การเปรียบเทียบตัวแบบทางสถิติเพื่อพยากรณ์ผลตอบสนอง จากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

ทศพร ม่วงงาม

วิทยานิพนธ์เสนอบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
หลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาสถิติ
กรกฎาคม 2562
ลิขสิทธิ์เป็นของมหาวิทยาลัยนเรศวร

วิทยานิพนธ์ เรื่อง "การเปรียบเทียบตัวแบบทางสถิติเพื่อพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์"
ของ นางสาวทศพร ม่วงงาม
ได้รับการพิจารณาให้นับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.....ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัชฌา อระวีพร)

.....ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนามัย นาอุดม)

.....กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จรัสศรี รุ่งรัตนาอุบล)

.....กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี)

อนุมัติ

.....
(ศาสตราจารย์ ดร.ไพศาล มุณีสว่าง)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

17 ส.ค. 2562

ประกาศคุณูปการ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนามัย นาอุดม ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จรัสศรี รุ่งรัตนาอุบล กรรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณา เสียสละเวลาอันมีค่ามาเป็นที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ พร้อมให้คำแนะนำสั่งสอนทั้งด้านวิชาการ การใช้ชีวิต และเมตตาให้โอกาสผู้วิจัยได้เรียนรู้แก้ไขเสมอมา ขอกราบขอบพระคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ อันประกอบไปด้วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัชฌา อระวีพร ประธานกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เกตุจันทร์ จำปาไชยศรี กรรมการผู้ทรงคุณวุฒิภายใน ที่ได้ให้คำแนะนำตลอดจนแก้ไขข้อบกพร่องของวิทยานิพนธ์ ทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้อย่างเรียบร้อย สมบูรณ์และมีคุณค่า

กราบขอบพระคุณ ดร.ทิพย์วัลย์ เกตุอินทร์ และดร.กัลยา บุญหล้า กรรมการสอบโครงร่างวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำในการทำวิทยานิพนธ์ ขอขอบพระคุณโครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย) ที่สนับสนุนทุนการศึกษาแก่ผู้วิจัย

เหนือสิ่งอื่นใด ผู้วิจัยกราบขอบพระคุณบิดา มารดา และครอบครัวที่ให้กำลังใจอย่างเต็มเปี่ยมและให้การสนับสนุนอย่างดีที่สุดเสมอมา ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ได้ให้วิชาความรู้ ความเมตตา และกำลังใจเป็นอย่างดี นอกจากนี้ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจอยู่เสมอ

คุณค่าและคุณประโยชน์อันพึงจะมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบและอุทิศแด่ผู้มีพระคุณทุกๆ ท่าน

ทศพร ม่วงงาม

ชื่อเรื่อง การเปรียบเทียบตัวแบบทางสถิติเพื่อพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

ผู้วิจัย ทศพร ม่วงงาม

ประธานที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อนามัย นาอุดม

กรรมการที่ปรึกษา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จรัสศรี รุ่งรัตนาอุบล

ประเภทสารนิพนธ์ วิทยานิพนธ์ วท.ม. สาขาวิชาสถิติ, มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2561

คำสำคัญ การจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาผลกระทบของจุดทดลองต่อความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติ และเปรียบเทียบตัวแบบทางสถิติสำหรับพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ประกอบด้วย ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียนและ Multiquadric และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม ซึ่งในการศึกษานี้ใช้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม และเปรียบเทียบความแม่นยำของตัวแบบโดยใช้ปัญหาทดสอบไม่เชิงเส้นที่แตกต่างกัน ซึ่งมีจำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 2 ถึง 10 และ 16 ตัวแปร โดยใช้เกณฑ์รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยและร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging

จากผลการศึกษาพบว่า ตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำในการพยากรณ์ไม่แตกต่างกับตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมในบางกรณี สำหรับมิติปัญหาทดสอบขนาดเล็กและขนาดกลาง (d = 2,..., 8) เมื่อมิติปัญหามีขนาดใหญ่ (d = 9, 10, 16) ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำที่สุด ทำให้ได้ว่าตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม สามารถเป็นทางเลือกที่ดีเพื่อทดแทนตัวแบบ Kriging ในการสร้างตัวแบบทางสถิติเพื่อพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

Title	A COMPARISON OF STATISTICAL MODELS FOR PREDICTING OUTPUT RESPONSES FROM COMPUTER SIMULATED EXPERIMENT
Author	Totsaporn Muangngam
Advisor	Assistant Professor Anamai Na-udom, Ph.D.
Co - Advisor	Assistant Professor Jaratsri Rungrattanaubol, Ph.D.
Academic Paper	Thesis M.S. in Statistics, Naresuan University, 2018
Keywords	Computer Simulated Experiment, Kriging Model, Radial Basis Function, Artificial Neural Network

ABSTRACT

The objectives of this study are to investigate the effect of design points on the prediction accuracy of statistical models and to compare three statistical modeling methods for predicting output response from computer simulated experiment namely Kriging model, Radial basis function with Guassian and Multiquadric basis function and Artificial neural network. The optimal Latin hypercube designs are used in this study. The prediction accuracy of each model is validated through non-linear test problems ranging from two to ten and sixteen input variables and evaluated by the root mean square of error (RMSE) and percentage improvement over Kriging model.

The results show that the prediction accuracy of Kriging model are not different from Radial basis function and Artificial neural network in many cases, especially when dimensions of input variables are small and medium (d = 2,..., 8). For large dimensions (d = 9, 10, 16), Radial basis function with Multiquadric basis function performs the best. Therefore, Radial basis function and Artificial neural network can be used as an alternative to Kriging model for modeling responses from computer simulated experiments.

สารบัญ

บทที่		หน้า
1	**บทนำ**	1
	ความเป็นมาของปัญหา	1
	จุดมุ่งหมายของการศึกษา	6
	ขอบเขตของงานวิจัย	6
2	**เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**	11
	ตัวแบบทางสถิติ	11
	แผนการทดลอง	25
	งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	29
3	**วิธีดำเนินการวิจัย**	32
	ขั้นตอนการวิจัย	32
4	**ผลการวิจัย**	62
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 2 มิติ	63
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 3 มิติ	66
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 4 มิติ	67
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 5 มิติ	68
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 6 มิติ	69
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 7 มิติ	70
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 8 มิติ	71
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 9 มิติ	72
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 10 มิติ	73
	ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 16 มิติ	74

สารบัญ (ต่อ)

บทที่		หน้า
5	**บทสรุป**	78
	สรุปผลการวิจัย	78
	อภิปรายผล	79
	ข้อเสนอแนะ	80
บรรณานุกรม		82
ภาคผนวก		87
ประวัติผู้วิจัย		139

สารบัญตาราง

ตาราง หน้า

1 แสดงมิติของปัญหาและจุดทดลองสำหรับแผนการทดลองแบบ OLHD และจำนวนจุดทดสอบที่ใช้ในการศึกษา 7
2 แสดงปัญหาทดสอบ 8
3 แสดงรูปแบบของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ 12
4 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันฐานหลัก 20
5 แสดงช่วงของตัวแปรอิสระของปัญหา Cyclone model 37
6 แสดงช่วงของตัวแปรอิสระของปัญหา Borehole function 38
7 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ในการปรับค่าน้ำหนักถ่วงของตัวแบบ ANN 42
8 แสดงค่าของตัวแปรอิสระและผลตอบสนองจริงที่อยู่ในช่วง [0,1] 52
9 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Branin function) 63
10 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Welch function) 64
11 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (2D function) 65
12 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 3 มิติ (3D function) 66
13 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 4 มิติ (Pressure vessel function) 67
14 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 5 มิติ (5D function) 68
15 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 6 มิติ (Trid 6 function) 69
16 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 7 มิติ (Cyclone model) 70
17 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 8 มิติ (Borehole function) 71
18 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 9 มิติ (9D function) 72
19 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 10 มิติ (10D function) 73
20 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 16 มิติ (16D function) 74
21 แสดงตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละมิติปัญหา 75
22 แสดงค่าพารามิเตอร์ θ ที่เหมาะสมของตัวแบบ Kriging ในแต่ละแผนการทดลอง 88

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตาราง หน้า

23 แสดงค่าพารามิเตอร์ c ที่เหมาะสมของตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน (Guassian) และ Multiquadric ในแต่ละแผนการทดลอง..... 97

24 แสดงค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ ANN ของแต่ละปัญหาทดสอบ..... 105

25 แสดงรากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวแบบทางสถิติจากแต่ละแผนการทดลอง..... 107

26 แสดงการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวน..... 116

27 แสดงการทดสอบความแตกต่างของตัวแบบทางสถิติและการเปรียบเทียบเชิงซ้อน..... 118

สารบัญภาพ

ภาพ หน้า

1 แสดงส่วนประกอบของ CSE..... 1
2 แสดงเซลล์ประสาทของมนุษย์ (Neuron) 22
3 แสดงโครงสร้างพื้นฐานของโหนด (Node) 22
4 แสดงตัวอย่างโครงสร้างของตัวแบบ ANN..... 23
5 แสดงตัวอย่างแผนการทดลองแบบ LHD ที่มีมิติ 9×2..... 27
6 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ Branin function..... 33
7 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ Welch function..... 33
8 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ 2D function..... 34
9 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ 3D function..... 35
10 แสดงโครงสร้างของตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม..... 50
11 แสดงโครงสร้างของตัวแบบ ANN จุดทดลองที่ 1..... 52
12 แสดงโครงสร้างของตัวแบบ ANN ของจุดทดลองที่ 2..... 55
13 แสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย..... 58
14 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบ Kriging..... 59
15 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี..... 60
16 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม..... 61

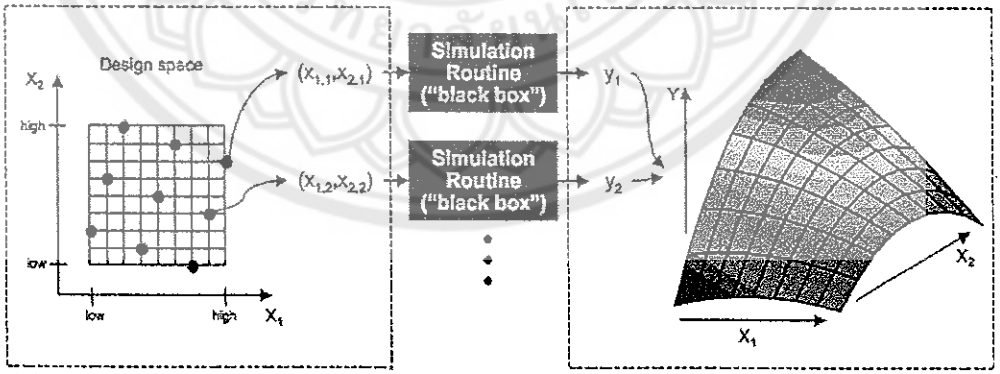
บทที่ 1

บทนำ

ความเป็นมาของปัญหา

การจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ (Computer simulated experiments: CSE) ได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในด้านอุตสาหกรรม วิศวกรรม และวิทยาศาสตร์ มีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษารูปแบบความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนระหว่างตัวแปรอิสระ (Input variables) กับผลตอบสนอง (Output response) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่การทดลองทางกายภาพ (Physical experiments) ไม่สามารถทำได้ ซึ่งอาจเนื่องมาจากข้อจำกัดด้านงบประมาณ เวลา ความปลอดภัยของหน่วยทดลอง หรือไม่สามารถทำการทดลองได้จริง เช่น การจำลองบ่อเก็บสำหรับวิศวกรรมปิโตรเคมี (Cheong, 2005) การจำลองการชนเพื่อพัฒนาการออกแบบโครงสร้างของรถยนต์ และการศึกษาผลกระทบของมลพิษในสิ่งแวดล้อมต่อสุขภาพมนุษย์ (Fang, Li, & Sudjianto, 2006) เป็นต้น

กระบวนการทำงานของ CSE มีส่วนประกอบทั้งหมด 3 ส่วน (Simpson, Lin, & Chen, 2001) แสดงดังภาพ 1



(a) Sample Region of Interest (b) Construct Approximation Model

ภาพ 1 แสดงส่วนประกอบของ CSE

ส่วนที่ 1 การวางแผนการทดลอง ซึ่งประกอบด้วยระดับค่าต่างๆ ของตัวแปรอิสระ (Treatment combination) ในส่วนนี้จะเป็นการเลือกกลุ่มของตัวแปรอิสระที่ดีที่สุดเข้าไปในกระบวนการเพื่อให้ CSE ทำงาน สาเหตุที่ต้องเลือกกลุ่มของตัวแปรอิสระที่ดีที่สุด เนื่องจากรหัสคอมพิวเตอร์ เช่น รหัสสมาชิกจำกัด (Finite element code) รหัสพลศาสตร์ของไหล (Fluid dynamic code) มีราคาแพง และใช้เวลาในการประมวลผลนาน

ส่วนที่ 2 กล่องดำ หรือชุดคำสั่งการจำลอง (Simulation Routine) เป็นกระบวนการที่ไม่สามารถมองเห็นและคาดเดาได้ว่าเกิดอะไรขึ้น สำหรับกระบวนการในกล่องดำนี้จะใช้รูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนในการประมวลผล เพื่อให้ได้ผลตอบสนองออกมา ซึ่งผลตอบสนองที่ได้จะแปรผันตามระดับค่าต่างๆ ของปัจจัยที่เกี่ยวข้องที่ป้อนเข้าไป ลักษณะเฉพาะของกระบวนการนี้ คือ ใช้เวลาในการประมวลผลนาน และผลตอบสนองมีรูปแบบเชิงกำหนด (Deterministic) นั่นคือ ถ้าใส่ชุดของค่าตัวแปรอิสระที่เหมือนกันเข้าไปจะได้ผลตอบสนองที่เหมือนกันด้วย

ส่วนที่ 3 การสร้างตัวแบบเพื่อการพยากรณ์ เกิดจากการนำแผนการทดลองกับผลตอบสนองที่ได้จากกระบวนการในกล่องดำมาสร้างรูปแบบความสัมพันธ์ที่เหมาะสม เพื่อใช้พยากรณ์ผลตอบสนองต่อไป

เนื่องจาก CSE มีลักษณะสำคัญ คือ ผลตอบสนองมีรูปแบบเชิงกำหนด รหัสคอมพิวเตอร์มีราคาแพง และใช้เวลาในการประมวลผลนาน เพื่อเป็นการแก้ปัญหาดังกล่าว จึงได้นำกระบวนการทางสถิติเข้ามามีบทบาทกับการทำงานของ CSE ในส่วนของการออกแบบการทดลอง (Experimental design) และการสร้างตัวแบบทางสถิติ (Statistical models)

แผนการทดลองที่เหมาะสมกับผลตอบสนองที่มีรูปแบบเชิงกำหนด คือ แผนการทดลองที่มีคุณสมบัติเติมเต็มปริภูมิ (Space filling) ซึ่งเป็นการเลือกค่าของกลุ่มตัวแปรอิสระให้ครอบคลุมบริเวณที่สนใจศึกษา (Region of interest) แผนการทดลองที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลาย ได้แก่ แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ (Latin hypercube design: LHD) ที่นำเสนอโดย McKay, Beckman, & Conover (1979) แผนการทดลองนี้สามารถสร้างได้โดยใช้หลักการแลกเปลี่ยนสมาชิกในแต่ละสดมภ์โดยใช้หลักการสุ่ม ซึ่งทำให้มีแผนการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด $(n!)^d$ แบบ เมื่อ n คือจำนวนจุดทดลอง และ d คือจำนวนตัวแปรอิสระ โดยตัวอย่างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวร์ที่มีมิติ 9×2 ซึ่งจะมีแผนการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด $(9!)^2 = 1.3168\times10^{11}$ จะเห็นได้ว่ามีแผนการทดลองที่เป็นไปได้จำนวนมาก จึงจำเป็นต้องทำการค้นหาแผนการทดลองที่

เหมาะสม โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้น (Search algorithm) ควบคู่กับเกณฑ์การเลือกค่าที่เหมาะสม (Optimality criteria)

กระบวนการของ CSE สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$y = f(x) \tag{1}$$

เนื่องจากกระบวนการภายในกล่องดำไม่สามารถมองเห็นหรือคาดเดาได้ ทำให้ f ซึ่งเป็นฟังก์ชันแสดงรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระ x และผลตอบสนอง y ของระบบต่างๆ เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าของ CSE ซึ่งจะสามารถประมาณค่าได้เป็น

$$\hat{y} = g(x) \tag{2}$$

เมื่อ $g(x)$ แทน ตัวแบบทางสถิติใดๆ
ดังนั้น

$$y = \hat{y} + \varepsilon \tag{3}$$

เมื่อ ε แทน ความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า

การประมาณค่าในสมการ (2) เป็นการประมาณค่าตัวแบบทางสถิติเพื่อการพยากรณ์สำหรับใช้เป็นตัวแทนของการทำการทดลองทางกายภาพ

