บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ได้นำทฤษฎีและเทคนิคต่างๆ เช่น เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว หลักการของการแปลงฟูเรียร์มาใช้ร่วมกับการวิเคราะห์สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองของระบบสั่นทางกลในสภาวะที่ถูกแรงภายนอกบังคับ นอกจากนี้ยังได้อธิบายถึงการทดลองที่ทำให้ได้ผลการทดลองที่นำไปยืนยันถึงความถูกต้องและแม่นยำของผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคต่างๆ ดังกล่าว

การวิเคราะห์หาผลเฉลยของระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงภายนอกกระทำโดยนำหลักการตัวแปรเวลาหลายตัวและการแปลงฟูเรียร์เข้าช่วย

จากบทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของมวลติดกับสปริงที่กำลังสั่นและถูกแรงกระทำจากภายนอกได้กล่าวไว้ในสมการ (27) ในที่นี้จะนำสมการดังกล่าวมาแสดงให้เห็นอีกครั้งเพื่อความสะดวก นั่นคือ

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\beta\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=f(t)$$

เมื่อใช้หลักการตัวแปรเวลาหลายตัวเข้าช่วยในการวิเคราะห์ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองที่อธิบายการเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริงเป็นดังนี้

$$m\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+\beta\frac{dx(t,\tau)}{dt}+kx(t,\tau)=f(\tau) \tag{77}$$

จัดเรียงสมการ (77) ใหม่ จะได้

$$\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+\frac{\beta}{m}\frac{dx(t,\tau)}{dt}+\frac{k}{m}x(t,\tau)=\frac{1}{m}f\left(\tau\right) \tag{78}$$

กำหนดให้ $\dfrac{\beta}{m}=2\lambda$ และ $\dfrac{k}{m}=\omega_0^2$ ทำให้สมการ (78) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+2\lambda\frac{dx(t,\tau)}{dt}+\omega_0^2x(t,\tau)=\frac{1}{m}f(\tau) \tag{79}$$

เมื่อต้องการหาผลตอบสนองธรรมชาติ สมการ (79) จะเขียนได้เป็น

$$\frac{d^2x_n(t)}{dt^2}+2\lambda\frac{dx_n(t)}{dt}+\omega_0^2x_n(t)=0 \tag{80}$$

จากสมการ (80) สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) จะเป็น

$$r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$$

ซึ่งรากของสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$r_1=-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\ ,\ r_2=-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$$

ในที่นี้ กำหนดให้ผลตอบสนองมีลักษณะสั่นภายใต้แรงหน่วง (กรณีที่ 3 $\lambda^2-\omega^2<0$ ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 2) ดังนั้น

$$r_1=-\lambda+j\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\ ,\ r_2=-\lambda-j\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$$

ซึ่งจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติที่มีรูปสมการเหมือนกับสมการ (18) ในบทที่ 2 คือ

$$x_n(t)=e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t+b\sin\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t\right)$$

และสามารถเขียนได้อีกรูปแบบคือ

$$x_n(t)=e^{-\lambda t}A\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t-\phi\right)$$

โดยที่ $A=\sqrt{a^2+b^2}$ และ $\phi=\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

สำหรับการหาผลตอบสนองบังคับ $x_f(\tau)$ สามารถเขียนสมการ (79) เป็น

$$\frac{d^2x_f(\tau)}{d\tau^2}+2\lambda\frac{dx_f(\tau)}{d\tau}+\omega_0^2x_f(\tau)=\frac{1}{m}f(\tau) \tag{81}$$

โดยการประยุกต์ใช้หลักการการแปลงฟูเรียร์ที่กล่าวไว้ในบทที่ 2 ถ้าอินพุต $f(\tau)=F_0\cos(\omega_f\tau)$ จะได้ผลตอบสนองบังคับ

$$x_f(\tau)=F_0\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f\tau+\angle H(j\omega_f)) \tag{82}$$

โดยที่ผลตอบสนองความถี่ $H(j\omega_f)$ ของสมการ (81) สามารถหาได้โดยการแปลงฟูเรียร์ของสมการ (81) ดังนี้

$$\left(j\omega_f\right)^2X(j\omega_f)+2\lambda\left(j\omega_f\right)X(j\omega_f)+\omega_0^2X(j\omega_f)=\frac{1}{m}F(j\omega_f)$$

จัดรูปสมการใหม่

$$\left(-\omega_f^2+2\lambda\omega_f j+\omega_0^2\right)X(j\omega_f)=\frac{1}{m}F(j\omega_f)$$

จะได้ผลตอบสนองความถี่ ณ สภาวะคงตัวดังนี้

$$H(j\omega_f)=\frac{X(j\omega_f)}{F(j\omega_f)}=\frac{1}{m\left[\left(\omega_0^2-\omega_f^2\right)+2\lambda\omega_f j\right]}$$

ซึ่งเขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น

$$H(j\omega_f) = \left|H(j\omega_f)\right| e^{j\left[\angle H(j\omega_f)\right]}$$

$$= \frac{1}{m\left[\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}\, e^{j\left[\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)\right]}\right]}$$

$$= \frac{1}{m\left[\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}\right]} e^{j\left[-\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2-\omega_f^2}\right)\right]}$$

โดยที่

$$\left|H(j\omega_f)\right| = \frac{1}{m\left[\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right)^2 + \left(2\lambda\omega_f\right)^2}\right]} \text{ และ } \angle H(j\omega_f) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\lambda\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}\right) \quad (83)$$

เมื่อทราบค่าของผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับแล้ว สามารถหาผลตอบสนองสมบูรณ์ในมุมมองของตัวแปรเวลาหลายตัว คือ

$$\begin{aligned} x(t,\tau) &= x_n(t) + x_f(\tau) \\ &= e^{-\lambda t}\left(a\cos\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t + b\sin\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\,t\right) + x_f(\tau) \end{aligned} \quad (84)$$

ซึ่งในที่นี้ ผลตอบสนองบังคับยังคงเขียนเป็น $x_f(\tau)$ เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์สมการในลำดับถัดไป

กำหนดให้ $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ ดังนั้นสมการ (84) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$x(t,\tau) = e^{-\lambda t}\left(a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t\right) + x_f(\tau) \quad (85)$$

จากสมการ (85) สามารถหาค่าของ a และ b ที่อยู่ในรูปเงื่อนไขเริ่มต้น x_0 v_0 และผลตอบสนองบังคับ $x_f(\tau)$ ได้โดย

แทน $t = 0$ ในสมการ (85) จะได้

$$x(0,\tau) = x_0 = a + x_f(\tau)$$

หรือ

$$a = x_0 - x_f(\tau) \tag{86}$$

หาอนุพันธ์อันดับหนึ่งของสมการ (85) จะได้

$$\frac{d}{dt}x(t,\tau) = e^{-\lambda t}\left(-a\omega_n \sin\omega_n t + b\omega_n \cos\omega_n t\right) - \lambda e^{-\lambda t}\left(a\cos\omega_n t + b\sin\omega_n t\right) \tag{87}$$

