึ่งเป็นที่มาของสมการ (71) ดังที่กล่าวไว้ข้างต้น

ถ้าสมมุติให้ระบบๆ หนึ่งที่มีการสั่นแบบไซน์ที่ถูกหน่วงภายใต้อิทธิพลของอินพุตได้อธิบายด้วยสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$a_2 \frac{d^2}{dt} y(t) + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = x(t) \qquad (72)$$

เมื่อต้องการหาผลเฉลยของระบบดังกล่าวด้วยหลักการตัวแปรเวลาหลายตัวจะทำให้ได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายระบบเป็นดังนี้

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y(t,\tau) + a_1 \frac{d}{dt} y(t,\tau) + a_0 y(t,\tau) = x(\tau) \qquad (73)$$

ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติหาได้จากการแก้สมการ

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} y_n(t) + a_1 \frac{d}{dt} y_n(t) + a_0 y_n(t) = 0 \tag{74}$$

และผลตอบสนองบังคับหาได้จากการแก้สมการ

$$a_2 \frac{d^2}{d\tau^2} y_f(\tau) + a_1 \frac{d}{d\tau} y_f(\tau) + a_0 y_f(\tau) = x(\tau) \tag{75}$$

เมื่อแก้สมการ (74) ทำให้ได้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็น

$$y_n(t) = c_1 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}$$

โดยที่ $\omega_0 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ และ $\lambda = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$ และเมื่อพิจารณาในกรณี $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ (ดูหน้าที่หน้า 14) จะได้

$$y_n(t) = e^{-\lambda t} A \cos(\omega_n t - \phi)$$

โดยที่ $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ ในที่นี้จะเลือกให้คำตอบของผลตอบสนองธรรมชาติมีเฟสเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$y_n(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_n t)$$

สำหรับค่าผลการตอบสนองบังคับ ซึ่งโดยปรกติแล้วจะต้องทราบค่าฟังก์ชันอินพุตเสียก่อนจึงจะสามารถหาค่าผลการตอบสนองบังคับได้ โดยในที่นี้จะแทนผลการตอบสนองบังคับด้วย $y_f(\tau)$ ไม่ว่าสัญญาณอินพุตจะมีรูปแบบเป็นฟังก์ชันใดๆ ดังนั้นผลการตอบสนองเอาต์พุตที่สมบูรณ์จะได้เป็น

$$y(t,\tau) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) + y_f(\tau) \tag{76}$$

เมื่อแทน $t = 0$ และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0,\tau) = y_0$ ลงใน (76) เพื่อหาค่า A จะทำให้ได้

$$y(0,\tau) = A + y_f(\tau)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A &= y(0,\tau) - y_f(\tau) \\ &= y_0 - y_f(\tau) \end{aligned}$$

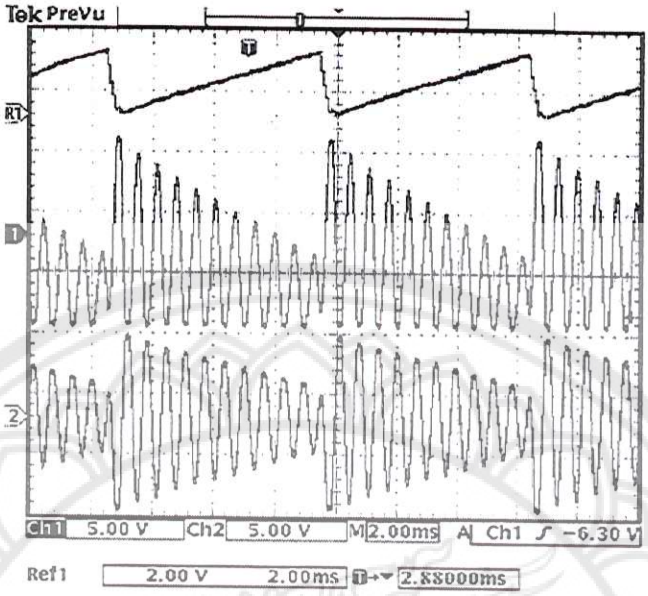
แทนค่า A จากดังกล่าวลงใน (76) จะได้

$$y(t,\tau) = \left[y_0 - y_f(\tau)\right]e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) + y_f(\tau)$$

จากผลตอบสนองสมบูรณ์ที่แทนเงื่อนไขเริ่มต้นเข้าไปแล้วนี้ พบว่าผลตอบสนองบังคับเนื่องจากอินพุตบังคับจะมีผลต่อขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติตลอดเวลา

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

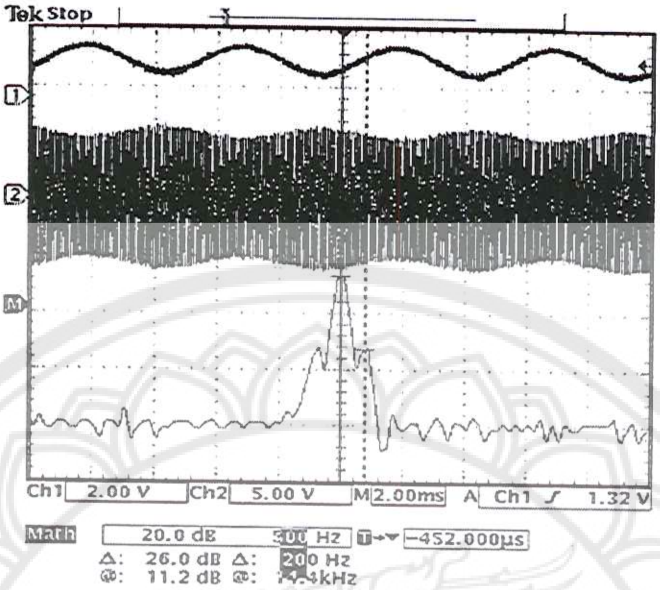
ธงชัย มณีชูเกตุ และคณะ (Maneechukate, et al., 2000, pp. 666-673) ได้นำเสนอแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบใหม่กับการวิเคราะห์หาผลตอบสนองสมบูรณ์ของวงจรออสซิลเลเตอร์ด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวเพื่อศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลตภายใต้สภาวะอินพุตบังคับ ซึ่ง**จากผลเฉลยที่ได้พบว่า ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะไม่ใช่ค่าคงที่ แต่จะแปรเปลี่ยนไปตามผลตอบสนองบังคับของระบบ**



ภาพ 13 ผลจากการทดลองเมื่อป้อนอินพุตบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลาให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์

จากผลการทดลองในภาพ 13 สัญญาณเส้นบนเป็นอินพุตที่แปรเปลี่ยนขนาดตามเวลาที่ป้อนให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ ซึ่งในที่นี้เป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย สัญญาณเส้นกลางเป็นเอาต์พุตของวงจรซึ่งเป็นผลตอบสนองสมบูรณ์ และสัญญาณเส้นล่างจะเป็นผลตอบสนองธรรมชาติที่ได้จากการกำจัดหรือกรองผลตอบสนองบังคับออกจากผลตอบสนองสมบูรณ์ ซึ่งสังเกตได้ว่า ผลตอบสนองธรรมชาติซึ่งเป็นสัญญาณออสซิลเลต จะมีขนาดที่เปลี่ยนแปลงตามสัญญาณอินพุต

ธงชัย มณีชูเกตุ และคณะ (Maneechukate, et al., 2006, pp. 3802-3805) ได้นำเสนอเทคนิคใหม่ของการมอดูเลตเชิงขนาดที่อยู่บนพื้นฐานของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับสอง โดยการใช้หลักตัวแปรเวลาหลายตัวเพื่อวิเคราะห์ระบบอันดับสองที่มีอินพุตบังคับที่เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลา ซึ่งทำให้แอมปลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติสามารถควบคุมจากผลตอบสนองบังคับได้โดยตรง ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ผลตอบสนองบังคับและฟังก์ชันบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลามีค่าเท่ากันโดยประมาณ



ภาพ 14 ผลจากการทดลองเมื่อป้อนอินพุตบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลาให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ภายใต้เงื่อนไขผลตอบสนองบังคับและฟังก์ชั่นบังคับที่แปรผันตามเวลามีค่าเท่ากันโดยประมาณ

จากผลการทดลองในภาพ 14 สัญญาณเส้นบนเป็นอินพุตที่มีขนาดแปรเปลี่ยนตามเวลาซึ่งป้อนให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ ซึ่งในที่นี้เป็นสัญญาณรูปไซน์ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองธรรมชาติที่ได้จากการกำจัดผลตอบสนองบังคับออกจากผลตอบสนองสมบูรณ์ (กรองจากเอาต์พุตของวงจรออสซิลเลเตอร์) และสัญญาณเส้นล่างจะเป็นสเปกตรัมของสัญญาณเส้นกลาง และสังเกตได้ว่า องค์ประกอบความถี่ของสเปกตรัมจะไปตามสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้ามาซึ่งเป็นการมอดูเลตเชิงขนาดโดยที่ผลตอบสนองธรรมชาติและฟังก์ชั่นบังคับที่แปรเปลี่ยนตามเวลานั้นจะแทนสัญญาณคลื่นพาห์และสัญญาณข้อมูลตามลำดับ

Roychowdhury (Roychowdhury, 2001, pp. 578-594) ได้นำเสนอสมการอนุพันธ์ย่อยที่มีการแยกตัวแปรทางเวลาสองตัวแปรคือ t_1 และ t_2 มาประยุกต์ใช้สำหรับการวิเคราะห์การมอดูเลตทางความถี่และทางขนาดของวงจรออสซิลเลเตอร์ ดังนั้น สัญญาณ $y(t)$ ที่มีตัวแปรเวลาเพียงตัวเดียว t จะเขียนแทนด้วยฟังก์ชัน $y(t_1,t_2)$ ซึ่งมีตัวแปรเวลาสองตัว t_1 และ t_2 ซึ่งพบว่าสัญญาณ $y(t_1,t_2)$ ได้ให้ข้อมูลเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงที่ช้าและเร็วของสัญญาณได้อย่างเป็นธรรมชาติและสะดวกกว่า $y(t)$ แต่อย่างไรก็ตาม สัญญาณดั้งเดิม $y(t)$ สามารถทำให้กลับคืนมาได้อย่างสมบูรณ์โดยการกำหนดให้ $t_1 = t_2 = t$