ตัวแบบทางสถิติที่ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายกับงานด้าน CSE คือตัวแบบ Kriging ซึ่งจะใช้ร่วมกับแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ เนื่องจากเป็นตัวแบบที่มีคุณสมบัติในการประมาณค่าในช่วง (Interpolation) นั่นคือ สามารถพยากรณ์ได้อย่างแม่นยำเมื่อจุดทดสอบ (Test point) อยู่ใกล้จุดทดลอง (Design point) เมื่อจุดทดลองคือค่าของกลุ่มตัวแปรอิสระที่ได้จากกระบวนการสร้างแผนการทดลองโดยขั้นตอนวิธีการสืบค้น แล้วนำไปสร้างตัวแบบทางสถิติเพื่อการพยากรณ์ และเมื่อจุดทดสอบคือค่าของกลุ่มตัวแปรอิสระที่ถูกเลือก เพื่อใช้ตรวจสอบความเหมาะสมและแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบสถิติที่ถูกสร้างขึ้น การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าในตัวแบบ Kriging มีความซับซ้อน ในบางครั้งไม่สามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ที่เหมาะสมได้ ซึ่งทำให้ตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำในการพยากรณ์ต่ำ

จึงมีการศึกษาตัวแบบทางสถิติอื่นๆ มาใช้กับงานด้าน CSE เช่น วิธีการพื้นผิวตอบสนอง (Response surface methodology: RSM) ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี (Radial basis function: RBF) ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial neural network: ANN) เป็นต้น

ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี (Radial basis function: RBF) ถูกพัฒนาโดย Hardy (1971) ซึ่งความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ RBF ขึ้นอยู่กับการเลือกฟังก์ชันฐานหลัก (Basis function) ที่ใช้กับกลุ่มข้อมูลตัวอย่าง (Fang, & Horstormeyer, 2006) และค่าพารามิเตอร์ c ในฟังก์ชันฐานหลัก ซึ่งมีผู้วิจัยได้ทำการเปรียบเทียบความแม่นยำของการพยากรณ์ของตัวแบบ RBF กับตัวแบบอื่นๆ เช่น Lin, Chen, & Simpson (2001) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ RBF RSM Kriging และ Multivariate adaptive regression spines (MARS) โดยใช้แผนการทดลองสุ่มตัวอย่างลำดับขั้นแบบ Hammersley (Hammersley sequence sampling: HSS) LHD แผนการทดลองแบบแถวลำดับเชิงตั้งฉาก (Orthogonal array: OA) แผนการทดลองแบบสุ่ม (Ramdom design) และแผนการทดลองแบบเอกรูป (Uniform design) พบว่า ตัวแบบ Kriging และ RBF สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำสำหรับแผนการทดลองที่แตกต่างกัน Hussian, Barton, & Joshi (2002) เปรียบเทียบระหว่างรูปแบบที่หลากหลายของฟังก์ชันฐานหลักของ RBF กับฟังก์ชันพหุนาม โดยใช้แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียลเต็มรูป (Full factorial design: FFD) และ LHD พบว่า ตัวแบบ RBF มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากกว่าตัวแบบพหุนาม Muller, & Messac (2006) เปรียบเทียบความสามารถในการพยากรณ์ระหว่าง RBF ชนิดต่างๆ กับตัวแบบ Kriging โดยใช้แผนการทดลองแบบ Hammersley อย่างสุ่ม พบว่า ตัวแบบ RBF มีความสามารถในการพยากรณ์เทียบได้กับตัวแบบ Kriging นอกจากนี้ Fang, & Horstemeyer (2006) ได้ศึกษาความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ RSM และ ตัวแบบ RBF ที่มีฟังก์ชันหลายรูปแบบ โดยใช้แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียล แผนการทดลองแบบประกอบศูนย์กลาง (Central composite design: CCD) LHD และแผนการทดลองแบบแถวลำดับเชิงตั้งฉากของทากูชิ (Taguchi orthogonal arrays) พบว่า ตัวแบบ RBF มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากกว่าตัวแบบ RSM จากนั้น Yosboonruang, Na-udom, & Rungrattanaubol (2013) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ Kriging RSM และ RBF ที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียนและ Multiquadric โดยใช้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม (Optimal latin hybercube design: OLHD) แผนการทดลองแบบแฟคทอเรียลบางส่วน (Fractional factorial design: FFD) และ CCD พบว่า สำหรับ OLHD ตัวแบบ RSM มีความแม่นยำมากที่สุดในปัญหาทดสอบ 2 มิติที่มีความซับซ้อนน้อย แต่เมื่อปัญหาทดสอบซับซ้อนมากขึ้น และมีมิติของปัญหา

มากกว่า 2 มิติ ตัวแบบ Kriging และ RBF มีความแม่นยำสูงใกล้เคียงกัน สำหรับแผนการทดลองแบบ FFD และ CCD พบว่า ตัวแบบ RBF มีความแม่นยำมากที่สุด เป็นต้น

ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial neural network: ANN) ถูกสร้างขึ้นโดยได้รับแรงบันดาลใจจากระบบการเรียนรู้ที่ซับซ้อนภายในสมองมนุษย์ ซึ่งประกอบด้วยการเชื่อมต่อกันเป็นจำนวนมากของเซลล์ประสาท (neurons) (Larose, 2005) ตัวแบบ ANN ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในงานด้านเหมืองข้อมูล (Data mining) และถูกประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบการพยากรณ์การทดลองทางกายภาพ เช่น การพยากรณ์คาร์โบไฮเดรตจากผลผลิตทางการเกษตร (Astray et al., 2016) การพยากรณ์สารที่ปล่อยออกมาจากเครื่องจักรที่ใช้น้ำมันไบโอดีเซล (Tosun, Aydin, & Bilgil, 2016) เป็นต้น ซึ่งข้อดีของตัวแบบ ANN คือ เป็นวิธีการไม่อิงพารามิเตอร์ (Non-parametric approach) สำหรับงานด้าน CSE ได้มีผู้วิจัยที่ใช้ตัวแบบ ANN มาศึกษา เช่น Na-udom, & Rungrattanaubol (2013) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ระหว่างตัวแบบ Kriging และตัวแบบ ANN โดยใช้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม และใช้ปัญหาทดสอบที่มีขนาด 2 7 และ 10 มิติ พบว่า ตัวแบบ ANN มีความแม่นยำกว่าตัวแบบ Kriging ในบางมิติปัญหา โดยเฉพาะมิติปัญหาขนาดใหญ่ นอกจากนี้ Vicario, Craparotta, & Pistone (2016) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ระหว่างตัวแบบ Kriging และตัวแบบ ANN ในการพยากรณ์ผลลัพธ์ของการทดลองกลศาสตร์ของไหล 4 มิติ สำหรับกังหันที่มีความดันต่ำ พบว่า ตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำมากที่สุด ซึ่งตัวแบบ ANN มีความสามารถในการพยากรณ์แม่นยำน้อยกว่าตัวแบบ Kriging เล็กน้อย

จะเห็นได้ว่าตัวแบบทางสถิติที่เหมาะสมสำหรับแต่ละรูปแบบความสัมพันธ์ที่ซับซ้อนภายใต้แผนการทดลองที่เหมาะสมสำหรับงานด้านการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ยังไม่มีข้อสรุปที่แน่นอน ดังนั้น การศึกษาครั้งนี้จึงมีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำของตัวแบบทางสถิติสำหรับการพยากรณ์ผลตอบสนอง โดยจะทำการศึกษาตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบที่ถูกนำมาใช้ในงานด้านการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสามเทียม ภายใต้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม โดยศึกษาจากปัญหาทดสอบจำนวน 12 ปัญหา ที่มีจำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 2 ถึง 10 ตัวแปร และ 16 ตัวแปรตามลำดับ สำหรับเกณฑ์ที่ใช้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ คือ เกณฑ์รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Root mean squared error: RMSE) ร่วมกับเกณฑ์ร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging (Percentage improvement over Kriging: PI)

จุดมุ่งหมายของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาโครงสร้างของตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี (RBF) และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม (ANN) สำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ภายใต้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม

2. เพื่อศึกษาผลกระทบของจำนวนจุดทดลอง (n) ที่มีผลต่อความสามารถในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติทั้ง 3 ตัวแบบ

3. เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติสำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ทั้ง 3 ตัวแบบ

ขอบเขตของงานวิจัย

การศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยได้กำหนดขอบเขตของงานวิจัย ดังนี้

1. ศึกษาความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ดังนี้

1.1 ตัวแบบ Kriging โดยใช้ขั้นตอนวิธีการหาค่าเหมาะสมที่สุดในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในฟังก์ชันสหสัมพันธ์ ตามวิธีของ Welch et al. (1992; Na-udom, & Rungrattanaubol, 2008)

1.2 ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี โดยกำหนดฟังก์ชันฐานหลักเป็นแบบเกาส์เซียน (Guassian) และ Multiquadric โดยใช้วิธีการหาค่าเหมาะสมเพื่อหาค่าคงที่ c ในฟังก์ชันฐานหลัก (Carlson, & Foley, 1991; Rippa, 1999)

1.3 ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม โดยกำหนดฟังก์ชันกระตุ้นคือฟังก์ชัน sigmoid วิธีการเรียนรู้ของตัวแบบใช้วิธีการแพร่ย้อนกลับ (Back propagation) โดยกำหนดอัตราการเรียนรู้ (Learning rate) และอัตราโมเมนตัม (Momentum rate) เท่ากับ 0.1 0.2 และ 0.3

2. กำหนดแผนการทดลองที่ใช้กับตัวแบบทางสถิติ คือ แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม (OLHD) จำนวน 10 แผนการทดลอง สำหรับทุกมิติปัญหา โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้นแบบ Simulated annealing (SA) ควบคู่กับเกณฑ์ ϕ_p (ธัญดล จันทรวงศ์, 2553)

3. กำหนดมิติของปัญหา (n,d) สำหรับสร้างแผนการทดลองแบบ OLHD แสดงดังตาราง 1 เมื่อ d คือจำนวนตัวแปรอิสระ และ n คือจำนวนจุดทดลอง ซึ่งแบ่งออกเป็นจำนวนจุดทดลองขนาดเล็กและขนาดใหญ่ จำนวนจุดทดลองขนาดเล็กเท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ของตัวแบบพหุนามกำลังสอง สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$n = 2d + \binom{d}{2} + 1 \quad (4)$$

สำหรับจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่คำนวณจาก (Na-udom, 2007)

$$n = 2d + 4\binom{d}{2} + 1 \quad (5)$$

4. กำหนดจำนวนจุดทดสอบ (Test points) จากจุดแบบตาราง (Grid points) สำหรับปัญหา 2, 3 และ 4 มิติ จะแบ่งบริเวณที่สนใจออกเป็น 9, 6 และ 5 เส้นตาราง (Grid lines) ตามลำดับ จะได้จำนวนจุดทดสอบเป็น $9^2 = 81$ $6^3 = 216$ และ $5^4 = 625$ จุดทดสอบ ตามลำดับ สำหรับปัญหาทดสอบ 5 มิติขึ้นไป จุดทดสอบได้จากการสุ่ม จำนวน 1,000 จุดทดสอบ แสดงดังตาราง 1

ตาราง 1 แสดงมิติของปัญหาและจุดทดลองสำหรับแผนการทดลองแบบ OLHD และจำนวนจุดทดสอบที่ใช้ในการศึกษา

	d									
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16
เล็ก	6	10	15	21	28	36	45	55	66	153
ใหญ่	9	19	33	51	73	99	129	163	201	513
จุดทดสอบ	81	216	625	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

5. กำหนดปัญหาการทดสอบในการศึกษาเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ผู้วิจัยได้เลือกปัญหาทดสอบที่มีลักษณะแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งบางปัญหาทดสอบจะมีความซับซ้อนมากและมีความซับซ้อนน้อย ซึ่งในงานวิจัยนี้จะนิยามความซับซ้อนของปัญหาทดสอบตามอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นผิวบนระนาบของกราฟ 3 มิติ เมื่อค่าของตัวแปรอิสระ x แต่ละตัวเปลี่ยนแปลงไป โดยเลือกปัญหาทดสอบจาก Hock, & Schittkowski (1981; Simpson, 1998; Ye, Li, & Sudjianto, 2000; Palmer, & Tsui, 2001; Jin,

Chen, & Sudjianto, 2002; Martin, & Simpson, 2003: Muller, & Mussac, 2006; Welch et al., 1992; Na-udom, & Rungrattanaubol, 2008; Jamil, & Yang, 2013) แสดงดังตาราง 2

ตาราง 2 แสดงปัญหาทดสอบ

ปัญหาทดสอบ	d	ฟังก์ชัน
Barnin Function	2	$y=\left(x_2-\frac{5.1}{4\pi^2}x_1^2+\frac{5}{\pi}x_1-6\right)^2+10\left(1-\frac{1}{8\pi}\right)\cos(x_1)+10$ $-5\le x_1\le 10,\ 0\le x_2\le 15$
Welch Function	2	$y=\left[30+x_1\sin(x_1)\right]\left(4+e^{-x_2}\right),0\le x_1,x_2\le 5$
2D function	2	$y=\sin(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2-1.5x_1+2.5x_2+1$ $-1.5\le x_1\le 4,-3\le x_2\le 3$
3D function	3	$y=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4,-10\le x_i\le 10,i=1,2,3$
Pressure Vessel function	4	$y=0.6224x_1x_2x_3+1.7781x_4x_1^2+3.1661x_3^2x_2+19.84x_3^2x_1$ $25\le x_1\le 150,25\le x_2\le 240,1\le x_3\le 1.375,0.625\le x_4\le 1$
5D function	5	$y=(x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^3+(x_3-x_4)^4+(x_4-x_5)^4$ $-5\le x_i\le 5,i=1,2,...,5$
Trid 6 function	6	$y=\sum_{i=1}^{6}(x_i-1)^2-\sum_{i=2}^{6}x_ix_{i-1},-36\le x_j\le 36,j=1,2,...,6$
Cyclone model	7	$y=174.42\left(\frac{x_1}{x_5}\right)\left(\frac{x_3}{x_2-x_1}\right)^{0.85}\sqrt{\frac{1-2.62\left\{1-0.36\left(x_4/x_2\right)^{-0.56}\right\}^{3/2}\left(x_4/x_2\right)^{1.16}}{x_6x_7}}$ $0.09\le x_1,x_3,x_4\le 0.11,0.27\le x_2\le 0.33,1.35\le x_5\le 1.65,$ $14.4\le x_6\le 17.6,0.675\le x_7\le 0.825$

ตาราง 2 (ต่อ)

ปัญหาทดสอบ	d	ฟังก์ชัน
Borehole Function	8	$y=\frac{2\pi x_3\left(x_4-x_6\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left[1+\frac{2x_7x_3}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)x_1^2x_8}+\frac{x_3}{x_5}\right]}$ $0.05\le x_1\le 0.15, 100\le x_2\le 50000, 63070\le x_3\le 115600, 990\le x_4\le 1110,$ $63.1\le x_5\le 116,700\le x_6\le 820, 1120\le x_7\le 1680, 9855\le x_8\le 12045$
9D function	9	$y=0.28285+\sum_{i=1}^{9}\left[\frac{3}{10}+\sin\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)+\sin^2\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)\right]$ $-1\le x_i\le 1, i=1,2,...,9$
10D function	10	$y=\sum_{i=1}^{10}\left[\frac{3}{10}+\sin\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)+\sin^2\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)\right]$ $,-1\le x_i\le 1, i=1,2,...,10$
16D function	16	$y=\sum_{i=1}^{16}\sum_{j=1}^{16}a_{ij}\left(x_i^2+x_i+1\right)\left(x_j^2+x_j+1\right), 0\le x_i, x_j\le 5, i,j=1,2,...,16$

6. เกณฑ์ที่ใช้ในการวัดความแม่นยำของตัวแบบทางสถิติ ได้แก่

6.1 เกณฑ์รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$RMSE=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2}{k}} \tag{6}$$

เมื่อ k คือ จำนวนจุดทดสอบ

y_i คือ ตัวแปรตามที่เป็นจริงสำหรับจุดทดสอบที่ $i, i=1,2,...,k$

$\hat{y}_i$ คือ ผลตอบสนองจากการพยากรณ์สำหรับจุดทดสอบที่ $i, i=1,2,...,k$

6.2 เกณฑ์ร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$PI = \frac{RMSE(Kriging) - RMSE(RBFG, RBFM, ANN)}{RMSE(Kriging)} \times 100\% \quad (7)$$

7. การสร้างแผนการทดลองแบบ OLHD จุดทดสอบ ตัวแบบ Kriging และตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี โดยใช้โปรแกรม R 3.4.2 สำหรับการสร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมใช้โปรแกรม Weka 3.8

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยต้องการศึกษาเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติสำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ ในที่นี้จะกล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. ตัวแบบทางสถิติ
2. แผนการทดลอง
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตัวแบบทางสถิติ

การสร้างตัวแบบทางสถิติเป็นกระบวนการทางสถิติอย่างหนึ่งที่ถูกนำมาใช้กับงานด้าน CSE เนื่องจากลักษณะสำคัญและข้อจำกัดของกระบวนการทำงานของ CSE ที่ใช้เวลาในการประมวลผลนาน เพราะระบบที่นำมาศึกษามีความซับซ้อนมากและรหัสคอมพิวเตอร์ที่ใช้มีราคาแพง ทำให้การทำงานของ CSE สามารถทำได้ภายใต้จำนวนจุดทดลองที่จำกัด ดังนั้น จึงได้มีการพัฒนาตัวแบบทางสถิติสำหรับนำมาใช้หาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและตัวแปรตามภายใต้จุดทดลองที่จำกัด เพื่อนำตัวแบบที่ได้ไปใช้ในการพยากรณ์ต่อไป สำหรับตัวแบบทางสถิติที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ มีจำนวน 3 ตัวแบบ ดังนี้