แทน $t = 0$ ในสมการ (87) จะได้

$$\left.\frac{d}{dt}x(t,\tau)\right|_{t=0} = v(0,\tau) = v_0 = b\omega_n - \lambda a$$

ซึ่งได้

$$b = \frac{v_0 + \lambda a}{\omega_n} \tag{88}$$

นำสมการ (86) แทนในสมการ (88) จะได้

$$b = \frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(\tau)\right)}{\omega_n}$$

ดังนั้นสมการ (85) เขียนใหม่ได้เป็น

$$x(t,\tau) = e^{-\lambda t}\left(\left(x_0 - x_f(\tau)\right)\cos\omega_n t + \frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(\tau)\right)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) + x_f(\tau)$$

และสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$x(t,\tau) = e^{-\lambda t} A\cos\left(\omega_n t - \phi\right) + x_f(\tau) \tag{89}$$

โดยที่

$$A = \sqrt{\left(x_0 - x_f(\tau)\right)^2 + \left(\frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(\tau)\right)}{\omega_n}\right)^2}$$

และ

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + \lambda\left(x_0 - x_f(\tau)\right)}{\omega_n\left(x_0 - x_f(\tau)\right)}\right)$$

ถ้าต้องการให้ $\phi = 0$ จะต้องกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นให้ $v(0,\tau) = v_0 = -\lambda\left(x_0 - x_f(\tau)\right)$ และ $x(0,\tau) = x_0$ ซึ่งทำให้ $A = x_0 - x_f(\tau)$ และสมการ (89) จะกลายเป็น

$$x(t,\tau) = e^{-\lambda t}\left(x_0 - x_f(\tau)\right)\cos\omega_n t + x_f(\tau) \tag{90}$$

เพื่อความสะดวก สมการ (49) ในบทที่สองซึ่งเป็นผลเฉลยเนื่องจากใช้วิธีการแบบดั้งเดิม จะนำมาเขียนในที่นี้อีกครั้ง ดังนี้

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(x_0 - x_f(0)\right)\cos\omega_n t + x_f(t)$$

เมื่อเปรียบเทียบกันระหว่างสมการ (90) และสมการ (49) จะเห็นได้ว่า สมการ (90) จะมีขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับตลอดเวลา (ที่ $t \geq 0$) ในทางตรงกันข้ามสมการ (49) จะมีขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับที่เวลาเริ่มต้น

$t = 0$ เท่านั้น ซึ่งเป็นความแตกต่างที่ชัดเจนระหว่างเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวและวิธีการแบบดั้งเดิม ดังนั้น สมการ (90) สามารถเขียนต่อไปอีกได้เป็น

$$x(t,\tau) = x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - x_f(\tau)e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) + x_f(\tau) \tag{91}$$

จากนั้นนำผลตอบสนองบังคับจากสมการ (82) แทนลงในสมการ (91) จะได้

$$\begin{aligned} x(t,\tau) &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - \left[F_0\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f\tau + \angle H(j\omega_f))\right]e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) \\ &\quad + F_0\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f\tau + \angle H(j\omega_f)) \\ &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - F_0\left|H(j\omega_f)\right|e^{-\lambda t}\cos(\omega_f\tau + \angle H(j\omega_f))\cos(\omega_n t) \\ &\quad + F_0\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f\tau + \angle H(j\omega_f)) \end{aligned} \tag{92}$$

โดยที่ค่าของ $\left|H(j\omega_f)\right|$ และ $\angle H(j\omega_f)$ ได้กล่าวไว้แล้วในสมการ (83)

จากการสมมุติ $\tau = t - \Delta t$ ซึ่งเป็นสมการ (72) ในบทที่ 2 ดังนั้น สมการ (92) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} x(t,t+\Delta t) &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - F_0\left|H(j\omega_f)\right|e^{-\lambda t}\cos(\omega_f(t-\Delta t) + \angle H(j\omega_f))\cos(\omega_n t) \\ &\quad + B\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f(t-\Delta t) + \angle H(j\omega_f)) \\ &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - F_0\left|H(j\omega_f)\right|e^{-\lambda t}\cos(\omega_f t - \omega_f\Delta t + \angle H(j\omega_f))\cos(\omega_n t) \\ &\quad + B\left|H(j\omega_f)\right|\cos(\omega_f t - \omega_f\Delta t + \angle H(j\omega_f)) \end{aligned} \tag{93}$$

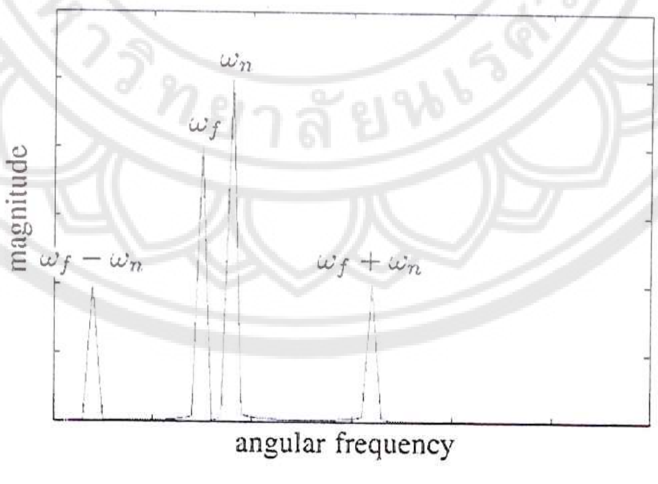
เพื่อความกระชับของสมการ จะกำหนดให้ $D = F_0\left|H(j\omega_f)\right|$ คือขนาดของผลตอบสนองบังคับ และ $\phi_d = -\omega_f\Delta t + \angle H(j\omega_f)$ คือความต่างเฟสระหว่างผลตอบสนองบังคับและแรงภายนอก สมการ (93) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$x(t,t+\Delta t) = x_0 e^{-\lambda t}\cos\left(\omega_n t\right) - De^{-\lambda t}\cos(\omega_f t+\phi_d)\cos\left(\omega_n t\right) \\ +D\cos(\omega_f t+\phi_d) \tag{94}$$

ในเทอมที่สองของสมการ (94) สามารถแยกได้ออกเป็นสองเทอมโดยใช้คุณสมบัติของตรีโกณมิติ $\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$ ทำให้สมการ (94) เขียนได้ใหม่เป็น