1. ตัวแบบ Kriging

ตัวแบบ Kriging เกิดจากการประยุกต์ใช้งานในสาขาภูมิศาสตร์สถิติ (Geostatistics) ซึ่งเป็นการผสมผสานกันระหว่างสาขาวิชาทางด้านวิศวกรรมเหมืองแร่ ธรณีวิทยา คณิตศาสตร์และสถิติ (Cressie, 1993) สำหรับชื่อ Kriging ถูกตั้งหลังจากที่ D.G.Krige วิศวกรเหมืองแร่ชาวแอฟริกาใต้ ได้ทำการพัฒนาวิธีการทดลองเพื่อที่จะหาข้อสรุปของการแบ่งแยกสินแร่ (Matheron, 1963) ตัวแบบ Kriging มีประโยชน์ในการพยากรณ์ความสัมพันธ์ของข้อมูล ระหว่างข้อมูลปัจจุบันกับข้อมูลที่ยังไม่เกิดขึ้น ตัวแบบ Kriging มีคุณสมบัติในการประมาณค่าในช่วง นั่นคือ สามารถพยากรณ์ได้อย่างแม่นยำเมื่อจุดทดสอบอยู่ใกล้จุดทดลอง

ตัวแบบ Kriging สำหรับ CSE ถูกนำเสนอโดย Sacks, et al. (1989) ซึ่งวิธีนี้อาศัยแนวคิดที่ว่า ผลตอบสนอง (y) สามารถกำหนดให้เป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระ ร่วมกับ

กระบวนการอื่นๆ ซึ่งสามารถพิจารณาโดยใช้กระบวนการสโทแคสติก $(Z(x))$ โดยทั่วไปแล้วผลตอบสนอง(y) สามารถเขียนในรูปแบบของสมการดังนี้

$$y=\sum_{j=1}^{d}\beta_j f_j(x)+Z(x) \tag{8}$$

เมื่อ β_j แทน พารามิเตอร์สำหรับฟังก์ชันหหุนามของตัวแปรอิสระ เมื่อ $j=1,2,...,d$

$f_j(x)$ แทน ฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระ เมื่อ $j=1,2,...,d$

$Z(x)$ แทน กระบวนการสโทแคสติก

ซึ่ง $Z(x)$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนร่วมระหว่าง $Z(x_i)$ กับ $Z(x_j)$ มีค่าเป็น

$$Cov\left[Z(x_i),Z(x_j)\right]=\sigma^2 R(x_i,x_j) \tag{9}$$

เมื่อ σ^2 คือ ความแปรปรวนของกระบวนการ

$R(x_i,x_j)$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ ซึ่งมีหลายรูปแบบ (Martin, & Simpson, 2003) ดังตัวอย่างที่แสดงในตาราง 3

ตาราง 3 แสดงรูปแบบของฟังก์ชันสหสัมพันธ์

ชื่อ	$R(x_i,x_j)$	พารามิเตอร์
Gaussian	$\exp\left(-\theta\lvert x_i-x_j\rvert^2\right)\exp\left(-\theta\lvert x_i-x_j\rvert^2\right)$	$\theta>0$
Exponential	$\exp\left(-\theta\lvert x_i-x_j\rvert^p\right)$	$\theta>0,1\le p<2$
Cubic spline	$1-6\left(\frac{x_i-x_j}{\theta}\right)^2+6\left(\frac{x_i-x_j}{\theta}\right)^3,\lvert x_i-x_j\rvert<\frac{\theta}{2}$ $2\left(1-\frac{\lvert x_i-x_j\rvert}{\theta}\right)^3,\frac{\theta}{2}\le\lvert x_i-x_j\rvert<\theta$ $0,\lvert x_i-x_j\rvert\ge\theta$	$\theta>0$
Matern	$\frac{\left(\theta\lvert x_i-x_j\rvert\right)^{\nu}}{\Gamma[\nu]2^{\nu-1}}K_{\nu}\left[\theta\lvert x_i-x_j\rvert\right]$	$\theta>0,\nu>0$

Sacks et al. (1989; Martin, & Simpson, 2003) กล่าวว่า สำหรับสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า (β) สามารถพิจารณาการพยากรณ์ที่ไม่เอนเอียงเชิงเส้นที่ดีที่สุด (Best linear Unbiased predictor: BLUP) สำหรับ $y(x)$ ที่จุดทดสอบได้เป็น

$$\hat{y}(x) = c^T(x) y_0 \tag{10}$$

ซึ่ง $y_0 = \left[y(x_1) \quad y(x_2) \quad \ldots \quad y(x_n) \right]^T$ คือ เวกเตอร์ของค่าสังเกต

$c(x)$ คือ เวกเตอร์ $n \times 1$ ของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x

กำหนดให้ $\hat{y}(x)$ และ y_0 เป็นตัวแปรสุ่มและหาความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean square error: MSE) ของตัวพยากรณ์ภายใต้กระบวนการอย่างสุ่ม ซึ่ง BLUP หาได้โดยใช้เวกเตอร์ $c(x)$ เพื่อหาค่าต่ำสุดดังนี้

$$MSE\left[\hat{y}(x)\right] = E\left[c^T(x) y_0 - y(x) \right]^2 \tag{11}$$

ภายใต้เงื่อนไขความไม่เอนเอียงที่ดีที่สุด จะได้ว่า

$$E\left[c^T(x) y_0 \right] = E\left[y(x) \right] \tag{12}$$

รูปแบบโดยทั่วไปของตัวแบบ Kriging ในส่วนของฟังก์ชันพหุนามจากสมการ (8) สามารถอธิบายได้ด้วยกลุ่มของฟังก์ชันถดถอย ดังนี้

$$f(x) = \left[f_1(x) \quad f_2(x) \quad \ldots \quad f_d(x) \right]^T \tag{13}$$

กำหนดให้ F เป็นเมทริกซ์ $n \times d$ ซึ่งสร้างจากการหาค่า $f(x)$ สำหรับแต่ละค่าสังเกตทั้ง n ค่า จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_d(x_1) \\ f_1(x_2) & \cdots & f_d(x_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & & f_d(x_n) \end{bmatrix} \tag{14}$$

กำหนดให้ R เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน $Z(x_1),Z(x_2),...,Z(x_n)$ ที่จุดทดลองทั้ง n จุด บนแผนการทดลอง $(X_1,...,X_n)$ เขียนได้เป็น

$$R=\begin{bmatrix} R(x_1,x_1) & R(x_1,x_2) & \text{L} & R(x_1,x_n) \\ R(x_2,x_1) & R(x_2,x_2) & \text{L} & R(x_2,x_n) \\ \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ R(x_n,x_1) & R(x_n,x_2) & \text{L} & R(x_n,x_n) \end{bmatrix} \tag{15}$$

สำหรับเมทริกซ์ R เป็นเมทริกซ์สมมาตร เนื่องจาก $R(x_1,x_2)=R(x_2,x_1)$ และ $R(x_i,x_j)=1, i=j$ ดังนั้น สมาชิกแนวทแยงมุมเป็น 1 ทั้งหมด

กำหนดให้ $r(x)$ เป็นเวกเตอร์ $n\times 1$ ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันสหสัมพันธ์ระหว่างความคลาดเคลื่อน $(Z(x))$ ที่จุดทดลองกับจุดพยากรณ์ เขียนได้เป็น

$$r(x)=\begin{bmatrix} R(x,x_1) & R(x,x_2) & \dots & R(x,x_n) \end{bmatrix}^T \tag{16}$$

สำหรับผลตอบสนอง $y_0=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix}^T$ สามารถเขียนตัวแบบในสมการ (8) ได้เป็น

$$y_0=F\beta+z \tag{17}$$

เมื่อ F กำหนดไว้ดังสมการ (14) $\beta=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_d \end{bmatrix}^T$ และกระบวนการสโทแคสติก $z=\begin{bmatrix} Z(x_1) & Z(x_2) & \dots & Z(x_n) \end{bmatrix}^T$

โดยนิยามจากสมการ (10) และ (11) ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} MSE\left[\hat{y}(x)\right] &= E\left[c^T(x)y_0-y(x)\right]^2 \\ &= E\left[c^T(x)y_0y_0^Tc(x)+y^2(x)-2c^T(x)y_0y(x)\right] \\ &= E\Big[c^T(x)(F\beta+z)(F\beta+z)^Tc(x) \\ &\quad +\left(f^T(x)\beta+Z(x)\right)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2c^T(x)(F\beta+z)\left(f^T(x)\beta+Z(x)\right)\Big] \\
&=\left(c^T(x)F\beta-f^T(x)\beta\right)^2+c^T(x)\sigma^2Rc(x) \\
&\quad+\sigma^2-2c^T(x)\sigma^2r(x) \\
&=c^T(x)\sigma^2Rc(x)+\sigma^2-2c^T(x)\sigma^2r(x) \\
&=\sigma^2\left[1+c^T(x)Rc(x)-2c^T(x)r(x)\right] \quad (18)
\end{aligned}
$$

ภายใต้เงื่อนไขของความไม่เอนเอียงที่ดีที่สุดของสมการ (12) เขียนได้เป็น

$$F^Tc(x)=f(x) \tag{19}$$

ตัวคูณลากรานจ์ (Lagrange multipliers: $\lambda(x)$) ถูกนำมาใช้เมื่อค่าต่ำสุดของ MSE ในสมการ (18) สอดคล้องกับ $c(x)$ ภายใต้เงื่อนไขบังคับของสมการ (12) จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ $c(x)$ ของ BLUP เขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix}0 & F^T\\ F & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda(x)\\ c(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(x)\\ r(x)\end{bmatrix} \tag{20}$$

จากการหาค่า $c(x)$ และ $\lambda(x)$ จากสมการ (20) จะได้ว่า BLUP ของ $\hat{y}(x)$ เขียนได้เป็น

$$
\begin{aligned}
\hat{y}(x)&=c^T(x)y_0 \\
&=\begin{bmatrix}f^T(x) & r^T(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & F^T\\ F & R\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ y_0\end{bmatrix} \\
&=f^T(x)\hat{\beta}+r^T(x)R^{-1}\left(y_0-F\hat{\beta}\right) \quad (21)
\end{aligned}
$$

ซึ่ง $\hat{\beta}=\left(F^TR^{-1}F\right)^{-1}F^TR^{-1}y_0$ เป็นการประมาณค่ากำลังสองต่ำสุดของ β และจากสมการ (18) MSE ของการประมาณค่า $\hat{y}(x)$ แสดงได้ดังนี้

$$MSE\left[\hat{y}(x)\right]=\sigma^2\left(1-\left[f^T(x)\quad r^T(x)\right]\begin{bmatrix}0 & F^T\\ F & R\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f(x)\\ r(x)\end{bmatrix}\right) \tag{22}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบ Kriging โดยวิธีประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood estimator: MLE)

จากสมการ (21) เพื่อให้สามารถพยากรณ์ได้อย่างสมบูรณ์ต้องอาศัยฟังก์ชันสหสัมพันธ์ (R) ดังตาราง 3 เข้ามาใช้ ซึ่ง R เป็นฟังก์ชันที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ จึงต้องประมาณค่าพารามิเตอร์จากจุดทดลอง

เนื่องจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์มีความหลากหลายในการเลือกใช้ (Sacks et al., 1989; Welch, et al., 1992) เสนอรูปแบบของเกาส์เซียน เนื่องจากสามารถแสดงพื้นผิวตอบสนองได้ราบเรียบที่สุด เขียนได้เป็น

$$R\left(X_i^{(l)},X_j^{(l)}\right)=\prod_{l=1}^{d}\exp\left(-\theta_l\left|X_i^{(l)}-X_j^{(l)}\right|^2\right),\theta_l>0 \tag{23}$$

ดังนั้น ในการศึกษาครั้งนี้จึงเลือกใช้รูปแบบฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียนดังแสดงในสมการ (23)

จากข้อกำหนดของการแจกแจงแบบปกติของตัวแบบ Kriging แบบเกาส์เซียน จะได้ฟังก์ชันความหนาแน่น y_0 (Martin and Simpson, 2003) คือ

$$f\left(\beta,\sigma^2,R|y_0\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}|R|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_0-F\beta\right)^T R^{-1}\left(y_0-F\beta\right)\right\} \tag{24}$$

การสร้างตัวแบบ Kriging สามารถทำได้โดยการประมาณค่าพารามิเตอร์ในส่วนแรกของสมการ (8) จะอาศัยหลักการของวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ซึ่งให้หลักการหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณยกกำลังสองให้มีค่าต่ำสุด ส่วนการประมาณค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ในส่วนของสมการ (8) จะใช้วิธีการประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Welch et al., 1992) สำหรับตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหาได้จากค่าล็อกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ดังนี้

$$l\left(\beta,\sigma^2,R\middle|y_0\right)=-\frac{1}{2}\left[n\ln\sigma^2+\ln|R|+\left(y_0-F\beta\right)^T R^{-1}\left(y_0-F\beta\right)/\sigma^2\right] \quad (25)$$

กำหนดให้พารามิเตอร์สหสัมพันธ์ θ ดังสมการ (23) และการประมาณค่ากำลังสองต่ำสุดของ β คือ

$$\hat{\beta}=\left(F^T R^{-1}F\right)^{-1}F^T R^{-1}y_0 \quad (26)$$

และ MLE ของ σ^2 คือ

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\left(y_0-F\hat{\beta}\right)^T R^{-1}\left(y_0-F\hat{\beta}\right) \quad (27)$$

แทนค่า $\hat{\beta}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นในสมการ (25) เพื่อหาค่าประมาณของ θ ซึ่งเป็นปัญหาการหาค่าสูงสุดเชิงตัวเลข (Welch, et al., 1992) ได้เป็น

$$-\frac{1}{2}\left(n\ln\sigma^2+\ln|R|\right) \quad (28)$$

จากสมการ (28) จะเห็นว่าการหาค่าประมาณของพารามิเตอร์ θ จะขึ้นอยู่กับข้อมูลที่ได้จากการทดลอง หลังจากหาค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าได้แล้ว ขั้นตอนต่อไป คือ การสร้างตัวแบบเพื่อการพยากรณ์ของ $y(x)$ ซึ่งก็คือ $\hat{y}(x)$ สำหรับใช้เป็นตัวแทนของรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระและผลตอบสนอง ซึ่งค่าพยากรณ์ BLUP สำหรับจุดพยากรณ์ x คือ

$$\hat{y}(x)=\hat{\beta}+r^T(x)R^{-1}\left(y_0-F\hat{\beta}\right) \quad (29)$$

ซึ่ง $r(x)$ กำหนดไว้ดังสมการ (16)

สำหรับการศึกษาครั้งนี้ ฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรอิสระในสมการ (8) จะถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่เพื่อให้การประมาณค่าพารามิเตอร์ง่ายขึ้น ซึ่งนักวิจัยส่วนใหญ่ได้ทำการศึกษาและพบว่า การกำหนดให้เป็นค่าคงที่จะไม่ทำให้ความสามารถในการพยากรณ์ด้อยลง (Sacks et al., 1989; Welch et al., 1992; Simpson, 1998) ดังนั้นจึงสามารถเขียนตัวแบบในสมการ (8) ใหม่ ได้ดังนี้

$$y = \beta + Z(X) \tag{30}$$

และจะได้ว่า

$$f(x) = [1] \tag{31}$$

สำหรับค่าสังเกตทั้ง n ค่า จะได้ว่า

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T \tag{32}$$

จากข้อกำหนดดังกล่าว ฟังก์ชันความหนาแน่นของ y_0 คือ

$$f\left(\beta, \sigma^2, R \middle| y_0\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} |R|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y_0 - 1\beta\right)^T R^{-1}\left(y_0 - 1\beta\right)\right\} \tag{33}$$

ตัวประมาณค่าภาวะน่าจะเป็นสูงสุดหาได้จากค่าล็อกของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น ดังนี้

$$l\left(\beta, \sigma^2, R \middle| y_0\right) = -\frac{1}{2}\left[n \ln \sigma^2 + \ln|R| + \left(y_0 - 1\beta\right)^T R^{-1}\left(y_0 - 1\beta\right)/\sigma^2\right] \tag{34}$$

การประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดของ β คือ

$$\hat{\beta} = \left(1^T R^{-1} 1\right)^{-1} 1^T R^{-1} y_0 \tag{35}$$

และ MLE ของ σ^2 คือ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)^T R^{-1}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right) \tag{36}$$

แทนค่า $\hat{\beta}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นในสมการ (34) เพื่อหาค่าประมาณของ θ ซึ่งเป็นปัญหาค่าสูงสุดเชิงตัวเลข ได้เป็น

$$-\frac{1}{2}\left(n\ln\sigma^2+\ln|R|\right) \tag{37}$$

BLUP สำหรับจุดพยากรณ์ x ใดๆ คือ

$$\hat{y}(x)=\hat{\beta}+r^T(x)R^{-1}\left(y_0-1\hat{\beta}\right) \tag{38}$$

ถึงแม้ว่าตัวแบบ Kriging จะได้รับความนิยมอย่างกว้างขวาง แต่การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าต่างๆ ในตัวแบบ Kriging มีความซับซ้อนมาก และบางครั้งไม่สามารถหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมได้ ซึ่งจะทำให้ความแม่นยำในการพยากรณ์ต่ำ นอกจากตัวแบบ Kriging แล้วยังมีตัวแบบทางสถิติแบบอื่นที่สามารถนำมาใช้ในการพยากรณ์ได้ ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ได้เลือกตัวแบบ RBF และตัวแบบ ANN มาศึกษา เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ตัวแบบ Kriging

2. ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี

ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี (Radial basis function: RBF) พัฒนาโดย Hardy (1971) สำหรับสร้างเส้นขอบของลักษณะภูมิประเทศที่ผิดปกติจากข้อมูลทางภูมิศาสตร์ ซึ่ง RBF เป็นอีกวิธีการหนึ่งสำหรับการสร้างตัวแบบทางสถิติ โดยใช้วิธีการที่เหมือนกันกับการสร้างตัวแบบทางสถิติแบบอื่น แต่จะแตกต่างตรงที่ RBF จะได้ฟังก์ชันฐานหลัก ซึ่งเป็นได้ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น สำหรับความแม่นยำการพยากรณ์ของตัวแบบ RBF ขึ้นอยู่กับการเลือกฟังก์ชันฐานหลักที่จะใช้กับข้อมูล

ตัวแบบ RBF ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในการสร้างพื้นผิวตอบสนองและแบบจำลองสำหรับข้อมูลที่มีขนาดใหญ่ นั่นคือ RBF เป็นเทคนิคสำหรับการประมาณค่าในช่วงที่แม่นยำของข้อมูลในหลายมิติ (Fang, Li, & Sudjianto, 2006) และนิยมประยุกต์ใช้กับจุดทดลองที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งตัวแบบ RBF สร้างจากรูปแบบ (Fang, & Horstemeyer, 2006)

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\phi\left(\|x-x_i\|\right) \tag{39}$$

เมื่อ n คือ จำนวนจุดทดลอง

x คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอิสระในแผนการทดลอง

x_i คือ เวกเตอร์ของตัวแปรอิสระในแผนการทดลองที่จุดทดลองที่ i เมื่อ $i=1,2,...,n$

$\|x-x_i\|$ คือ นอร์มแบบยุคลิด

ϕ คือ ฟังก์ชันฐานหลัก

β_i คือ สัมประสิทธิ์สำหรับฟังก์ชันฐานหลักที่ i เมื่อ $i=1,2,...,n$

การประมาณค่าฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นการรวมกันเชิงเส้นของฟังก์ชันฐานของ RBF กับสัมประสิทธิ์ถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นฟังก์ชันฐานหลักที่ใช้กันโดยทั่วไป แสดงดังตาราง 4 (Fang, & Horstemeyer, 2006)

ตาราง 4 แสดงตัวอย่างฟังก์ชันฐานหลัก

ชื่อ	ฟังก์ชันฐานหลัก
Gaussian	$\phi(\|x-x_i\|)=e^{-c\|x-x_i\|^2}, 0<c\le 1$
Multiquadric	$\phi(\|x-x_i\|)=\sqrt{\|x-x_i\|^2+c^2}, 0<c\le 1$
Inverse multiquadric	$\phi(\|x-x_i\|)=\frac{1}{\sqrt{\|x-x_i\|^2+c^2}}, 0<c\le 1$
Thin-plate spline	$\phi(\|x-x_i\|)=\|x-x_i\|^2 \ln(\|x-x_i\|)$
Linear	$\phi(\|x-x_i\|)=\|x-x_i\|$
Cubic	$\phi(\|x-x_i\|)=\|x-x_i\|^3$

สำหรับการศึกษาในครั้งนี้เลือกใช้ฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน (Guassian) และ Multiquadric จากงานวิจัยของ นพดล ยศบุญเรือง (2554) พบว่า จากแผนการทดลองแบบ OLHD ตัวแบบ RBF ที่ใช้ฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน และ Multiquadric มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงในปัญหาทดสอบหลายมิติ นอกจากนี้ยังสามารถปรับแก้พารามิเตอร์ c เพื่อให้การประมาณค่าเกิดความแม่นยำมากขึ้น (Buhmann, 2004)

จากสมการ (39) สามารถแทนค่า x และ $y(x)$ ในรูปแบบของเวกเตอร์ของจุดทดลองในแผนการทดลองได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y(x_1) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi\left(\|x_1 - x_i\|\right) \\ y(x_2) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi\left(\|x_2 - x_i\|\right) \\ &\text{M} \\ y(x_n) &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi\left(\|x_n - x_i\|\right) \end{aligned} \tag{40}$$

จากสมการ (40) สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ ได้เป็น

$$y = A\beta \tag{41}$$

ซึ่ง $y = \begin{bmatrix} y(x_1) & y(x_2) & \cdots & y(x_n) \end{bmatrix}^T$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \text{M} & \text{M} & \text{O} & \text{M} \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } A_{ij} = \phi\left(\|x - x_i\|\right), i.j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}^T$$

สำหรับพารามิเตอร์ β สามารถคำนวณโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังสมการ

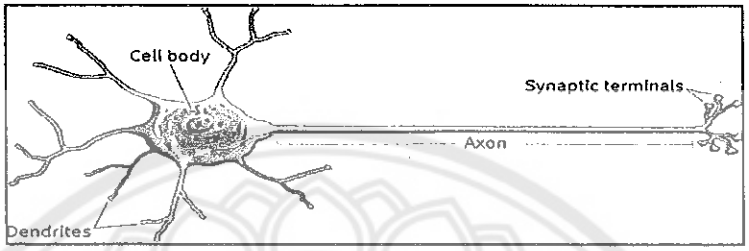
$$\hat{\beta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y \tag{42}$$

$\hat{\beta}$ ที่หาได้จากสมการ (42) สามารถใช้ในการประมาณค่าผลตอบสนองของจุดทดสอบ

3. ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

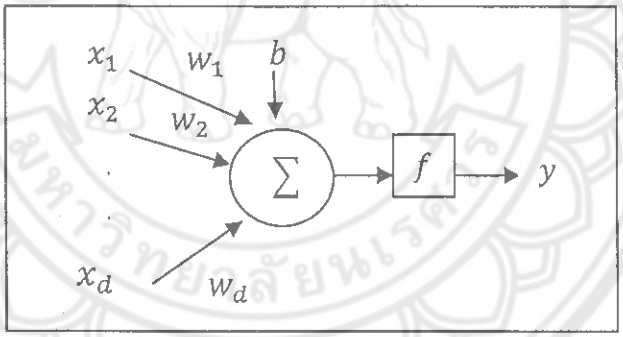
โครงข่ายประสาทเทียม (Artificial neural network: ANN) ถูกสร้างขึ้นโดยได้รับแรงบันดาลใจจากระบบการทำงานและการเรียนรู้จดจำที่ซับซ้อนภายในสมองมนุษย์ ซึ่งมีการเชื่อมต่อระหว่างกันเป็นจำนวนมากของเซลล์ประสาท (Neurons) ส่วนประกอบของเซลล์ประสาทที่สำคัญ

ได้แก่ เดนไดรต์ (Dendrites) ทำหน้าที่รับข้อมูลจากเซลล์ประสาทอื่นๆที่เชื่อมต่อกัน เข้าสู่ตัวเซลล์ (Cell body) เพื่อทำการรวมสัญญาณ (Summation) แล้วส่งข้อมูลไปยังเซลล์ประสาทอื่นผ่านทางแอกซอน (Axon) ดังภาพ 2



ภาพ 2 แสดงเซลล์ประสาทของมนุษย์ (Neuron)

ที่มา: www.memorangapp.com



ภาพ 3 แสดงโครงสร้างพื้นฐานของโหนด (Node)

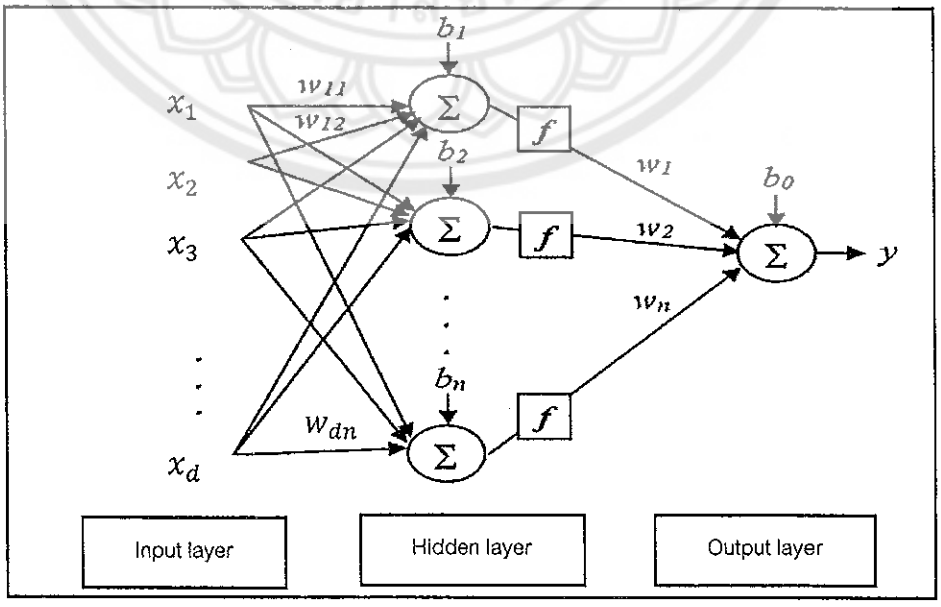
ภาพ 3 แสดงโครงสร้างพื้นฐานของโหนด (Node) ของตัวแบบ ANN ที่เลียนแบบเซลล์ประสาทของมนุษย์ ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ (Input variables; x_i, $i=1,2,...,d$) ค่าน้ำหนักถ่วง (Weight; $w_i, i=1,2,...,d$) ฟังก์ชันผลรวม (Summation function; $\sum$) ฟังก์ชันกระตุ้น (Activation function; f) ที่เป็นฟังก์ชันไม่เชิงเส้น โดยจุดรวม (Summation point) หรือโหนด ทำหน้าที่รวมผลคูณของตัวแปรอิสระและน้ำหนักถ่วงแต่ละตัว แล้วนำมาบวกกับความเอนเอียง (Bias; b) ของแต่ละโหนด เมื่อได้ผลรวมดังกล่าวจากโหนด แล้วจะถูกนำเข้าสู่ฟังก์ชันกระตุ้น เพื่อให้ได้ผลตอบสนอง (Output response; y) ซึ่งกระบวนการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$y = f\left(\sum_{i=1}^{d} x_i w_i + b\right) \tag{43}$$

โดยทั่วไปฟังก์ชันกระตุ้นที่ใช้ขึ้นอยู่กับลักษณะของผลตอบสนอง ซึ่งงานวิจัยนี้มีผลตอบสนองเป็นแบบต่อเนื่อง จึงใช้ฟังก์ชัน Sigmoid ดังสมการ

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{44}$$

ตัวแบบ ANN มีโครงสร้างที่หลากหลาย ขึ้นอยู่กับการกำหนดจำนวนชั้น (Layer) จำนวน Node และตำแหน่งของฟังก์ชันกระตุ้น โครงสร้างของตัวแบบ ANN จะมีจำนวนชั้นตั้งแต่ 2 ชั้นขึ้นไป ซึ่งส่วนมากจะมี 3 ชั้น ได้แก่ ชั้นตัวแปรอิสระ (Input layer) ชั้นซ่อน (Hidden layer) ที่มีจำนวนชั้นตั้งแต่ 1 ชั้นขึ้นไป และชั้นผลตอบสนอง (Output layer) (Larous, 2005) ในการกำหนดจำนวนของชั้นซ้อน รวมทั้งจำนวนของโหนดในแต่ละชั้นซ่อนนั้น ขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของปัญหา ความซับซ้อนของรูปแบบความสัมพันธ์ของข้อมูล และจำนวนตัวแปรอิสระ โครงสร้างของตัวแบบ ANN ที่นิยมใช้มีลักษณะเป็นการเชื่อมโยงแบบสมบูรณ์ (Completely connected) หมายถึง แต่ละโหนดจากชั้นก่อนหน้า จะเชื่อมต่อไปยังทุกโหนดของชั้นถัดไปโดยมีค่าน้ำหนักถ่วงที่เกิดจากการเรียนรู้ ดังแสดงในภาพ 4



ภาพ 4 แสดงตัวอย่างโครงสร้างของตัวแบบ ANN

ภาพ 4 แสดงตัวอย่างโครงสร้างของตัวแบบ ANN แบบ 1 ชั้นซ่อน โดยมีจำนวนตัวแปรอิสระ d ตัว จำนวนโหนดของชั้นซ่อน n โหนด และจำนวนโหนดของชั้นผลตอบสนอง 1 โหนด โดย w_{ij} และ w_j แทน ค่าน้ำหนักถ่วง เมื่อ $i=1,2,...,d$, $j=1,2,...,n$ b_l แทน ค่าความเอนเอียงของแต่ละโหนด เมื่อ $l=0,1,...,n$ และ f แทน ฟังก์ชันกระตุ้น

กระบวนการสำคัญของการสร้างตัวแบบ ANN คือ การปรับค่าน้ำหนักถ่วง (w) ที่เชื่อมต่อระหว่างโหนด และค่าความเอนเอียง (b) ของแต่ละโหนด ซึ่งวิธีการค่าน้ำหนักถ่วงและค่าความเอนเอียงที่นิยมใช้ในกระบวนการเรียนรู้ของ ANN คือ วิธีแพร่ย้อนกลับ (Back Propagation) ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อทำให้ผลตอบสนองที่ได้จากตัวแบบหรือค่าพยากรณ์มีความคลาดเคลื่อนจากค่าจริงน้อยที่สุด

หลักการปรับค่าน้ำหนักถ่วงและความเอนเอียงด้วยวิธีแพร่ย้อนกลับ เริ่มจากการสุ่มค่าน้ำหนักถ่วงทั้งหมดให้อยู่ในช่วง 0 ถึง 1 จากนั้นคำนวณผลตอบสนองหรือค่าพยากรณ์ของจุดทดลองจุดแรก เพื่อนำมาหาผลต่างจากค่าจริง (Prediction error) แล้วนำผลต่างที่ได้มาปรับค่าน้ำหนักถ่วงย้อนกลับจากชั้นผลตอบสนองไปยังชั้นตัวแปรอิสระ ค่าน้ำหนักถ่วงที่ปรับใหม่จะถูกนำมาคำนวณผลตอบสนองของจุดทดลองที่สอง แล้วหาผลต่างของผลตอบสนองกับค่าจริงเพื่อนำไปปรับค่าน้ำหนักถ่วงสำหรับคำนวณผลตอบสนองของจุดทดลองถัดไป เมื่อดำเนินการปรับน้ำหนักถ่วงจนครบทุกจุดทดลองแล้ว นับเป็น 1 รอบ (Epoch)

พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีแพร่ย้อนกลับ คือ อัตราการเรียนรู้ (Learning rate) และอัตราโมเมนตัม (Momentum rate)

1. อัตราการเรียนรู้มีค่าอยู่ในช่วง (0, 1) แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงค่าน้ำหนักถ่วงเพื่อเคลื่อนเข้าสู่ชุดค่าของน้ำหนักถ่วงที่เหมาะสมของตัวแบบ ANN การกำหนดอัตราการเรียนรู้ที่น้อยเกินไป ส่งผลให้น้ำหนักถ่วงเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย ซึ่งอาจทำให้ใช้เวลานานในการหาค่าน้ำหนักถ่วงที่เหมาะสม ในทางตรงข้าม การกำหนดอัตราการเรียนรู้ที่มากเกินไป อาจทำให้การปรับค่าน้ำหนักถ่วง ไม่พบกับค่าน้ำหนักถ่วงที่เหมาะสมเช่นกัน (Larous, 2005)

2. อัตราโมเมนตัม มีค่าอยู่ในช่วง (0, 1) แสดงถึงการปรับน้ำหนักถ่วงปัจจุบัน ให้มีทิศทางเดียวกันกับการปรับน้ำหนักถ่วงก่อนหน้า การกำหนดอัตราโมเมนตัวที่น้อยหรือมากเกินไป สามารถส่งผลต่อการปรับค่าน้ำหนักถ่วงให้พบชุดค่าของน้ำหนักถ่วงที่เหมาะสม

จากการศึกษาพบว่า ช่วงที่นิยมใช้สำหรับอัตราการเรียนรู้และอัตราโมเมนตัมมีค่า 0.1 0.2 และ 0.3 จำนวนรอบของการปรับน้ำหนักถ่วง (Epoch) เป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อประสิทธิภาพของตัวแบบ ANN เพื่อการพยากรณ์ ทั้งนี้ เมื่อจำนวนรอบมากขึ้น จะทำให้ผลต่าง

ระหว่างผลตอบสนองกับค่าจริงมีค่าลดลง ซึ่งถ้าจำนวนรอบมากเกินไป ตัวแบบที่ได้มีลักษณะที่เข้ากันได้ดีกับค่าของจุดทดลองมากเกินไป (Overfitted model) แต่ไม่สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองของจุดทดสอบได้อย่างแม่นยำ

แผนการทดลอง

แผนการทดลองมีความสำคัญอย่างยิ่งสำหรับการสร้างตัวแบบทางสถิติ เนื่องจากถ้าแผนการทดลองที่สร้างมีความเหมาะสม จะส่งผลทำให้ตัวแบบทางสถิติที่ได้สร้างได้มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูง สำหรับแผนการทดลองที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์

แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ (Latin hypercube design: LHD)

แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ (Latin hypercube design: LHD) ถูกนำเสนอโดย Mckay, Beckman, & Conover (1979) LHD เป็นเมทริกซ์ (X) ขนาดแถว n และ d สดมภ์ ซึ่ง n คือ จำนวนจุดทดลอง และ d คือ จำนวนตัวแปรอิสระ แผนการทดลองแบบ LHD ถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวางในงานด้วย CSE เนื่องจาก LHD เป็นแผนการทดลองที่สามารถกระจายจุดทดลองให้เต็มปริภูมิการทดลอง

Box, Hunter, & Hunter (2005) กล่าวว่า LHD สามารถสร้างบนพื้นฐานของแนวคิดของการสุ่มตัวอย่างแบบแบ่งชั้นภูมิ ซึ่งยืนยันได้ว่าทุกๆ พื้นที่ย่อยในการแบ่งบริเวณของตัวแปรอิสระจะถูกเลือกเป็นตัวอย่างด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน โดย LHD มีรูปแบบดังนี้

$$X_{ij} = \frac{\pi_{ij} - U_{ij}}{n} \tag{45}$$

โดยที่ π_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ $n \times d$ ประกอบด้วยสดมภ์ $\pi_i (i = 1,2,...,d)$ แต่ละสดมภ์ $\pi_i (i = 1,2,...,d)$ คือการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มโดยอิสระต่อกันของตัวเลข $(1,2,...,n)$

U_{ij} เป็นค่า $n \times d$ ของการแจกแจงแบบเอกรูปที่เหมือนกัน $(U[0,1])$ และเป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระต่อกันของ π_{ij}

แผนการทดลองแบบ LHD สามารถสร้างได้ง่ายโดยการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ $\{1,2,...,n\}$ ในแต่ละสดมภ์ของแผนการทดลอง ดังนั้น สดมภ์จำนวน d สดมภ์ จะถูกรวมเข้าด้วยกันเป็นแผนการทดลองเมทริกซ์ X ที่มี n แถว d สดมภ์ ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nd} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ X_{ij} แทนสมาชิกของจุดทดลองจุดที่ i ของตัวแปรอิสระตัวที่ j เมื่อ $i=1,2,...,n, j=1,2,...,d$

จากที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการสร้าง LHD ในกรณีที่ข้อมูลเป็นจำนวนจริง แต่เพื่อให้แผนการทดลองที่สร้างขึ้นมาง่ายต่อการคำนวณ สร้าง LHD จากข้อมูลที่อยู่ในช่วง $[0,1]$ ซึ่ง Ye, Li, & Sudjianto (2000) ได้นำเสนอเกี่ยวกับการแปลงข้อมูลจากจำนวนจริงให้อยู่ในช่วง $[0,1]$ และเนื่องจาก LHD แต่ละแผนการทดลองจะประกอบด้วยตัวแปรอิสระ d ตัว ดังนั้น ช่วงที่ต้องพิจารณา คือ

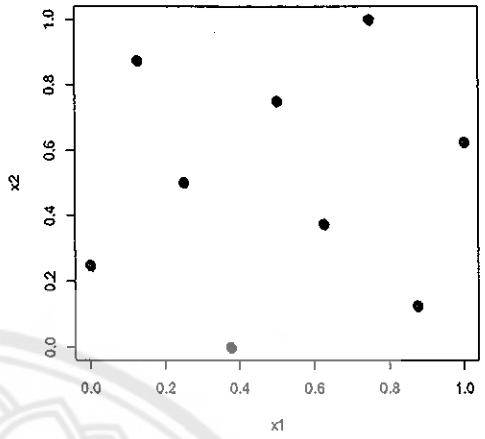
$$[0,1]\times[0,1]\times...\times[0,1]=[0,1]^d$$

สูตรที่ใช้ในการแปลงข้อมูลให้อยู่ในช่วง [0,1] สำหรับตัวแปรอิสระแต่ละตัว (Ye, Li, & Sudjianto (2000) คือ

$$\left\{0,\frac{1}{n-1},\frac{2}{n-1},...,1\right\} \tag{46}$$

เมื่อแปลงข้อมูลให้อยู่ในช่วง $[0,1]^d$ โดยใช้สูตรในการแปลงจากสมการ (44) เรียบร้อยแล้ว จากนั้นจึงนำสมาชิกที่แปลงโดยสมการ (44) ในแต่ละสดมภ์ของ LHD มาเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่ม ตัวอย่างของ LHD สำหรับแผนการทดลองที่มีมิติ 9×2 แสดงดังภาพ 5

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.250 \\ 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0 \\ 0.250 & 0.500 \\ 0.875 & 0.125 \\ 1 & 0.625 \\ 0.125 & 0.875 \\ 0.500 & 0.750 \\ 0.750 & 1 \end{bmatrix}$$



ภาพ 5 แสดงตัวอย่างแผนการทดลองแบบ LHD ที่มีมิติ 9×2

เนื่องจาก LHD ใช้ในการเรียงสับเปลี่ยนอย่างสุ่มของ n ระดับ สำหรับแต่ละสดมภ์ของตัวแปรอิสระเท่านั้น จึงง่ายต่อการออกแบบการทดลอง และสามารถยืนยันได้ว่าจะครอบคลุมตัวแปรอิสระในพื้นที่ 1 มิติที่เป็นเอกรูป แต่ไม่สามารถยืนยันได้ว่าครอบคลุมตัวแปรอิสระในมิติที่สูงขึ้น ในทางปฏิบัติ LHD ที่เหมาะสม จะมีการกระจายจุดทดลองครอบคลุมพื้นที่ของการวางแผนการทดลองทั้งหมดที่เป็นเอกรูปที่สุด โดยปกติแล้ว OLHD จะถูกออกแบบโดยใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้น เช่น Columnwise-pairwise algorithm (CP) Simulated annealing algorithm (SA) Genetic algorithm (GA) เป็นต้น ควบคู่กับเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสม เช่น เกณฑ์เอ็นโทรพี (Entropy criterion) เกณฑ์ค่าสูงสุดของระยะทางที่ต่ำที่สุด (Maximin distance criterion) และเกณฑ์ ϕ_p เป็นต้น (Morris and Mitchell, 1995; Na-udom, 2008) สำหรับการศึกษาในครั้งนี้จะใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้นแบบ SA ควบคู่เกณฑ์ ϕ_p ในการสร้างแผนการทดลองแบบ OLHD

ขั้นตอนวิธีการสืบค้นแบบ SA นำเสนอโดย Kirkpatrick, et al. (1983) ที่ได้จำลองกระบวนการหลอมโลหะ โดยเริ่มการหลอมที่อุณหภูมิสูงและลดอุณหภูมิลงอย่างช้าๆ จนได้โลหะที่เหมาะสม ขั้นตอนการทำงานของ SA ควบคู่กับเกณฑ์ ϕ_p (Thamma, et al., 2008; ธัญดล จันทรวงศ์, 2553) สามารถอธิบายได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างแผนการทดลองเริ่มต้น X_0 และกำหนดพารามิเตอร์เริ่มต้น ได้แก่ อุณหภูมิ t ที่เป็นพารามิเตอร์ควบคุม สามารถคำนวณจากสมการค่าเฉลี่ยของระยะทางระหว่างจุดทุกคู่ของแผนการทดลอง X_0 ดังสมการ (47) จำนวนรอบของการสร้างแผนการทดลอง i_m อัตราส่วนสำหรับการลดอุณหภูมิ C_t ให้ $X = X_0$ และ $X_{best} = X$

$$t = t_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=i+1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{d}\left(x_{ik}-x_{jk}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\binom{d}{2}} \quad (47)$$

ขั้นตอนที่ 2 ตั้งค่าพารามิเตอร์สำหรับการหยุดค้นหา flag = FALSE และ i =1

ขั้นตอนที่ 3 สร้างแผนการทดลองใหม่ X_{try} โดยการสุ่มเปลี่ยนสมาชิกในสดมภ์ของแผนการทดลอง

ขั้นตอนที่ 4 คำนวณค่า ϕ_p ของ X_{try} และแผนการทดลองปัจจุบัน X เพื่อตัดสินใจว่าจะยอมรับแผนการทดลอง X_{try} แทนที่แผนการทดลอง X ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข

$$\phi_p(X) - \phi_p\left(X_{try}\right) \geq tol \quad (48)$$

เมื่อ tol = 0.0001 หรือยอมรับแผนการทดลอง X_{try} ตามความน่าจะเป็นในสมการ (49)

$$e^{-\left[\frac{\phi_p\left(X_{try}\right)-\phi_p(X)}{t}\right]} \quad (49)$$

ถ้าแผนการทดลอง X_{try} ถูกยอมรับโดยเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งต้องเปลี่ยนค่า flag = TRUE แล้วเปรียบเทียบแผนการทดลอง X_{try} กับแผนการทดลองที่ดีที่สุด X_{best} ถ้า $\phi_p\left(X_{try}\right) < \phi_p\left(X_{best}\right)$ จะทำการแทนที่แผนการทดลอง X_{try} ให้เป็นแผนการทดลองที่ดีที่สุด $X_{best} = X_{try}$

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นตอนการทำงานวนซ้ำกลับไปยังขั้นตอนที่ 3 จนครบจำนวนรอบซึ่งเท่ากับ i_m แล้วจึงทำการลดอุณหภูมิลงด้วยสมการ $t = t * C_t$

ขั้นตอนที่ 6 ขั้นตอนการทำงานจะวนซ้ำกลับไปยังขั้นตอนที่ 2 จนกว่าจะเป็นไปตามเงื่อนไขการหยุดทำงานของขั้นตอนวิธีการสืบค้น flag = FALSE เป็นจริง

เกณฑ์ ϕ_p เป็นเกณฑ์การเลือกค่าเหมาะสมที่นำเสนอโดย Morris, & Mitchell (1995) ซึ่งปรับปรุงจาก Maximin distance สำหรับแผนการทดลองที่เหมาะสมคือแผนการทดลองที่มีค่า ϕ_p น้อยที่สุด การหาค่า ϕ_p ของแผนการทดลอง เริ่มจากการคำนวณระยะทางระหว่างจุดทดลองแบบยุคลิด (Euclidean distance) ดังสมการ (50)

$$d_{ij} = \left[\sum_{k=1}^{d} \left(x_{ik} - x_{jk} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (50)$$

เมื่อคำนวณระยะทางระหว่างจุดทุกคู่ในแผนการทดลองซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $D = \left[d_{ij} \right]_{n \times n}$ ให้ทำการเรียงระยะทางระหว่างจุดทั้งหมดจากน้อยไปมาก $\left(d_1, d_2, ..., d_m \right)$ และสร้างดัชนี $\left(j_1, j_2, ..., j_m \right)$ ซึ่ง j_i คือจำนวนคู่จุดที่แบ่งตามระยะทาง d_i ดังนั้น ϕ_p สามารถคำนวณได้จากสมการ (51)

$$\phi_p = \left[\sum_{j=1}^{m} j_j d_j^{-p} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (51)$$

เพื่อให้การคำนวณง่ายขึ้น สามารถคำนวณ ϕ_p ได้ดังสมการ (52)

$$\phi_p = \left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{1}{\left(d_{ij} \right)^p} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (52)$$

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Jin, Chen, & Simpson (2001) ศึกษาเปรียบเทียบตัวแบบถดถอยพหุนาม (Polynomial regression) ตัวแบบ Kriging, MARS และ RBF ด้วยแผนการทดลองแบบ LHD และใช้แก้ปัญหาทดสอบ 14 ปัญหา โดยแบ่งเป็นปัญหาทดสอบที่มีมิติขนาดเล็ก (จำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 2 และ 3 ตัวแปร) จำนวน 8 ปัญหา และปัญหาทดสอบที่มีมิติขนาดใหญ่ (จำนวนตัวแปรอิสระเท่ากับ 10 14 และ 16 ตัวแปร) จำนวน 6 ปัญหา และในแต่ละมิติปัญหากำหนดจุดทดลองเป็นขนาดเล็กและขนาดใหญ่ โดยใช้เกณฑ์ในการวัดความแม่นยำของตัวแบบเพื่อการพยากรณ์ ได้แก่ เกณฑ์สหสัมพันธ์กำลังสอง $\left(R^2 \right)$ เกณฑ์ค่าสัมบูรณ์ของความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย (Relative average absolute error) และเกณฑ์ค่าสัมบูรณ์ของความสัมพันธ์ของความคลาดเคลื่อนที่มากที่สุด (Relative maximum absolute error) พบว่า ถ้าจุดทดลองมีขนาดใหญ่ MARS RBF และตัวแบบ Kriging สามารถพยากรณ์ได้อย่างแม่นยำ และถ้าจุดทดสอบมีขนาดเล็ก RBF สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำที่สุด

Hussain, Barton, & Joshi (2002) ทำการเปรียบเทียบระหว่าง RBF และตัวแบบพหุนาม การศึกษาได้ใช้ปัญหาทดสอบ 2 มิติ จำนวน 7 ปัญหา กับแผนการทดลองแบบ FFD และ LHD โดยใช้เกณฑ์ค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยกำลังสอง (Mean squared error: MSE) ในการเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ ผลลัพธ์ที่ได้คือ RBF สามารถพยากรณ์ได้ดีกว่าตัวแบบพหุนามสำหรับทุกๆปัญหาทดสอบ

Fang, & Horstemeyer (2006) ทำการเปรียบเทียบตัวแบบ RBF กับ RSM ที่สร้างโดยพหุนามเชิงเส้นและหนุนามกำลังสอง โดยใช้แผนการทดลองแบบแฟกทอเรียล CCD LHD และแผนการทดลองแบบแถวลำดับเชิงตั้งฉากของทากูชิ โดยใช้ปัญหาทดสอบ 6 ปัญหา โดยแยกเป็นปัญหาทดสอบ 1 มิติ จำนวน 1 ปัญหา และปัญหาทดสอบ 2 มิติ จำนวน 5 ปัญหา และใช้เกณฑ์ในการเปรียบเทียบคือ เกณฑ์สัมพันธ์กำลังสอง และเกณฑ์ RMSE พบว่า RBF ดีกว่า RSM สำหรับทุกๆ ปัญหาทดสอบ

Mullur, & Messac (2006) เปรียบเทียบความสามารถในการพยากรณ์ระหว่าง RBF ชนิดต่างๆกับตัวแบบ Kriging โดยใช้แผนการทดสอบแบบ Hammersley อย่างสุ่ม และใช้ปัญหาทดสอบที่มีมิติขนาดเล็ก (ปัญหาทดสอบ 2 และ 4 มิติ) จำนวน 4 ปัญหา และปัญหาทดสอบที่มิมิติขนาดใหญ่ (ปัญหาทดสอบ 7 10 16 มิติ) โดยใช้เกณฑ์ RMSE และ MAX สำหรับวัดความแม่นยำในการพยากรณ์ พบว่า RBF มีความสามารถในการพยากรณ์เทียบได้กับตัวแบบ Kriging

Yosboonruang, Na-udom, & Rungrattanaubol (2013) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบ Kriging, RSM และ RBF ที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียนและ Multiquadric โดยใช้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม (Optimal latin hybercube design: OLHD) แผนการทดลองแบบแฟคทอเรียลบางส่วน (Fractional factorial design: FFD) และแผนการทดลองแบบประกอบศูนย์กลาง (Central composite design: CCD) ใช้ปัญหาทดสอบจำนวน 4 ปัญหา ได้แก่ ปัญหา 2 มิติ จำนวน 2 ปัญหา ปัญหา 7 มิติ และ 10 มิติที่มีความซับซ้อนมาก ใช้เกณฑ์รากที่สองของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (RMSE) และเกณฑ์ PI ในการเปรียบเทียบ พบว่า สำหรับแผนการทดลองแบบ OLHD ตัวแบบ RSM มีความแม่นยำมากที่สุดในปัญหาทดสอบ 2 มิติที่มีความซับซ้อนน้อย แต่ปัญหาทดสอบ 2 มิติที่ซับซ้อนมาก ปัญหาทดสอบ 7 และ 10 มิติ ตัวแบบ Kriging และ RBF มีความแม่นยำสูงใกล้เคียงกัน สำหรับแผนการทดลองแบบ FFD และ CCD พบว่า ตัวแบบ RBF มีความแม่นยำมากที่สุด

Na-udom, & Rungrattanaubol (2013) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ระหว่างตัวแบบ Kriging และตัวแบบ ANN โดยใช้แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม และใช้ปัญหาทดสอบที่มีขนาด 2 7 และ 10 มิติ พบว่า ตัวแบบ ANN มีความแม่นยำกว่าตัวแบบ Kriging ในบางมิติปัญหา โดยเฉพาะมิติปัญหาขนาดใหญ่

Vicario, Craparotta, & Pistone (2016) ได้เปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ผลลัพธ์ของการทดลองกลศาสตร์ของไหล 4 มิติ สำหรับกังหันที่มีความดันต่ำ โดยใช้เกณฑ์ RMSE พบว่า ตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำที่สุด และตัวแบบ ANN มีความแม่นยำในการพยากรณ์ใกล้เคียงกับตัวแบบ Kriging

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบ RBF และตัวแบบ ANN สำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ โดยใช้แผนการทดลองแบบเติมเต็มปริภูมิที่เหมาะสม (OLHD) โดยใช้ปัญหาทดสอบที่มีตัวแปรอิสระ 2 ถึง 10 และ 16 ตัวแปร และใช้เกณฑ์รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) ร่วมกับเกณฑ์ร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging (PI) เพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนอง ภายใต้ขอบเขตของการวิจัย ซึ่งมีการวางแผนและกำหนดขั้นตอนการวิจัยดังนี้

ขั้นตอนการวิจัย

1. สร้างแผนการทดลองแบบ OLHD โดยใช้ขั้นตอนวิธีการสืบค้นแบบ SA ควบคู่กับเกณฑ์ ϕ_p ที่พัฒนาขึ้นโดยธัญดล จันทรวงศ์ (2553) โดยกำหนดมิติของปัญหาดังตาราง 1

2. กำหนดปัญหาทดสอบดังตาราง 2 โดยปัญหาทดสอบที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้มีลักษณะไม่เชิงเส้น ทั้งหมด 12 ปัญหาทดสอบ ตามจำนวนตัวแปรอิสระ

2.1 ปัญหาทดสอบ 2 มิติ

ปัญหาทดสอบ 2 มิติ ที่นำมาใช้ในศึกษาครั้งนี้ประกอบด้วยปัญหาทดสอบที่มีความซับซ้อนมาก 2 ปัญหา และปัญหาทดสอบที่ซับซ้อนน้อย 1 ปัญหา ดังนี้

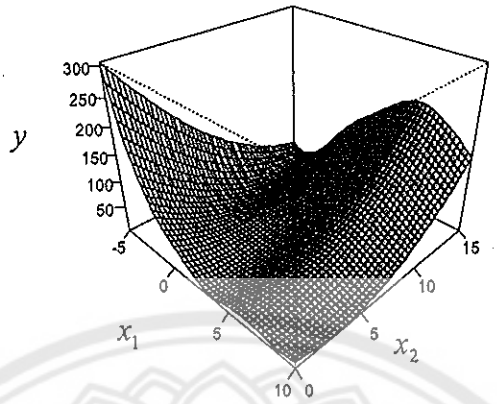
2.1.1 ปัญหาทดสอบที่มีความซับซ้อนมาก

1) Branin function (Martin, & Simpson, 2003) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$y=\left(x_2-\frac{5.1}{4\pi^2}x_1^2+\frac{5}{\pi}x_1-6\right)^2+10\left(1-\frac{1}{8\pi}\right)\cos\left(x_1\right)+10 \qquad (53)$$

เมื่อ $-5\le x_1\le 10, 0\le x_2\le 15$

สำหรับความซับซ้อนของปัญหาทดสอบนี้ อธิบายได้ดังภาพ 6



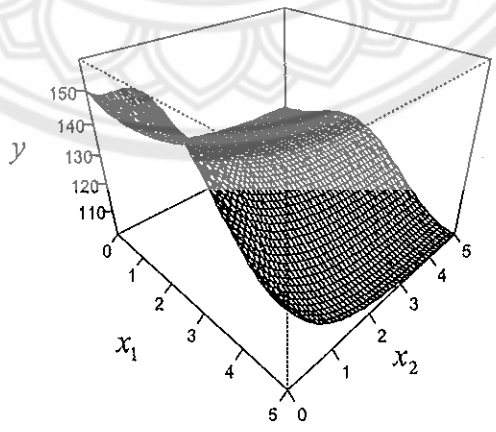
ภาพ 6 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ Branin function

2) Welch function (Welch et al., 1992) ซึ่งมีรูปแบบของสมการ ดังนี้

$$y = \left[30 + x_1 \sin\left(x_1\right)\right]\left(4 + e^{-x_2}\right) \tag{54}$$

เมื่อ $0 \le x_1, x_2 \le 5$

สำหรับความซับซ้อนของปัญหาทดสอบนี้ อธิบายได้ดังภาพ 7



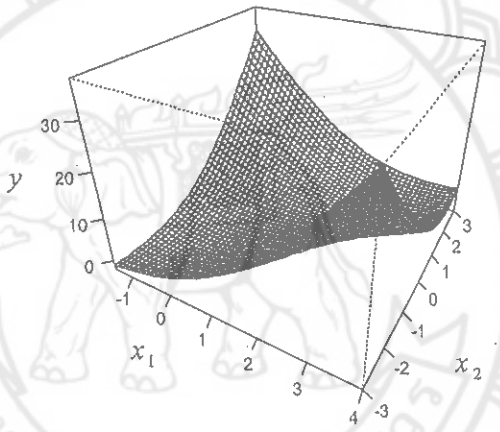
ภาพ 7 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ Welch function

2.1.2 ปัญหาทดสอบที่มีความซับซ้อนน้อย คือ 2D function (Na-udom, & Rungrattanaubol, 2008) ซึ่งมีรูปแบบของสมการ ดังนี้

$$y = \sin(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)^2 - 1.5x_1 + 2.5x_2 + 1 \quad (55)$$

เมื่อ $-1.5 \le x_1 \le 4, -3 \le x_2 \le 3$

สำหรับความซับซ้อนของปัญหาทดสอบนี้ อธิบายได้ดังภาพ 8



ภาพ 8 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ 2D function

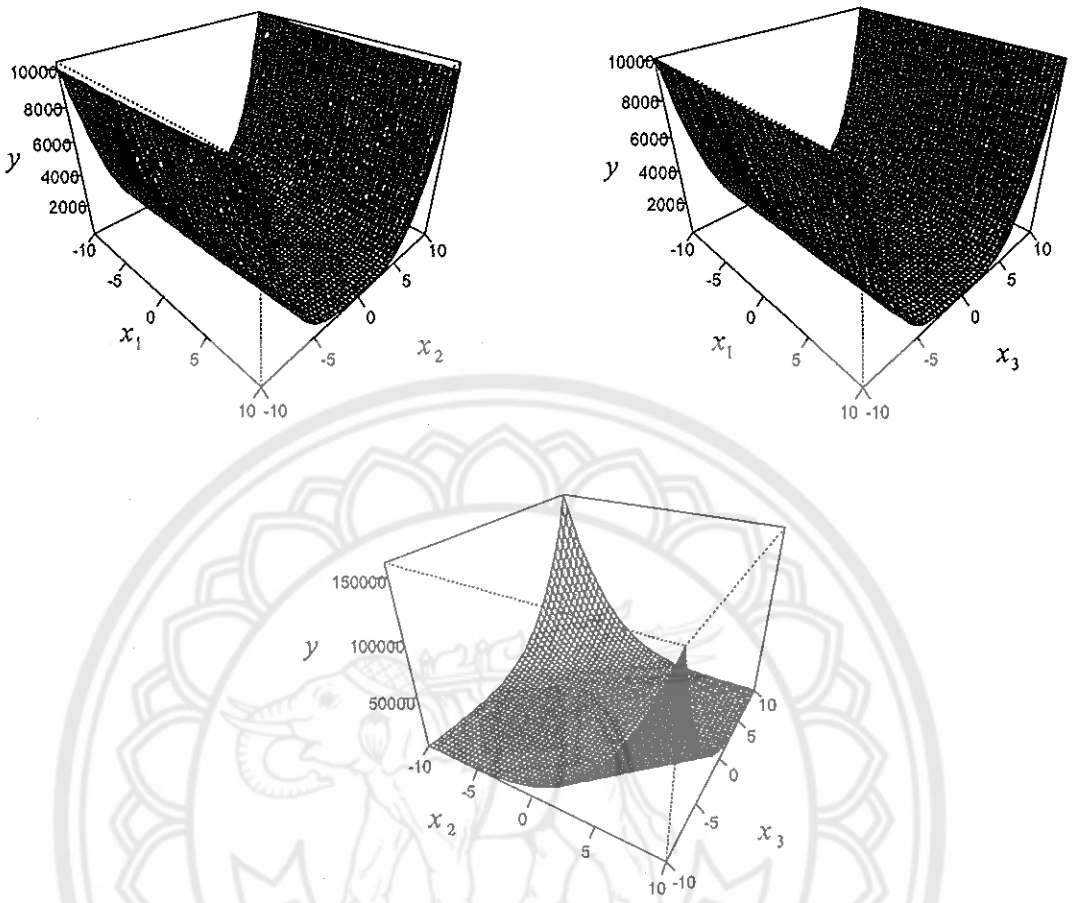
2.2 ปัญหาทดสอบ 3 มิติ

ปัญหาทดสอบ 3 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้คือ 3D function (Hock, & Schittkowski, 1981) ซึ่งมีรูปแบบของสมการ ดังนี้

$$y = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^4 \quad (56)$$

เมื่อ $-10 \le x_1, x_2, x_3 \le 10$

สำหรับความซับซ้อนของปัญหาทดสอบนี้ อธิบายได้ดังภาพ 9



ภาพ 9 แสดงกราฟ 3 มิติ สำหรับ 3D function

2.3 ปัญหาทดสอบ 4 มิติ

ปัญหาทดสอบ 4 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ Pressure vessel function (Simpson, 1998) ซึ่งเกิดจากการออกแบบการทดลองของความกดดันภายในท่อประกอบด้วย ตัวแปรอิสระ 4 ตัวแปร ได้แก่ รัศมีของท่อทรงกระบอก (x_1) ความยาวของท่อทรงกระบอก (x_2) ความหนาของท่อทรงกระบอก (x_3) และความหนาของปลายท่อซึ่งเป็นทรงกลม (x_4) สำหรับหาผลรวมของต้นทุนที่ต่ำที่สุด ซึ่งประกอบด้วย ต้นทุนในการเชื่อมโลหะ ต้นทุนด้านวัตถุดิบ และต้นทุนในการหารูปแบบ กำหนดรูปแบบของสมการสำหรับหาต้นทุนรวมได้ดังนี้

$$y = 0.6224x_3x_1x_2 + 1.7781x_4x_1^2 + 3.1661x_3^2x_2 + 19.84x_3^2x_1 \qquad (57)$$

เมื่อ $25 \le x_1 \le 150, 25 \le x_2 \le 240, 1 \le x_3 \le 1.375, 0.625 \le x_4 \le 1$

2.4 ปัญหาทดสอบ 5 มิติ

ปัญหาทดสอบ 5 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ 5D function (Hock, & Schittkowski, 1981) ซึ่งรูปแบบของสมการเขียนได้ดังนี้

$$y=(x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^3+(x_3-x_4)^4+(x_4-x_5)^4 \tag{58}$$

เมื่อ $-5\le x_i\le 5, i=1,2,...,5$

2.5 ปัญหาทดสอบ 6 มิติ

ปัญหาทดสอบ 6 มิติ ที่นำมาใช้ในศึกษาครั้งนี้คือ Trid 6 function (Jamil, & Yang, 2013) ซึ่งมีรูปแบบของสมการ ดังนี้

$$y=\sum_{i=1}^{6}(x_i-1)^2-\sum_{i=2}^{6}x_ix_{i-1} \tag{59}$$

เมื่อ $-36\le x_i\le 36, i=1,2,...,6$

2.6 ปัญหาทดสอบ 7 มิติ

ปัญหาทดสอบ 7 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ Cyclone model (Ye, Li, & Sudjianto, 2000) เป็นการออกแบบการทดลองของพายุไซโคลน ซึ่งเป็นการทดลองที่ใช้สำหรับแยกความหนาแน่นของของแข็งและก๊าซในวิศวกรรมปิโตรเคมี ประกอบด้วยตัวแปรอิสระ 7 ตัวแปร โดยที่ค่าของตัวแปรอิสระทั้ง 7 ตัวแปร กำหนดให้เป็น $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)=(0.1,0.3,0.1,0.1,11.5,16.0,0.75)$ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางของพายุไซโคลนกับตัวแปรอิสระทั้ง 7 ตัวแปร เขียนได้ดังนี้

$$y=174.42\left(\frac{x_1}{x_5}\right)\left(\frac{x_3}{x_2-x_1}\right)^{0.85}\sqrt{\frac{1-2.62\left\{1-0.36\left(x_4/x_2\right)^{-0.56}\right\}^{3/2}\left(x_4/x_2\right)^{1.16}}{x_6x_7}} \tag{60}$$

สำหรับช่วงของตัวแปรอิสระแต่ละตัวแปรในปัญหาทดสอบนี้ กำหนดให้เป็น $x_i\pm 0.1x_i$, $i=1,2,...,7$ ดังแสดงในตาราง 5

ตาราง 5 แสดงช่วงของตัวแปรอิสระของปัญหา Cyclone model

ตัวแปร	คำอธิบายตัวแปร	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
x_1	เส้นผ่านศูนย์กลางของพายุไซโคลน ส่วนที่ 1 (เมตร)	0.090	0.110
x_2	เส้นผ่านศูนย์กลางของพายุไซโคลน ส่วนที่ 2 (เมตร)	0.270	0.330
x_3	เส้นผ่านศูนย์กลางของพายุไซโคลน ส่วนที่ 3 (เมตร)	0.090	0.110
x_4	เส้นผ่านศูนย์กลางของพายุไซโคลน ส่วนที่ 4 (เมตร)	0.090	0.110
x_5	สัมประสิทธิ์ทางกายภาพ	1.350	1.650
x_6	อัตราเร็วของก๊าซ (เมตร / วินาที)	14.40	17.600
x_7	ความสูงของพายุไซโคลน (เมตร)	0.675	0.825

2.7 ปัญหาทดสอบ 8 มิติ

ปัญหาทดสอบ 8 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ Borehole function (Palmer, & Tsui, 2001) เป็นการศึกษาการไหลของน้ำผ่านรูที่ถูกเจาะจากผิวดินผ่านลงไปสู่ชั้นน้ำบาดาลชั้นที่ 1 และชั้นที่ 2 สำหรับการสร้างสมการจะสมมติว่าไม่มีน้ำบาดาลที่ไหลจากชั้นน้ำบาดาลที่สูงกว่าไปยังรูที่เจาะ และจากรูที่เจาะไปสู่ชั้นน้ำบาดาลที่อยู่ต่ำกว่า และไม่มีอุณหภูมิการไหลของน้ำตลอดทั้งรูที่เจาะ สำหรับอัตราการไหลของน้ำตลอดทั้งรูที่ถูกเจาะจากผิวดิน อธิบายด้วยตัวแปรอิสระ 8 ตัวแปร ดังสมการ

$$y = \frac{2\pi x_3 \left(x_4 - x_6\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left[1 + \frac{2x_7 x_3}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) x_1^2 x_8} + \frac{x_3}{x_5}\right]} \tag{61}$$

สำหรับช่วงของตัวแปรอิสระแต่ละตัวแปรในปัญหาทดสอบนี้ แสดงดังตาราง 6

ตาราง 6 แสดงช่วงของตัวแปรอิสระของปัญหา Borehole function

ตัวแปร	คำอธิบายตัวแปร	ขอบเขตล่าง	ขอบเขตบน
x_1	รัศมีของรูที่ถูกเจาะ (เมตร)	0.050	0.150
x_2	รัศมีของอินฟลูเอนซ์ (เมตร)	100	50000
x_3	การส่งผ่านการไหลของน้ำในชั้นน้ำบาดาลตอนบน (ตารางเมตรต่อปี)	63070	115600
x_4	ส่วนหัวของเครื่องวัดระดับความดันของชั้นน้ำบาดาลตอนบน (เมตร)	990	1110
x_5	การส่งผ่านการไหลของน้ำในชั้นน้ำบาดาลตอนล่าง (ตารางเมตรต่อปี)	63.1	116
x_6	ส่วนหัวของเครื่องวัดระดับความดันของชั้นน้ำบาดาลตอนล่าง (เมตร)	700	820
x_7	ความยาวของรูที่ถูกเจาะ (เมตร)	1120	1680
x_8	การสื่อนำพลังงานไฮดรอลิกของรูที่ถูกเจาะ (เมตร/ปี)	9855	12045

2.8 ปัญหาทดสอบ 9 มิติ

ปัญหาทดสอบ 9 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ 9D function (Mullur, & Messac, 2006) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$y = 0.28285 + \sum_{i=1}^{9}\left[\frac{3}{10} + \sin\left(\frac{16}{15}x_i - 1\right) + \sin^2\left(\frac{16}{15}x_i - 1\right)\right] \quad (62)$$

เมื่อ $-1 \le x_i \le 1, i = 1,2,...,9$

2.9 ปัญหาทดสอบ 10 มิติ

ปัญหาทดสอบ 10 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ 10D function (Mullur, & Messac, 2006) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$y=\sum_{i=1}^{10}\left[\frac{3}{10}+\sin\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)+\sin^2\left(\frac{16}{15}x_i-1\right)\right] \tag{63}$$

เมื่อ $-1\le x_i\le 1, i=1,2,...,10$

2.10 ปัญหาทดสอบ 16 มิติ

ปัญหาทดสอบ 16 มิติ ที่นำมาใช้ในการศึกษาครั้งนี้ คือ 16D function (Jin, Chen, & Simpson, 2001) ซึ่งมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$y=\sum_{i=1}^{16}\sum_{j=1}^{16}a_{ij}\left(x_i^2+x_i+1\right)\left(x_j^2+x_j+1\right) \tag{64}$$

เมื่อ $0\le x_i, x_j\le 5, i, j=1,2,...,16$

$$a_{ij}=\begin{bmatrix}
1&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

$i, j=1,2,...,16$

ทำการแปลงค่าของตัวแปรอิสระในแผนการทดลองแบบ OLHD ให้เป็นค่าจริงของแต่ละปัญหาทดสอบ สำหรับหาค่าตัวแปรตาม (y) ดังนี้

$$x(i) = \min + (\max - \min) \times [0,1]^d,\ i = 1,2,...,d$$

3. สร้างตัวแบบทางสถิติ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโคครงข่ายประสาทเทียม ดังนี้