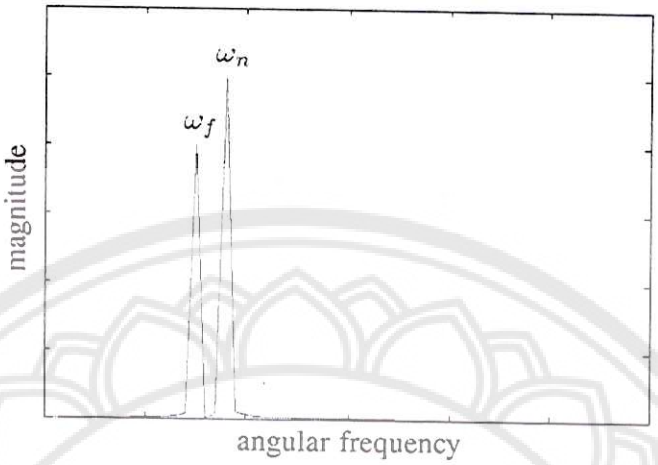
$$\begin{aligned} x(t,t+\Delta t) &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - \frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\omega_f t+\omega_n t+\phi_d\right] - \frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\omega_f t-\omega_n t+\phi_d\right] \\ &\quad +D\cos\left[\omega_f t+\phi_d\right] \\ &= x_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t) - \frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\left(\omega_f+\omega_n\right)t+\phi_d\right] - \frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\left(\omega_f-\omega_n\right)t+\phi_d\right] \\ &\quad +D\cos\left[\omega_f t+\phi_d\right] \end{aligned} \tag{95}$$

จากสมการ (95) ความถี่เชิงมุมของเทอมที่หนึ่ง สอง สาม และสี่มีค่าเท่ากับ ω_n $\omega_f+\omega_n$ $\omega_f-\omega_n$ และ ω_f ตามลำดับ ซึ่งสามารถแสดงให้เห็นภาพได้โดยง่ายด้วยสเปกตรัมที่จำลองขึ้นมาดังแสดงในภาพ 15



ภาพ 15 สเปกตรัมจำลองของผลเฉลยที่ได้จากการใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว

ซึ่งตรงกันข้ามกับการใช้วิธีการแบบดั้งเดิมที่มีองค์ประกอบความถี่ในผลเฉลย (สมการ (51) ในบทที่ 2) เพียง 2 ความถี่คือ ω_n และ ω_f ดังแสดงในภาพ 16



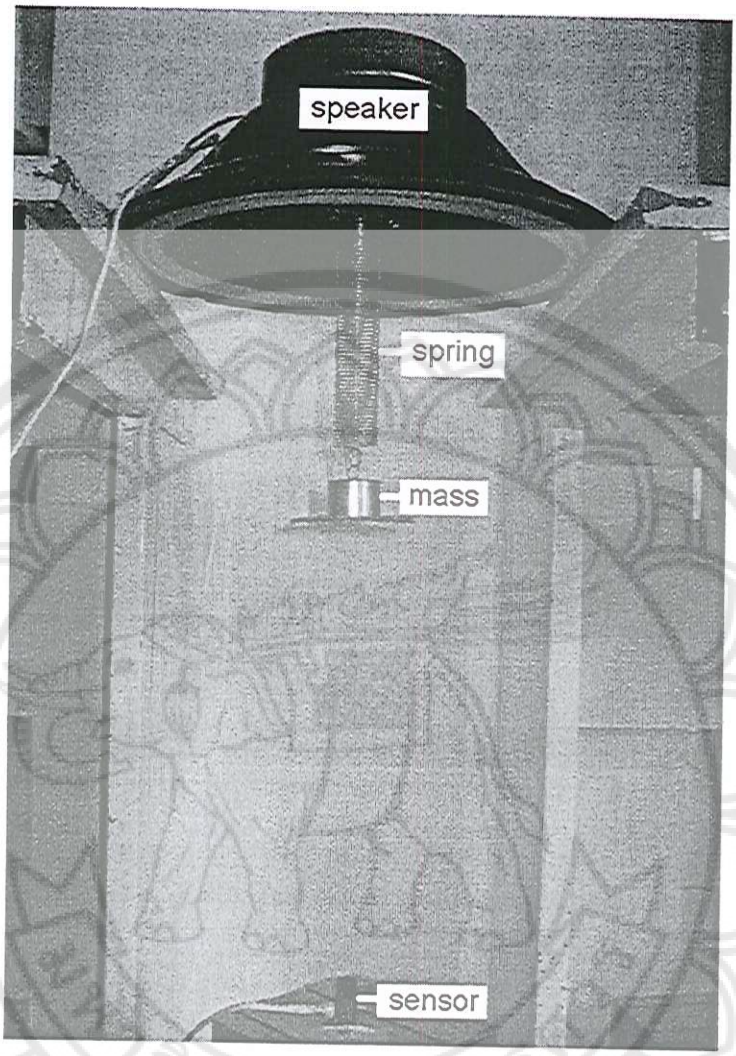
ภาพ 16 สเปกตรัมจำลองของผลเฉลยที่ได้จากการใช้วิธีการแบบดั้งเดิม

พิจารณาสมการ (95) ณ เวลา $t = 0$ ซึ่งเป็นเวลาที่แรงภายนอกเริ่มกระทำต่อระบบขณะที่มวลกำลังสั่น ขนาดของเทอมที่สองและที่สามซึ่งเป็นเทอมใหม่ทั้งสองเทอม มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดของผลตอบสนองบังคับ (เทอมที่สี่) ขณะที่เวลา t เพิ่มขึ้น ตัวประกอบเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-\lambda t}$ จะมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องและมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ด้วยเหตุนี้ ขนาดของเทอมที่สองและเทอมที่สาม รวมไปถึงเทอมที่หนึ่งจะลดลงอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้ขนาดของผลตอบสนองบังคับจะมีขนาดใหญ่เมื่อความถี่การสั่นของแรงบังคับ ω_f เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่สั่นอย่างอิสระโดยไม่มีการหน่วง ω_0 (โดยการสังเกตจากค่าของ $\left|H\left(j\omega_f\right)\right|$ ในสมการ 83) ด้วยเหตุผลนี้ ที่เวลา $t = 0$ ขนาดของเทอมที่สองและเทอมที่สามจะเพิ่มขึ้นตามด้วยซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของผลตอบสนองบังคับ

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า สมการ (95) น่าจะถูกต้องและแม่นยำกว่าสมการ (51) ในบทที่ 2