3.1 สร้างตัวแบบ Kriging

จากแผนการทดลองที่สร้างได้ คำนวณหาเมทริกซ์ R โดยใช้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียนจากจุดทดลอง สำหรับใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ β และ σ^2 ดังสมการ

$$R\left(X_i^{(l)}, X_j^{(l)}\right) = \prod_{l=1}^{d} \exp\left(-\theta_l \left| X_i^{(l)} - X_j^{(l)} \right|^2\right), \theta_l > 0$$

จากเมทริกซ์ R ที่คำนวณได้ นำไปใช้ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ β และ σ^2 ดังนี้

$$\hat{\beta} = \left(1^T R^{-1} 1\right)^{-1} 1^T R^{-1} y_0$$

และ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)^T R^{-1}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)$$

แทนค่า $\hat{\beta}$ และ $\hat{\sigma}^2$ ในฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นซึ่งเป็นปัญหาค่าสูงสุดเชิงตัวเลข สำหรับหาค่าพารามิเตอร์ θ ที่เหมาะสม ด้วยขั้นตอนวิธีการสืบค้นได้เป็น

$$-\frac{1}{2}\left(n \ln \sigma^2 + \ln |R|\right)$$

สร้างตัวแบบพยากรณ์ของ $y(x)$ และ $\hat{y}(x)$ ดังสมการ

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta} + r^T(x)R^{-1}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)$$

ซึ่ง $r(x) = \left[R(x,x_1) \quad R(x,x_2) \quad \ldots \quad R(x,x_n)\right]^T$ คำนวณจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียนระหว่างจุดทดลองกับจุดพยากรณ์ ดังสมการข้างต้น

3.2 สร้างตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี

คำนวณหา $y(x)$ ที่ได้จากฟังก์ชันฐานหลัก ได้แก่ เกาส์เซียนและ Multiquadric ดังตาราง 4 สำหรับค่าคงที่ c ในฟังก์ชันฐานหลักหาได้โดยใช้วิธีการหาค่าที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าคงที่ c ที่เหมาะสมที่สุด (Carlson, & Foley, 1991; Rippa, 1999)

ประมาณค่าพารามิเตอร์ β โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังสมการ

$$\hat{\beta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y$$

สร้างตัวแบบพยากรณ์ของ $y(x)$ คือ $\hat{y}(x)$ จากสมการ

$$\hat{y} = A\hat{\beta}$$

3.3 สร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

ดำเนินการสร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมในโปรแกรม Weka 3.8 โดยการกำหนดอัตราการเรียนรู้ อัตราโมเมนตัม จำนวนชั้นซ่อน จำนวนโหนดของแต่ละชั้นซ่อน และจำนวนรอบของการปรับน้ำหนักถ่วง สำหรับแต่ละมิติปัญหา ดังตาราง 7

ตาราง 7 แสดงการกำหนดพารามิเตอร์ในการปรับค่าน้ำหนักถ่วงของตัวแบบ ANN

d	พารามิเตอร์				
	จำนวนชั้นซ่อน	จำนวนโหนด	จำนวนรอบ	อัตราการเรียนรู้	อัตราโมเมนตัม
2	1	1	500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
3	1	1	500, 1000, 5000, 10000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
4	1	2	500, 1000, 5000, 10000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
5	1	2, 3	300, 500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
6	1	3, 4	300, 500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
7	1	3, 4, 5	500, 1000, 5000, 10000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
8	1	4, 5, 6	500, 1000, 5000, 10000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
9	1, 2	3, 4, 5, 6 (5,1),(5,2),(5,3)	100, 200, 300, 500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
10	1, 2	4, 5 , 6 (5,1), (5,2),(5,3)	100, 200, 300, 500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3
16	1, 2	7, 8, 9, 10 (8,1),(8,2),(8,3),(8,4) (9,1),(9,2),(9,3),(9,4)	100, 200, 300, 500, 1000	0.1, 0.2, 0.3	0.1, 0.2, 0.3

3.4 ตัวอย่างการสร้างตัวแบบทางสถิติ

ผู้วิจัยจะแสดงตัวอย่างการสร้างตัวแบบทางสถิติทั้ง 3 ตัวแบบ โดยใช้ปัญหาทดสอบ คือ Welch function ที่มีจำนวนตัวแปรอิสระ 2 ตัวแปร (d = 2) ดังนี้

$$y = [30 + x_1 \sin(x_1)](4 + e^{-x_2}),\ 0 \le x_1, x_2 \le 5$$

กำหนดจุดทดลอง 9 จุด จะได้เมทริกซ์ (X) ของแผนการทดลองแบบ LHD ที่มีมิติ 9×2 เมื่อทำการแปลงค่าของตัวแปรอิสระจากแผนการทดลองให้เป็นค่าจริง แล้วแทนค่าลงในสมการ Welch function จะได้ผลตอบสนองที่เป็นจริง (y_0) ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0.250 \\ 0.625 & 0.375 \\ 0.375 & 0 \\ 0.250 & 0.500 \\ 0.875 & 0.125 \\ 1 & 0.625 \\ 0.125 & 0.875 \\ 0.500 & 0.750 \\ 0.750 & 1 \end{bmatrix},\ y_0 = \begin{bmatrix} 128.5951 \\ 124.8160 \\ 158.9446 \\ 127.3048 \\ 117.3347 \\ 101.9290 \\ 121.8450 \\ 126.7254 \\ 111.6143 \end{bmatrix}$$

จากแผนการทดลองและผลตอบสนองดังกล่าว จะแสดงตัวอย่างการสร้างตัวแบบทางสถิติ ดังนี้

3.4.1 ตัวแบบ Kriging

คำนวณหาเมทริกซ์ R ที่มีมิติ 9×9 โดยใช้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียนดังสมการ

$$R\left(X_i^{(l)}, X_j^{(l)}\right) = \prod_{l=1}^{2} \exp\left(-\theta_l \left|X_i^{(l)} - X_j^{(l)}\right|^2\right),\ \theta_l > 0,\ i, j = 1, 2, ..., 9$$

เมื่อกำหนดค่า $\theta_1 = \theta_2 = 2$ สามารถแสดงตัวอย่างการคำนวณค่า $R\left(X_i^{(l)}, X_j^{(l)}\right)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} R\left(X_1^{(l)}, X_2^{(l)}\right) &= \exp\left(-2|0 - 0.625|^2\right) \times \exp\left(-2|0.250 - 0.375|^2\right) \\ &= \exp\left(-2 \times \left(0.625^2 + 0.125^2\right)\right) \\ &= \exp(-0.8125) = 0.4437 \end{aligned}$$

$$R\left(X_1^{(l)}, X_3^{(l)}\right) = \exp\left(-2|0-0.375|^2\right) \times \exp\left(-2|0.250-0|^2\right)$$
$$= \exp\left(-2\times\left(0.375^2+0.250^2\right)\right)$$
$$= \exp(-0.4062) = 0.6661$$

เนื่องจาก $R\left(X_1^{(l)}, X_2^{(l)}\right) = R\left(X_2^{(l)}, X_1^{(l)}\right)$ และ $R\left(X_i^{(l)}, X_j^{(l)}\right) = 1, i = j$ จะได้เมทริกซ์ R ดังนี้

$$R = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
0.4437 & 1 & & & & & & & \\
0.6661 & 0.6661 & 1 & & & & & & \\
0.7788 & 0.7316 & 0.5879 & 1 & & & & & \\
0.2096 & 0.7788 & 0.5879 & 0.3456 & 1 & & & & \\
0.1022 & 0.6661 & 0.2096 & 0.3147 & 0.5879 & 1 & & & \\
0.4437 & 0.3679 & 0.1909 & 0.7316 & 0.1054 & 0.1909 & 1 & & \\
0.3679 & 0.7316 & 0.3147 & 0.7788 & 0.3456 & 0.5879 & 0.7316 & 1 & \\
0.1054 & 0.4437 & 0.1022 & 0.3679 & 0.2096 & 0.6661 & 0.4437 & 0.7788 & 1
\end{bmatrix}$$

โดย $\det(R) = 2.5218\times10^{-5}$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0 จึงสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน R^{-1} ได้

คำนวณค่าประมาณของพารามิเตอร์ β และ σ^2 ได้ดังนี้ เมื่อ

$$1^T = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\hat{\beta} = \left(1^T R^{-1} 1\right)^{-1} 1^T R^{-1} y_0$$
$$\hat{\beta} = 119.8996$$

และ

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)^T R^{-1}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)$$
$$\hat{\sigma}^2 = 622.5658$$

ดังนั้น ตัวแบบ Kriging เพื่อการพยากรณ์ $\hat{y}(x)$ ที่จุดพยากรณ์ x คือ

$$\hat{y}(x) = \hat{\beta} + r^T(x)R^{-1}\left(y_0 - 1\hat{\beta}\right)$$
$$\hat{y}(x) = 119.8996 + r^T(x)R^{-1}\left(y_0 - 1(119.8996)\right)$$

ซึ่ง $r^T(x) = \left[R(x,x_1) \quad R(x,x_2) \quad \ldots \quad R(x,x_9)\right]$ คำนวณจากฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียนระหว่างจุดทดลองกับจุดพยากรณ์

เช่น จุดพยากรณ์ $x = [0.450 \quad 0.525]$ จะได้ $y(x) = 129.3027$

$$R(x,x_1) = \exp\left(-2|0-0.0.450|^2\right) \times \exp\left(-2|0.250-0.525|^2\right)$$
$$= \exp\left(-2\times\left(0.450^2 + 0.275^2\right)\right)$$
$$= \exp(-0.5563) = 0.5734$$
$$R(x,x_2) = \exp\left(-2|0.625-0.0.450|^2\right) \times \exp\left(-2|0.375-0.525|^2\right)$$
$$= \exp\left(-2\times\left(0.175^2 + 0.150^2\right)\right)$$
$$= \exp(-0.1063) = 0.8992$$

นั่นคือ

$$r^T(x) = [0.5734 \quad 0.8992 \quad 0.5698 \quad 0.9220 \quad 0.5060 \quad 0.5353 \quad 0.6637 \quad 0.8992 \quad 0.5319]$$

เมื่อแทนค่าในตัวแบบ Kriging เพื่อการพยากรณ์ จะได้ $\hat{y}(x) = 128.4569$

3.4.2 ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี

1) ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน

เนื่องจากฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน คือ

$$\phi\left(\|x - x_i\|\right) = e^{-c\|x-x_i\|^2}$$

เมื่อแทนค่าคงที่ $c = 1$ จะได้ $\phi\left(\|x - x_i\|\right) = e^{-\|x-x_i\|^2}$

สร้างเมทริกซ์ A ที่มีมิติ 9×9 เมื่อ $A_{ij} = \phi\left(\left\|x_i - x_j\right\|\right),\ i,j = 1,2,...,9$

จากแผนการทดลอง จะแสดงตัวอย่างการคำนวณ A_{ij} ดังนี้

$$A_{11} = \phi\left(\left\|x_1 - x_1\right\|\right) = e^{-\left[\sqrt{(0-0)^2+(0.250-0.250)^2}\right]^2} = 1$$

$$A_{12} = \phi\left(\left\|x_1 - x_2\right\|\right) = e^{-\left[\sqrt{(0-0.625)^2+(0.375-0.250)^2}\right]^2} = 0.6661$$

$$A_{13} = \phi\left(\left\|x_1 - x_3\right\|\right) = e^{-\left[\sqrt{(0-0.375)^2+(0-0.250)^2}\right]^2} = 0.8162$$

เนื่องจาก $A_{12} = A_{21}$ และ $A_{ij} = 1, i = j$ จะได้เมทริกซ์ A ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
0.6661 & 1 & & & & & & & \\
0.8162 & 0.8162 & 1 & & & & & & \\
0.8825 & 0.8553 & 0.7667 & 1 & & & & & \\
0.4578 & 0.8825 & 0.7667 & 0.5879 & 1 & & & & \\
0.3196 & 0.8162 & 0.4578 & 0.5609 & 0.7667 & 1 & & & \\
0.6661 & 0.6065 & 0.4368 & 0.8553 & 0.3247 & 0.4369 & 1 & & \\
0.6065 & 0.8553 & 0.5609 & 0.8825 & 0.5879 & 0.7667 & 0.8553 & 1 & \\
0.3247 & 0.6661 & 0.3196 & 0.6065 & 0.4578 & 0.8162 & 0.6661 & 0.8825 & 1
\end{bmatrix}$$

โดย $\det(A) = 4.7184 \times 10^{-9}$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0 จึงสามารถหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้

ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}$ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนี้

$$\hat{\beta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y_0$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 61.1629 \\ -828.3189 \\ 552.7064 \\ -531.8622 \\ 73.1473 \\ 276.7372 \\ 67.4251 \\ 978.3521 \\ -378.1900 \end{bmatrix}$$

จะได้ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีเพื่อพยากรณ์ $\hat{y}(x)$ ที่จุดพยากรณ์ x คือ

$$\hat{y}(x) = A\hat{\beta}$$

เช่น จุดพยากรณ์ $x = [0.450 \quad 0.525]$ จะได้ $y(x) = 129.3027$

สร้างเมทริกซ์ A ที่มีมิติ 1×9 เมื่อ $A_{1j} = \phi\left(\|x - x_j\|\right),\ j = 1, 2, ..., 9$

ตัวอย่างการคำนวณ A_{1j} ดังนี้

$$A_{11} = \phi\left(\|x - x_1\|\right) = e^{-\left[\sqrt{(0.450-0)^2+(0.525-0.250)^2}\right]^2} = 0.7572$$

$$A_{12} = \phi\left(\|x - x_2\|\right) = e^{-\left[\sqrt{(0.450-0.625)^2+(0.525-0.375)^2}\right]^2} = 0.9483$$

จะได้ว่า

$$A = [0.7572 \quad 0.9482 \quad 0.7548 \quad 0.9602 \quad 0.7113 \quad 0.7316 \quad 0.7960 \quad 0.9483 \quad 0.7273]$$

เมื่อแทนค่าลงในตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีเพื่อการพยากรณ์ จะได้ $\hat{y}(x) = 127.4400$

2) ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric

เนื่องจากฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric คือ

$$\phi(\|x-x_i\|)=\sqrt{\|x-x_i\|^2+c^2}$$

เมื่อแทนค่าคงที่ $c=1$ จะได้ $\phi(\|x-x_i\|)=\sqrt{\|x-x_i\|^2+1}$

สร้างเมทริกซ์ A ที่มีมิติ 9×9 เมื่อ $A_{ij}=\phi(\|x_i-x_j\|),\ i,j=1,2,...,9$

จากแผนการทดลอง จะแสดงตัวอย่างการคำนวณ A_{ij} ได้แก่

$$A_{12}=\phi(\|x_1-x_2\|)$$
$$=\sqrt{\sqrt{(0-0.625)^2+(0.375-0.250)^2}^2+1}=1.1859$$
$$A_{13}=\phi(\|x_1-x_3\|)$$
$$=\sqrt{\sqrt{(0-0.375)^2+(0-0.250)^2}^2+1}=1.0969$$

เนื่องจาก $A_{12}=A_{21}$ และ $A_{ij}=1, i=j$ จะได้เมทริกซ์ A ดังนี้

$$A=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & & \\
1.1859 & 1 & & & & & & & \\
1.0969 & 1.0969 & 1 & & & & & & \\
1.0607 & 1.0753 & 1.1250 & 1 & & & & & \\
1.3346 & 1.0607 & 1.1250 & 1.2374 & 1 & & & & \\
1.4631 & 1.0969 & 1.3346 & 1.2562 & 1.1250 & 1 & & & \\
1.1859 & 1.2247 & 1.3521 & 1.0753 & 1.4577 & 1.3521 & 1 & & \\
1.2247 & 1.0753 & 1.2562 & 1.0607 & 1.2374 & 1.1250 & 1.0753 & 1 & \\
1.4577 & 1.1859 & 1.4631 & 1.2247 & 1.3346 & 1.0969 & 1.1859 & 1.0607 & 1
\end{bmatrix}$$

โดย $\det(A)=4.5825\times10^{-12}$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0 จึงสามารถหา เมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้

ทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ $\hat{\beta}$ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด ดังนี้

$$\hat{\beta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T y_0$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 885.8897 \\ 1313.6473 \\ -1713.7960 \\ 620.4764 \\ 794.6687 \\ -673.8623 \\ 19.5542 \\ -2347.0931 \\ 1154.7603 \end{bmatrix}$$

จะได้ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีเพื่อพยากรณ์ $\hat{y}(x)$ ที่จุดพยากรณ์ x คือ

$$\hat{y}(x) = A\hat{\beta}$$

เช่น จุดพยากรณ์ $x = [0.450 \quad 0.525]$ จะได้ $y(x) = 129.3027$

สร้างเมทริกซ์ A ที่มีมิติ 1×9 เมื่อ $A_{1j} = \phi\left(\|x - x_j\|\right),\ j = 1,2,...,9$