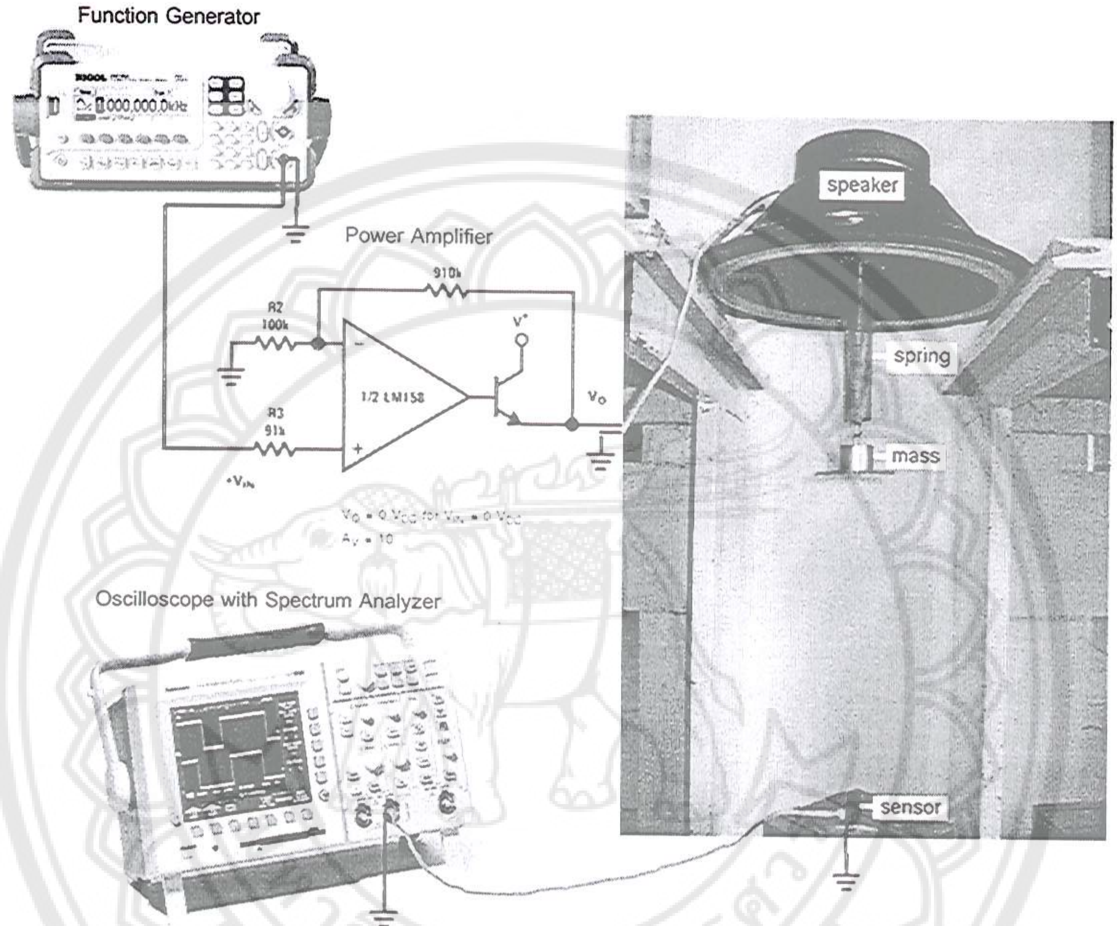
การทดลองของระบบมวลติดสปริงที่ถูกแรงภายนอกกระทำ

เพื่อยืนยันว่าหลักการที่นำเสนอนั้นถูกต้อง การทดลองในสถานการณ์การสั่นของมวลติดกับสปริงภายใต้แรงกระทำภายนอกได้จัดขึ้นดังแสดงในภาพ 17



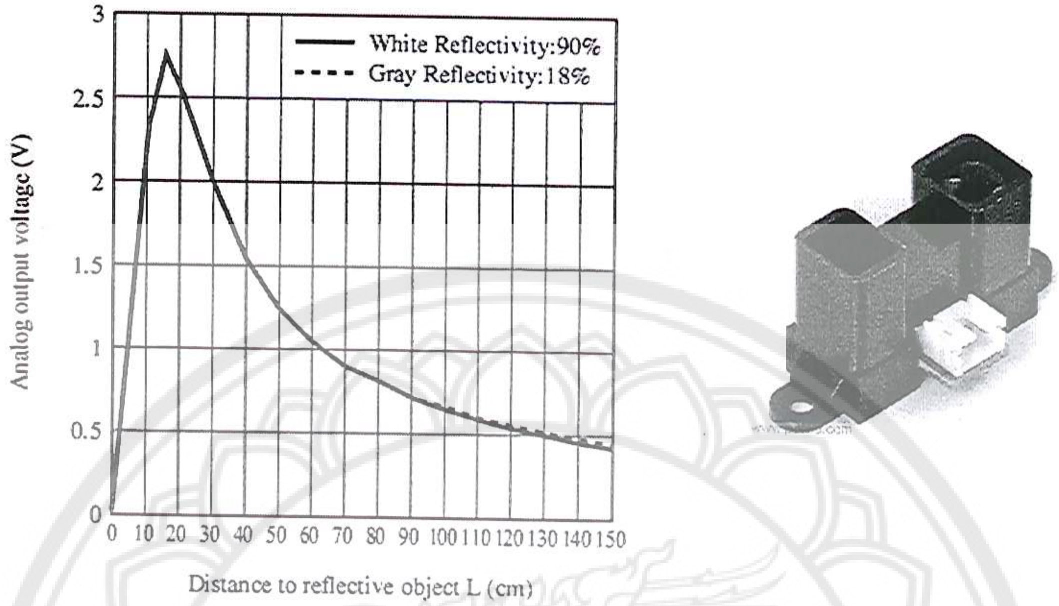
ภาพ 17 การทดลองสปริงที่กำลังสั่นอยู่ภายใต้แรงกระทำจากภายนอก

ในการทดลองนี้ ระบบสั่นประกอบด้วยมวล 0.1 กิโลกรัมผูกติดที่ปลายสปริงอันหนึ่งที่มีค่าคงที่สปริง (k) เท่ากับ 14 นิวตันต่อเมตร ความถี่ธรรมชาติ ω_n ของระบบมีค่า 1.70 Hz ปลายอีกด้านหนึ่งของสปริงจะยึดติดกับตำแหน่งตรงกลางด้านหน้าของดอกลำโพงขนาดใหญ่ที่คว่ำหน้าลงในแนวดิ่ง ดังภาพ 17 ทำหน้าที่เป็นตัวป้อนแรงให้กับระบบมวล-สปริง โดยที่เครื่องกำเนิดสัญญาณจะป้อนสัญญาณรูปไซน์ให้กับวงจรขยายกำลัง (power amplifier) และเอาต์พุตของวงจรขยายกำลังจะเชื่อมต่อไปยังดอกลำโพงดังกล่าว ดังภาพ 18 ซึ่งทำให้ดอกลำโพงสั่นแบบไซน์ตามความถี่ของสัญญาณที่มาจากเครื่องกำเนิดสัญญาณ และสามารถปรับความถี่และแอมปลิจูดของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบมวล-สปริงได้โดยง่าย



ภาพ 18 ภาพรวมการเชื่อมต่ออุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการทดลอง

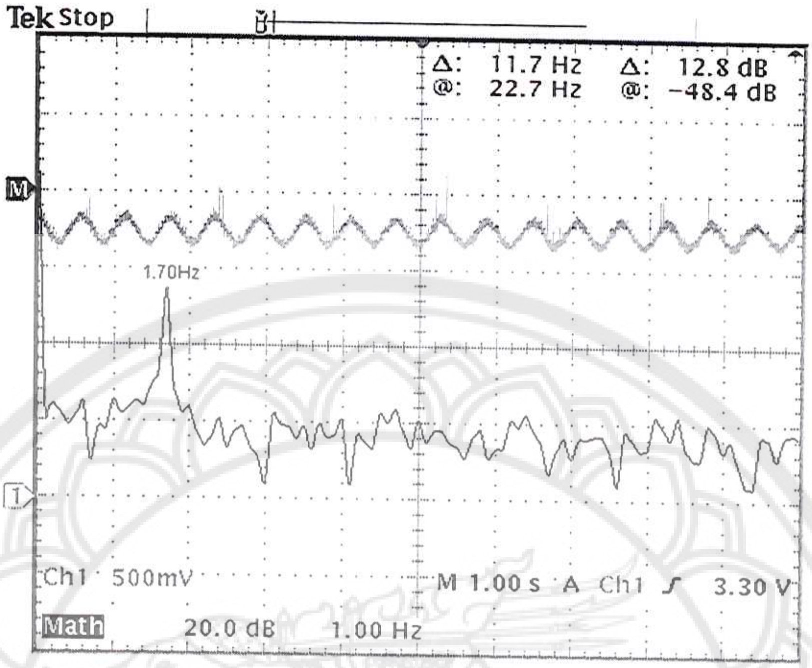
ในการวัดการเคลื่อนที่แบบสั่นของมวลติดกับสปริงจะใช้เซนเซอร์วัดระยะทาง GP2Y0A02YK ของบริษัท SHARP ซึ่งเป็นเซนเซอร์ที่ให้เอาต์พุตเป็นแรงดันสัมพันธ์กับระยะทาง ดังแผนภาพในภาพ 19 เซนเซอร์ถูกวางไว้ใต้มวลที่ติดกับสปริงโดยห่างจากมวลในแนวดิ่งขณะที่สปริงยังไม่สั่น 30 เซนติเมตร ซึ่งเป็นกึ่งกลางของช่วงที่ค่อนข้างเป็นเชิงเส้นและมีอัตราการขยาย (gain) มาก (ในช่วง 20-40 เซนติเมตรจากเซนเซอร์)



ภาพ 19 ความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเอาต์พุตของเซนเซอร์ที่เป็นแรงดัน

เมื่อมวลติดสปริงสั่น แรงดันที่ได้จากเซนเซอร์จะเปลี่ยนแปลงตามการเคลื่อนที่ของมวลที่ติดกับสปริงนี้ ซึ่งจะนำไปแสดงผลและวิเคราะห์สเปกตรัมของมันด้วยออสซิลโลสโคปต่อไป

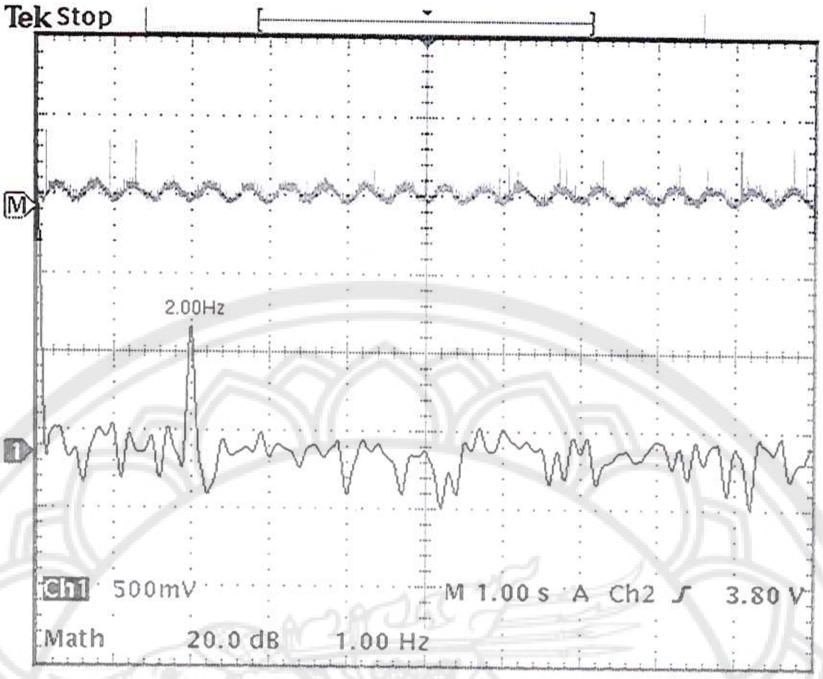
ก่อนอื่น เพื่อให้แน่ใจว่า เอาท์พุตจากเซ็นเซอรวัดระยะทางสัมพันธ์กับการเคลื่อนที่ของมวลอย่างเชิงเส้น ถ้ามวลสั่นโดยยังไม่มีแรงภายนอกมากระทำ สเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์ควรมีองค์ประกอบของความถี่เพียงความถี่เดียวซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติ ω_n ของมวลที่ติดกับสปริง ผู้วิจัยจึงได้ทดลองยกมวลขึ้นแล้วปล่อย โดยไม่ให้การกระจัดของมวลเกินช่วงที่เป็นเชิงเส้น (ในช่วง 20-40 เซนติเมตรจากเซนเซอร์) ในขณะที่ลำโพงยังไม่สั่นหรือไม่ป้อนแรงภายนอกให้กับระบบมวลติดสปริง ซึ่งได้ผลการทดลองดังภาพ 20



ภาพ 20 สัญญาณเส้นบนเป็นเอาต์พุตของเซนเซอร์ และสัญญาณเส้นล่างเป็นสเปกตรัมของสัญญาณเส้นบนในการทดลองที่ให้สปริงสั่นโดยไม่ป้อนแรงภายนอก (ลำโพงไม่สั่น)

จากภาพ 20 จะเห็นได้ว่าสเปคตรัมของสัญญาณเอาต์พุตจากเซนเซอร์วัดระยะทางในช่วงที่พิจารณามีเพียงความถี่เดียวเท่านั้น คือ 1.70 Hz จึงมั่นใจได้ว่า เอาต์พุตที่วัดได้จากการสั่นของมวลติดสปริงมีความเป็นเชิงเส้น

และเช่นเดียวกัน เพื่อให้แน่ใจว่าลำโพงที่ป้อนแรงให้กับระบบสปริง มีการสั่นแบบไซน์จริงๆ ตามความถี่ของฟังก์ชั่นเจนเนอเรเตอร์ที่ป้อนให้กับวงจรขยายกำลังเพื่อขับลำโพง ผู้วิจัยจึงได้นำเทปกาวพันรอบสปริงขณะที่มวลอยู่ในตำแหน่งสมดุล เพื่อไม่ให้สปริงสั่นขณะลำโพงกำลังสั่น ในการทดลองสัญญาณจากฟังก์ชันเจนเนอเรเตอร์ที่ผ่านไปยังวงจรขยายกำลังไปขับลำโพง มีความถี่เท่ากับ 2.00Hz แต่เนื่องจากระยะการสั่นของลำโพงมีค่าน้อยมาก ไม่สามารถวัดได้ในช่วงการวัด 20-40 เซนติเมตรจากเซนเซอร์วัดระยะทาง ผู้วิจัยจึงได้เปลี่ยนมาใช้ช่วงการวัด 0-10 เซนติเมตรจากเซนเซอร์แทน ซึ่งมีอัตราการขยายที่มากกว่าและเป็นเชิงเส้นดังภาพ 19 โดยให้มวลห่างจากฐานของเซ็นเซอร์ 5 เซนติเมตร (ขณะลำโพงยังไม่สั่น) ซึ่งผลการทดลองได้แสดงไว้ดังภาพ 21



ภาพ 21 สัญญาณเส้นบนเป็นเอาต์พุตของเซนเซอร์ และสัญญาณเส้นล่างเป็นสเปกตรัมของสัญญาณเส้นบนในการทดลองที่ให้ลำโพงสั่นแต่ไม่ให้สปริงสั่น (สปริงโดนพันด้วยเทปกาว)

จากภาพ 21 จะเห็นได้ว่า ในช่วงสเปกตรัมที่พิจารณา สัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์มีเพียงความถี่เดียวเช่นกันคือ 2.00Hz ซึ่งเป็นการยืนยันว่า ลำโพงนั้นได้สั่นแบบไซน์จริงๆ ซึ่งเป็นแรงที่ป้อนให้กับระบบที่อธิบายด้วยสมการ $f(\tau) = F_0 \cos(\omega_f \tau)$

ในการทดลองลำดับต่อไปหลังจากเซนเซอร์ติดตั้งไว้ที่ตำแหน่งเดิม ผู้วิจัยจะป้อนแรงภายนอกโดยการทำให้ลำโพงสั่นแบบไซน์ที่ความถี่ใกล้ 1.70 Hz ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติ เช่น 1.40, 1.50, 1.90 และ 2.00 Hz ตามลำดับ สำหรับขั้นตอนการทดลองนั้นจะให้ลำโพงสั่นก่อน ด้วยความถี่ที่ต้องการ จากนั้นทำให้สปริงสั่นโดยยกมวลขึ้นเล็กน้อยแล้วปล่อย ($t = 0$) ซึ่งทำให้มวลนั้นสั่นขณะมีแรงภายนอกมากระทำ ดังนั้น สเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์ควรจะสอดคล้องกับสมการ (95) ซึ่งผลการทดลองจะได้กล่าวไว้ในบทถัดไป

การวิเคราะห์หาผลเฉลยของระบบเพนดูลัมที่ถูกแรงภายนอกกระทำโดยใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวและใช้การแปลงฟูเรียร์เข้าช่วยเพื่อหาผลตอบสนองบังคับ

จากบทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายการเคลื่อนที่ของเพนดูลัมอย่างง่ายที่กำลังสั่นและถูกแรงกระทำจากภายนอกได้กล่าวไว้ในสมการ (58) ในที่นี้จะนำสมการดังกล่าวมาแสดงให้เห็นอีกครั้งเพื่อความสะดวก นั่นคือ

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t)}{dt}+\frac{mg}{l}x(t)=f(t)$$

เมื่อใช้หลักการตัวแปรเวลาหลายตัวเข้าช่วยในการวิเคราะห์ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อธิบายการเคลื่อนที่ของลูกตุ้มเพนดูลัมเป็นดังนี้

$$m\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+\alpha\frac{dx(t,\tau)}{dt}+\frac{mg}{l}x(t,\tau)=f(\tau) \tag{96}$$

จัดเรียงสมการ (96) ใหม่ จะได้

$$\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+\frac{\alpha}{m}\frac{dx(t,\tau)}{dt}+\frac{g}{l}x(t,\tau)=\frac{1}{m}f(\tau) \tag{97}$$

กำหนดให้ $\frac{\alpha}{m}=2\lambda$ และ $\frac{g}{l}=\omega_0^2$ ทำให้สมการ (97) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2x(t,\tau)}{dt^2}+2\lambda\frac{dx(t,\tau)}{dt}+\omega_0^2x(t,\tau)=\frac{1}{m}f(\tau) \tag{98}$$

เมื่อสังเกตสมการ (98) จะพบว่าสมการดังกล่าวจะเหมือนกับสมการ (79) ดังนั้น ถ้าแรงภายนอก $f(\tau)=F_0\cos(\omega_f\tau)$ ผลเฉลยสมบูรณ์ของสมการ (98) เมื่อกำหนดให้ $\phi=0$ คือ

$$\begin{aligned}x(t,t+\Delta t)&=x_0e^{-\lambda t}\cos(\omega_n t)-\frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\left(\omega_f+\omega_n\right)t+\phi_d\right]-\frac{D}{2}e^{-\lambda t}\cos\left[\left(\omega_f-\omega_n\right)t+\phi_d\right]\\&\quad+D\cos\left[\omega_f t+\phi_d\right]\end{aligned} \tag{99}$$

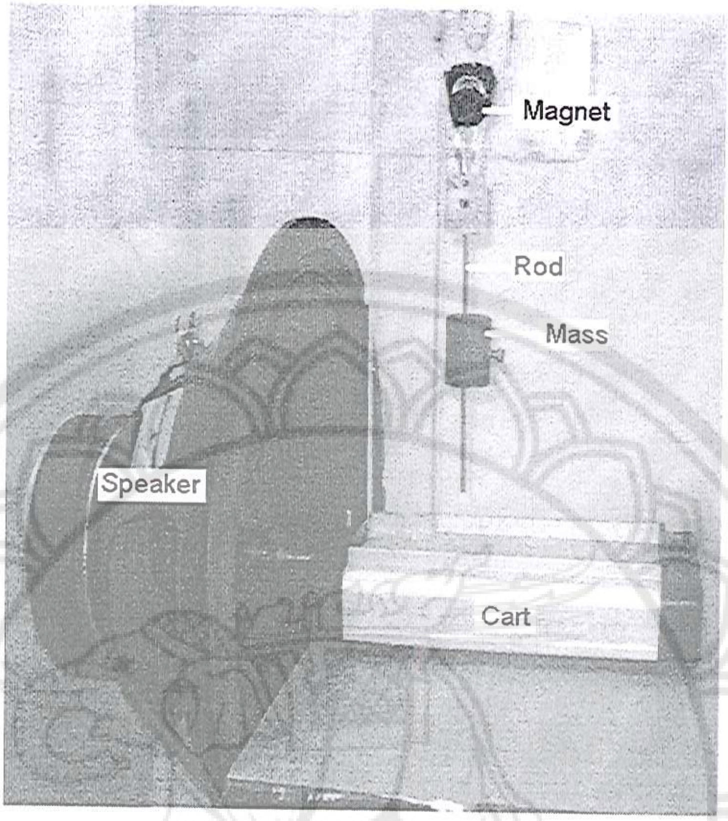
โดยที่ $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$ และ $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

พิจารณาสมการ (99) ณ เวลา $t = 0$ (เมื่อเริ่มมีแรงภายนอกกระทำต่อระบบขณะที่เพนดูลัมกำลังสั่น) ขนาดของเทอมที่สองและที่สาม (เทอมใหม่ทั้งสองเทอม) มีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดของผลตอบสนองบังคับ (เทอมที่สี่) ขณะที่เวลา t เพิ่มขึ้น ตัวประกอบเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-\lambda t}$ จะมีค่าลดลงอย่างต่อเนื่องและมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ด้วยเหตุนี้ ขนาดของเทอมที่สองและเทอมที่สามรวมไปถึงเทอมที่หนึ่งจะลดลงอย่างต่อเนื่อง นอกจากนี้ขนาดของผลตอบสนองบังคับจะมีขนาดใหญ่เมื่อความถี่การสั่นของแรงบังคับ ω_f เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่สั่นอย่างอิสระ (โดยไม่มีการหน่วง) ด้วยเหตุนี้ ที่เวลา $t = 0$ ขนาดของเทอมที่สองและเทอมที่สามจะเพิ่มขึ้นตามด้วยโดยเป็นครึ่งหนึ่งของผลตอบสนองบังคับ

ดังนั้น จะเห็นได้ว่า สมการ (99) น่าจะถูกต้องและแม่นยำกว่าสมการ (61) ในบทที่ 2

การทดลองของระบบเพนดูลัมที่ถูกกระทำโดยแรงบังคับภายนอก

การทดลองในสถานการณ์การสั่นของเพนดูลัมภายใต้แรงกระทำจากภายนอกได้จัดขึ้นดังแสดงในภาพ 22

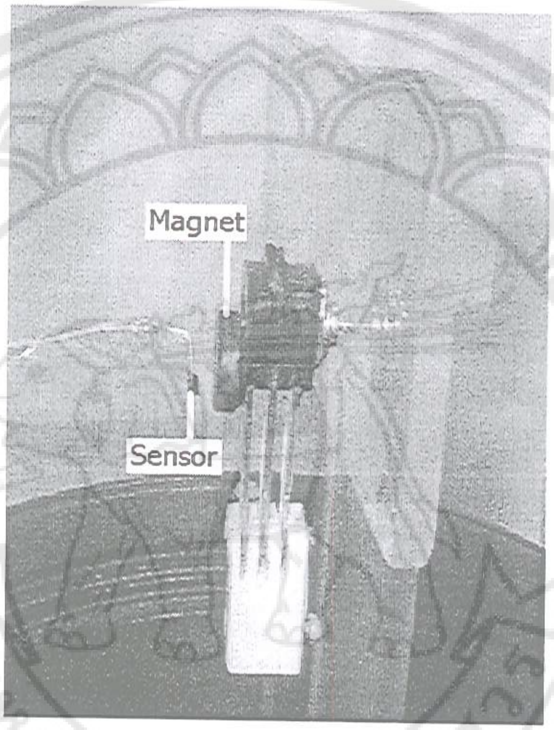


ภาพ 22 ชุดการทดลองของเพนดูลัมที่ถูกแรงบังคับ

จากภาพ 22 ระบบเพนดูลัมประกอบด้วยแท่งเหล็กเบาที่ใช้ทำแขนเพนดูลัมยาว 0.10 เมตรและตุ้มน้ำหนัก 0.10 กิโลกรัมได้ติดไว้ที่ปลายด้านหนึ่งของแท่งเหล็ก ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งจะแขวนไว้บนฐานที่ยึดติดไว้บนรถทดลองวิทยาศาสตร์ซึ่งจุดหมุนของเพนดูลัมที่ปลายด้านนี้จะเป็นลูกปืนที่มีแรงเสียดทานน้อยมาก ความถี่ธรรมชาติ ω_n ของระบบมีค่าเท่ากับ 1.50 Hz ล้อของรถจะมีลูกปืนตรงแกนหมุนซึ่งช่วยลดแรงเสียดทาน รถทดลองจะเชื่อมต่อกับลำโพงที่ติดตั้งในแนวตั้ง ซึ่งลำโพงจะเป็นตัวกำเนิดแรงภายนอกแบบไซน์ไปบังคับการสั่นของเพนดูลัม วงจรที่ใช้ขับลำโพงจะเป็นวงจรเดียวกันกับที่ใช้ในการทดลองก่อนหน้านี้ (ของระบบมวลติดสปริง) แต่แอมปลิจูดการสั่นของลำโพงจะน้อยกว่า เพื่อไม่ให้เพนดูลัมสั่นแรงมากเกินไปเมื่อความถี่ของแรงบังคับมีค่าเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของเพนดูลัม ซึ่งการสั่นที่มีขนาดมากเกินไปของเพนดูลัม จะทำให้การเคลื่อนที่ของเพนดูลัมจะกลายเป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear)

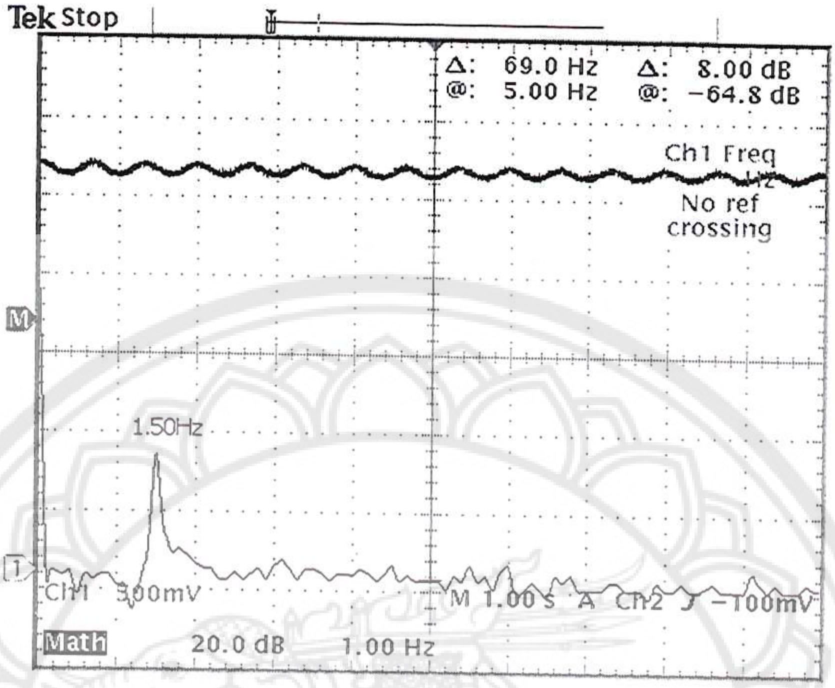
การวัดการสั่นของเพนดูลัมสามารถทำได้โดยการนำแม่เหล็กกลมแบนไปติดไว้แขนเพนดูลัมที่ตำแหน่งใกล้กับจุดหมุน จากนั้นนำเซนเซอร์ Hall effect UGN3503 ไปติดตั้งไว้ใกล้กับแม่เหล็กกลมแบนดังกล่าว ดังภาพ 23 (เซนเซอร์ไม่ได้เคลื่อนไปกับตัวรถ นั่นคือ เซนเซอร์ไม่ได้ยึด

กับส่วนใดส่วนหนึ่งของตัวรถทดลอง) ดังนั้นเมื่อเพนดูลัมสั่น จะทำให้ความเข้มสนามแม่เหล็กบริเวณตัวเซนเซอร์มีการเปลี่ยนแปลง จึงทำให้แรงดันเอาต์พุตที่ได้จากเซนเซอร์เปลี่ยนแปลงตามการสั่นของเพนดูลัมด้วย ซึ่งสัญญาณเอาต์พุตจากเซนเซอร์จะนำไปแสดงผลและวิเคราะห์สเปกตรัมต่อไปด้วยออสซิลโลสโคป



ภาพ 23 เซนเซอร์สนามแม่เหล็กที่วางใกล้กับแม่เหล็กกลมแบนที่ติดอยู่ใกล้จุดหมุนของเพนดูลัม

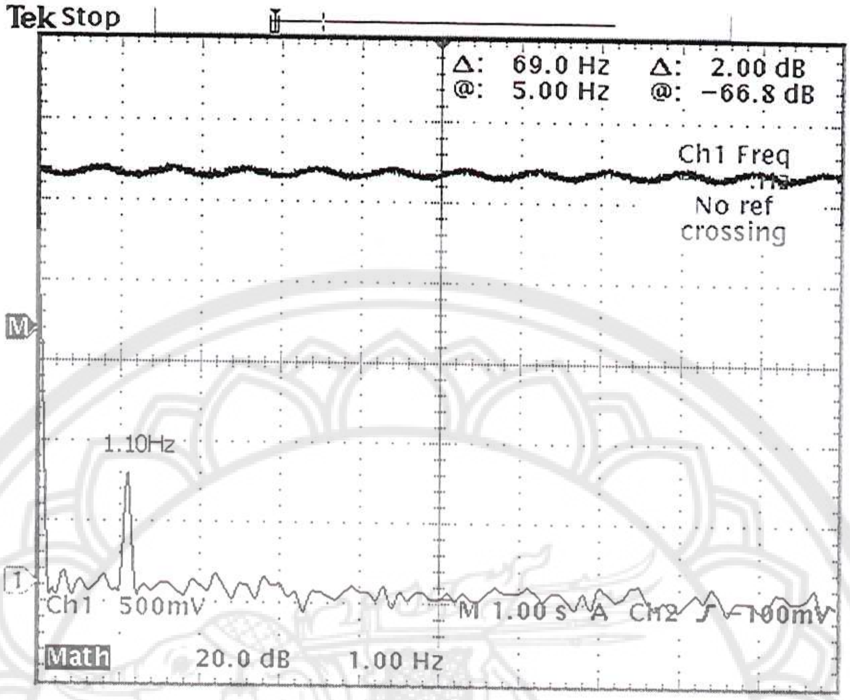
ถ้าให้เพนดูลัมสั่นโดยการดันลูกตุ้มของเพนดูลัมออกจากตำแหน่งสมดุลเล็กน้อยแล้วปล่อย โดยยังไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับระบบหรือลำโพงไม่สั่น สเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของ UGN3503 ควรมีความถี่เดียวซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติ ω_n ของเพนดูลัมนั่นเอง ในภาพ 24 จะแสดงผลการทดสอบดังกล่าว



ภาพ 24 ผลการทดลองเนื่องจากการสั่นของเพนดูลัมที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ โดยสัญญาณเส้นบนเป็นเอาต์พุตของเซนเซอร์ UGN3503 และสัญญาณเส้นล่างเป็นสเปกตรัมของสัญญาณเส้นบน

จากภาพ 24 จะเห็นได้ว่าสเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์มีเพียงความถี่เดียวคือ 1.50 Hz จึงมั่นใจได้ว่า ความสัมพันธ์ระหว่างเอาต์พุตของเซนเซอร์กับการสั่นของเพนดูลัมมีความเป็นเชิงเส้น (ที่มุมการสั่นน้อยๆ)

และถ้าให้ลำโพงสั่นอย่างเดียวโดยที่เพนดูลัมไม่สั่น (ยึดแขนเพนดูลัมให้อยู่กับที่) สเปกตรัมเอาต์พุตของเซนเซอร์ UGN3503 ควรมีความถี่เดียวซึ่งเป็นความถี่ของแรงที่ป้อนให้กับเพนดูลัม ซึ่งผลการทดสอบแสดงไว้ดังภาพ 25



ภาพ 25 ผลการทดลองในกรณีที่มีเพียงแต่การสั่นของแรงภายนอก (จากดอกลำโพง) เท่านั้น (เพนดูลัมไม่สั่น)

จากภาพ 25 จะเห็นได้ว่า สัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์ UGN3503 มีเพียงความถี่เดียวเช่นกันคือ 1.10Hz ซึ่งเป็นการยืนยันว่า ลำโพงนั้นได้สั่นแบบไซน์จริงๆ โดยเป็นแรงที่ป้อนให้กับระบบซึ่งอธิบายด้วยสมการ $f(\tau) = F_0 \cos(\omega_f \tau)$

ในการทดลองลำดับต่อไป ผู้วิจัยจะป้อนแรงภายนอกโดยการทำให้ลำโพงสั่นแบบไซน์ที่ความถี่ใกล้ 1.50 Hz ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติ เช่น 1.10, 1.20 และ 1.90 Hz ตามลำดับ สำหรับขั้นตอนการทดลองนั้นจะให้ลำโพงสั่นก่อนด้วยความถี่ที่ต้องการ จากนั้นทำให้เพนดูลัมสั่นโดยการดันตุ้มน้ำหนักออกไปจากตำแหน่งสมดุลเพียงเล็กน้อยแล้วปล่อย ($t = 0$) ซึ่งจะทำให้เพนดูลัมสั่นขณะมีแรงภายนอกมากระทำ ดังนั้น สเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตของเซนเซอร์ควรจะสอดคล้องกับสมการ (99) ซึ่งผลการทดลองจะกล่าวไว้ในบทถัดไป