ตัวอย่างการคำนวณ A_{1j} ดังนี้

$$A_{11} = \phi\left(\|x - x_1\|\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt{(0.450-0)^2 + (0.525-0.250)^2}^2 + 1}$$

$$= 1.1305$$

$$A_{12} = \phi\left(\|x - x_2\|\right)$$

$$= \sqrt{\sqrt{(0.450-0.625)^2 + (0.525-0.375)^2}^2 + 1}$$

$$= 1.0262$$

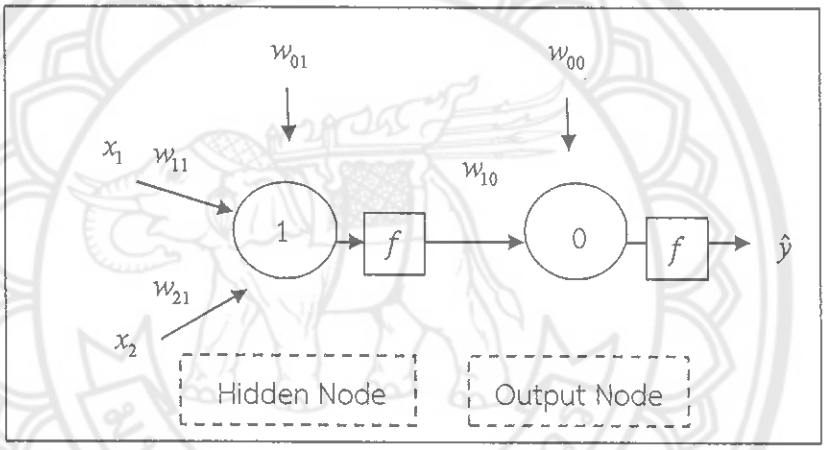
จะได้

$$A=[1.1305 \quad 1.0262 \quad 1.1319 \quad 1.0201 \quad 1.1579 \quad 1.1456 \quad 1.1082 \quad 1.0262 \quad 1.1470]$$

เมื่อแทนค่าลงในตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี จะได้ $\hat{y}(x)=128.3550$

3.4.3 ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

กำหนดโครงสร้างของตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม ดังภาพ 10



ภาพ 10 แสดงโครงสร้างของตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

เมื่อ โหนด 0 คือ โหนดของชั้นผลตอบสนอง (Output layer)

โหนด 1 คือ โหนดของชั้นซ่อน (Hidden layer)

w_{00} คือ น้ำหนักถ่วงของโหนด 0

w_{10} คือ น้ำหนักถ่วงจากโหนด 1 ไปยังโหนด 0

w_{01} คือ น้ำหนักถ่วงของโหนด 1

w_{11} คือ น้ำหนักถ่วงจากตัวแปรอิสระ x_1 ไปยังโหนด 1

w_{21} คือ น้ำหนักถ่วงจากตัวแปรอิสระ x_2 ไปยังโหนด 1

$\hat{y}$ คือ ผลตอบสนองที่ได้จากตัวแบบ สามารถเขียนในรูปของสมการได้เป็น

$$\hat{y} = f\left[w_{00} + w_{10} f\left(w_{01} + x_1 w_{11} + x_2 w_{21}\right)\right]$$

และ

$f(t) = \frac{1}{1+e^{-(t)}}$ คือ ฟังก์ชัน sigmoid

การปรับน้ำหนักถ่วงด้วยวิธีการแพร่ย้อนกลับ มีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ อัตราการเรียนรู้ และอัตราโมเมนตัม โดยการปรับน้ำหนักถ่วงสามารถคำนวณได้ (Larous, 2005) ดังนี้

$w_{ij,new} = w_{ij,current} + \Delta w_{ij,current} + \alpha \Delta w_{ij,previous}$ ซึ่ง $\Delta w_{ij,current} = \eta \delta_j x_{ij}$

เมื่อ $w_{ij,new}$ คือ น้ำหนักถ่วงใหม่ของตัวแปรอิสระที่ i ไปยังโหนด j

$w_{ij,current}$ คือ น้ำหนักถ่วงเดิมของตัวแปรอิสระที่ i ไปยังโหนด j

η คือ อัตราการเรียนรู้

x_{ij} คือ ค่าตัวแปรอิสระที่ i ไปยังโหนด j

α คือ อัตราโมเมนตัม

$\Delta w_{ij,previous}$ คือ $\Delta w_{ij,\text{current}}$ ของจุดทดลองก่อนหน้า

δ_j คือ ค่าความคลาดเคลื่อนของโหนด j คำนวณได้ดังนี้

$\delta_j = \hat{y}(1-\hat{y})(y^* - \hat{y})$ เมื่อ โหนด j อยู่ในชั้นผลตอบสนอง และ

$\delta_j = output_j(1-output_j)\sum_{downstream} w_{jk}\delta_k$ เมื่อ โหนด j อยู่ในชั้นซ่อน และโหนด k อยู่ในชั้นถัดไปทางขวา

ตัวอย่างนี้จะแปลงค่าผลตอบสนองจริง y_0 ให้เป็น y^* ที่มีค่าอยู่ในช่วง [0,1] เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ

ดังนั้น จะได้ค่าของตัวแปรอิสระและผลตอบสนองจริงที่อยู่ในช่วง [0,1] ดังตาราง 8

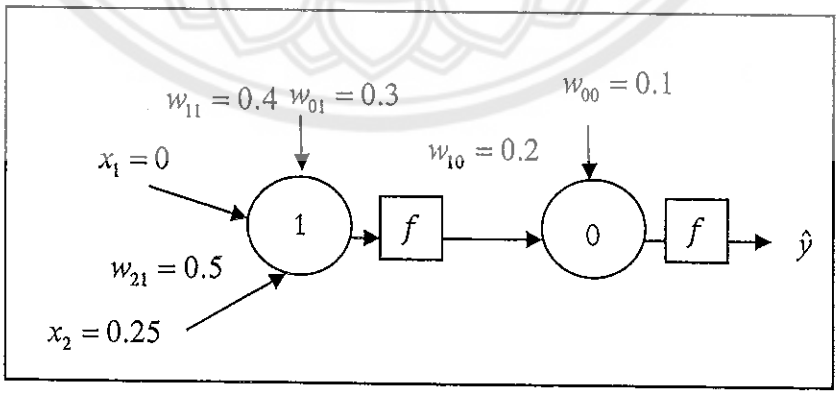
ตาราง 8 แสดงค่าของตัวแปรอิสระและผลตอบสนองจริงที่อยู่ในช่วง [0,1]

n	x_1	x_2	y^*
1	0.000	0.250	0.468
2	0.625	0.375	0.401
3	0.375	0.000	1.000
4	0.250	0.500	0.445
5	0.875	0.125	0.270
6	1.000	0.625	0.000
7	0.125	0.875	0.349
8	0.500	0.750	0.435
9	0.750	1.000	0.170

การปรับน้ำหนักถ่วงเริ่มต้นจากกำหนดอัตราการเรียนรู้เท่ากับ 0.2 ค่าโมเมนต์ตัมเท่ากับ 0.5 และค่าน้ำหนักถ่วงของ w_{00}, w_{10}, w_{01}, w_{11} และ w_{21} เท่ากับ 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 และ 0.5 ตามลำดับ

จุดทดลองที่ 1

$x_1 = 0$ และ $x_2 = 0.250$ โดย $y^* = 0.468$



ภาพ 11 แสดงโครงสร้างของตัวแบบ ANN จุดทดลองที่ 1

ให้ $output_j$ แทนค่า ผลลัพธ์ที่ได้จากโหนดที่ j

จะได้ว่า

$$output_1 = f[0.3 + (0)(0.4) + (0.25)(0.5)] = 0.60468$$

และ

$$output_0 = \hat{y} = f\left[0.1 + 0.2(0.60468)\right] = 0.55501$$

ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (Prediction error) เท่ากับ

$$y^* - \hat{y} = 0.4677 - 0.55501 = -0.08731$$

เนื่องจากโครงสร้างของตัวแบบ ANN มีโหนดในชั้นผลตอบสนองเพียง 1 โหนด จะได้

$$\delta_0 = \hat{y}(1-\hat{y})(y^* - \hat{y})$$

ในทำนองเดียวกัน โหนดในชั้นซ่อนจำนวน 1 โหนด คือ โหนด 1 และโหนดในชั้นถัดไปทางขวามีเพียง 1 โหนด คือ โหนด 0 จะได้

$$\delta_1 = output_o(1 - output_0)w_{10}\delta_0$$

ในการคำนวณเพื่อปรับค่าน้ำหนักถ่วงเริ่มต้นจากชั้นผลตอบสนอง

เนื่องจาก $\delta_0 = \hat{y}(1-\hat{y})(y^* - \hat{y})$

จะได้ $\delta_0 = 0.55501(1-0.55501)(-0.0873) = -0.02156$

และ $\Delta w_{00,current} = \eta\delta_0 x_{00}$

$$\Delta w_{00,current} = (0.2)(-0.02156)(1) = -0.00431$$

เนื่องจาก จุดทดลองนี้เป็นจุดทดลองแรก

จะได้ว่า $\alpha\Delta w_{ij,previous} = 0$

ดังนั้น ปรับค่า w_{00} ได้เป็น

$$w_{00,new} = w_{00,current} + \Delta w_{00,current} + \alpha \Delta w_{00,previous}$$

$$w_{00,new} = 0.1 - 0.00431 + 0 = 0.09569$$

พิจารณาน้ำหนักถ่วงในชั้นซ่อน

เนื่องจาก $\delta_1 = output_1(1 - output_1)w_{10}\delta_0$

จะได้ $\delta_1 = 0.60468(1 - 0.60468)(0.2)(-0.02156) = -0.00103$

และ $\Delta w_{10,current} = \eta \delta_1 x_{10}$ เมื่อ $x_{10} = output_1$

$$\Delta w_{10,current} = 0.2(-0.00103)(0.60468) = -0.000125$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{10} ได้เป็น

$$w_{10,new} = w_{10,current} + \Delta w_{10,current} + \alpha \Delta w_{10,previous}$$

$$w_{10,new} = 0.2 - 0.000125 + 0 = 0.199875$$

ใช้ค่า $\delta_1 = -0.00103$ ในการปรับค่า w_{01}, w_{11} และ w_{21} ดังนี้

สำหรับ w_{01} จะได้ว่า

$$\Delta w_{01,current} = \eta \delta_1 x_0$$

$$\Delta w_{01,current} = 0.2(-0.00103)(1) = -0.000206$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{01} ได้เป็น

$$w_{01,new} = w_{01,current} + \Delta w_{01,current} + \alpha \Delta w_{01,previous}$$

$$w_{01,new} = 0.3 - 0.000206 = 0.299794$$

สำหรับ w_{11} จะได้ว่า

$$\Delta w_{11,current} = \eta \delta_1 x_1$$

$$\Delta w_{11,current} = 0.2(-0.00103)(0) = 0$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{11} ได้เป็น

$$w_{11,new} = w_{11,current} + \Delta w_{11,current} + \alpha \Delta w_{11,previous}$$

$$w_{11,new} = 0.4 + 0 = 0.4$$

สำหรับ w_{21} จะได้ว่า

$$\Delta w_{21,current} = \eta \delta_1 x_2$$

$$\Delta w_{21,current} = 0.2(-0.00103)(0.25) = -0.000052$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{21} ได้เป็น

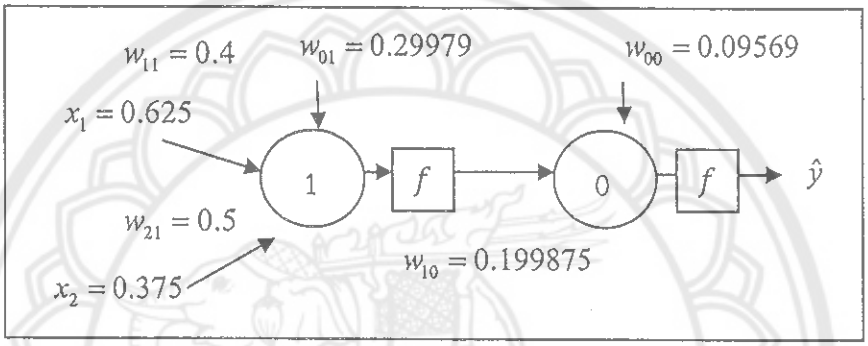
$$w_{21,new} = w_{21,current} + \Delta w_{21,current} + \alpha \Delta w_{21,previous}$$

$$w_{21,new} = 0.5 - 0.000052 + 0 = 0.499948$$

จะได้น้ำหนักถ่วงที่ปรับแล้วจากจุดทดลองที่ 1 คือ $w_{00} = 0.09569$, $w_{10} = 0.199875$, $w_{01} = 0.299794$, $w_{11} = 0.4$ และ $w_{21} = 0.499948$ แล้วนำไปใช้กับจุดทดลองที่ 2

จุดทดลองที่ 2

$x_1 = 0.625$ และ $x_2 = 0.375$ โดย $y^* = 0.4014$



ภาพ 12 แสดงโครงสร้างของตัวแบบ ANN ของจุดทดลองที่ 2

จะได้ว่า

$$output_1 = f[0.299784 + (0.625)(0.4) + (0.375)(0.499948)] = 0.6764$$

และ

$$output_0 = \hat{y} = f\left[0.09569 + 0.199875(0.6764)\right] = 0.55747$$

ดังนั้น ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ (Prediction error) เท่ากับ

$$y^* - \hat{y} = 0.4014 - 0.55747 = -0.15607$$

ในการคำนวณเพื่อปรับค่าน้ำหนักถ่วงเริ่มต้นจากชั้นผลตอบสนอง

เนื่องจาก $\delta_0 = \hat{y}(1-\hat{y})(y^* - \hat{y})$

จะได้ $\delta_0 = 0.55747(1-0.55747)(-0.15607) = -0.0385$

$$\Delta w_{00,current} = \eta \delta_0 x_{00}$$

$$\Delta w_{00,current} = (0.2)(-0.0385)(1) = -0.0077$$

$$\alpha\Delta w_{00,previous} = 0.5(-0.00431) = -0.00216$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{00} ได้เป็น

$$w_{00,new} = w_{00,current} + \Delta w_{00,current} + \alpha\Delta w_{00,previous}$$

$$w_{00,new} = 0.09569 - 0.0077 - 0.00216 = 0.08583$$

เมื่อพิจารณาน้ำหนักถ่วงในชั้นซ่อน

เนื่องจาก $\delta_1 = output_1(1 - output_1)w_{10}\delta_0$

จะได้ $\delta_1 = 0.6764(1-0.6764)(0.199875)(-0.0385) = -0.00168$

$$\Delta w_{10,current} = \eta\delta_1 x_{10} \text{ เมื่อ } x_{10} = output_1$$

$$\Delta w_{10,current} = 0.2(-0.00168)(0.6764) = -0.000228$$

$$\alpha\Delta w_{10,previous} = 0.5(-0.000125) = -0.000062$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{10} ได้เป็น

$$w_{10,new} = w_{10,current} + \Delta w_{10,current} + \alpha\Delta w_{10,previous}$$

$$w_{10,new} = 0.1999875 - 0.000228 - 0.000062 = 0.199585$$

ใช้ค่า $\delta_1 = -0.00168$ ในการปรับค่า w_{01}, w_{11} และ w_{21} ดังนี้

สำหรับ w_{01} จะได้ว่า

$$\Delta w_{01,current} = \eta\delta_1 x_0$$

$$\Delta w_{01,current} = 0.2(-0.00168)(1) = -0.000337$$

$$\alpha\Delta w_{01,previous} = 0.5(-0.000206) = -0.000103$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{01} ได้เป็น

$$w_{01,new} = w_{01,current} + \Delta w_{01,current} + \alpha\Delta w_{01,previous}$$

$$w_{01,new} = 0.299794 - 0.000337 - 0.000103 = 0.299354$$

สำหรับ w_{11} จะได้ว่า

$$\Delta w_{11,current} = \eta\delta_1 x_1$$

$$\Delta w_{11,current} = 0.2(-0.00168)(0.625) = -0.000211$$

$$\alpha\Delta w_{11,previous} = 0.5(0)$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{11} ได้เป็น

$$w_{11,new} = w_{11,current} + \Delta w_{11,current} + \alpha\Delta w_{11,previous}$$

$$w_{11,new} = 0.4 - 0.000211 + 0 = 0.399789$$

สำหรับ w_{21} จะได้ว่า

$$\Delta w_{21,current} = \eta \delta_1 x_2$$

$$\Delta w_{21,current} = 0.2(-0.00168)(0.375) = -0.000126$$

$$\alpha \Delta w_{21,previous} = 0.5(-0.000052) = -0.000026$$

ดังนั้น ปรับค่า w_{21} ได้เป็น

$$w_{21,new} = w_{21,current} + \Delta w_{21,current} + \alpha \Delta w_{21,previous}$$

$$w_{21,new} = 0.499948 - 0.000126 - 0.000026 = 0.499796$$

จะได้ น้ำหนักถ่วงที่ปรับแล้วจากจุดทดลองที่ 2 คือ $w_{00} = 0.085834$, $w_{10} = 0.199585$, $w_{01} = 0.299354$, $w_{11} = 0.399789$ และ $w_{21} = 0.499796$ แล้วนำไปใช้กับจุดทดลองที่ 3 ทำเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ จนครบ 9 จุดทดลอง จะเรียกว่า 1 รอบ (Epoch)

4. กำหนดจุดทดสอบจำนวน 81 จุดทดสอบสำหรับปัญหาทดสอบ 2 มิติ 216 จุดทดสอบสำหรับปัญหาทดสอบ 3 มิติ 625 สำหรับปัญหาทดสอบ 4 มิติ โดยสร้างจากจุดตาข่าย (Grid points) และ 1,000 จุดทดสอบสำหรับปัญหาทดสอบ 5 ถึง 16 มิติ โดยสร้างจากการสุ่ม เนื่องจากมิติของปัญหามีขนาดใหญ่ ทำให้การสร้างจุดทดสอบจากจุดตาข่ายทำได้ยาก และคำนวณผลตอบสนองที่เป็นจริงสำหรับแต่ละจุดทดสอบ $\left(y(i) = 1, 2, ..., k\right)$

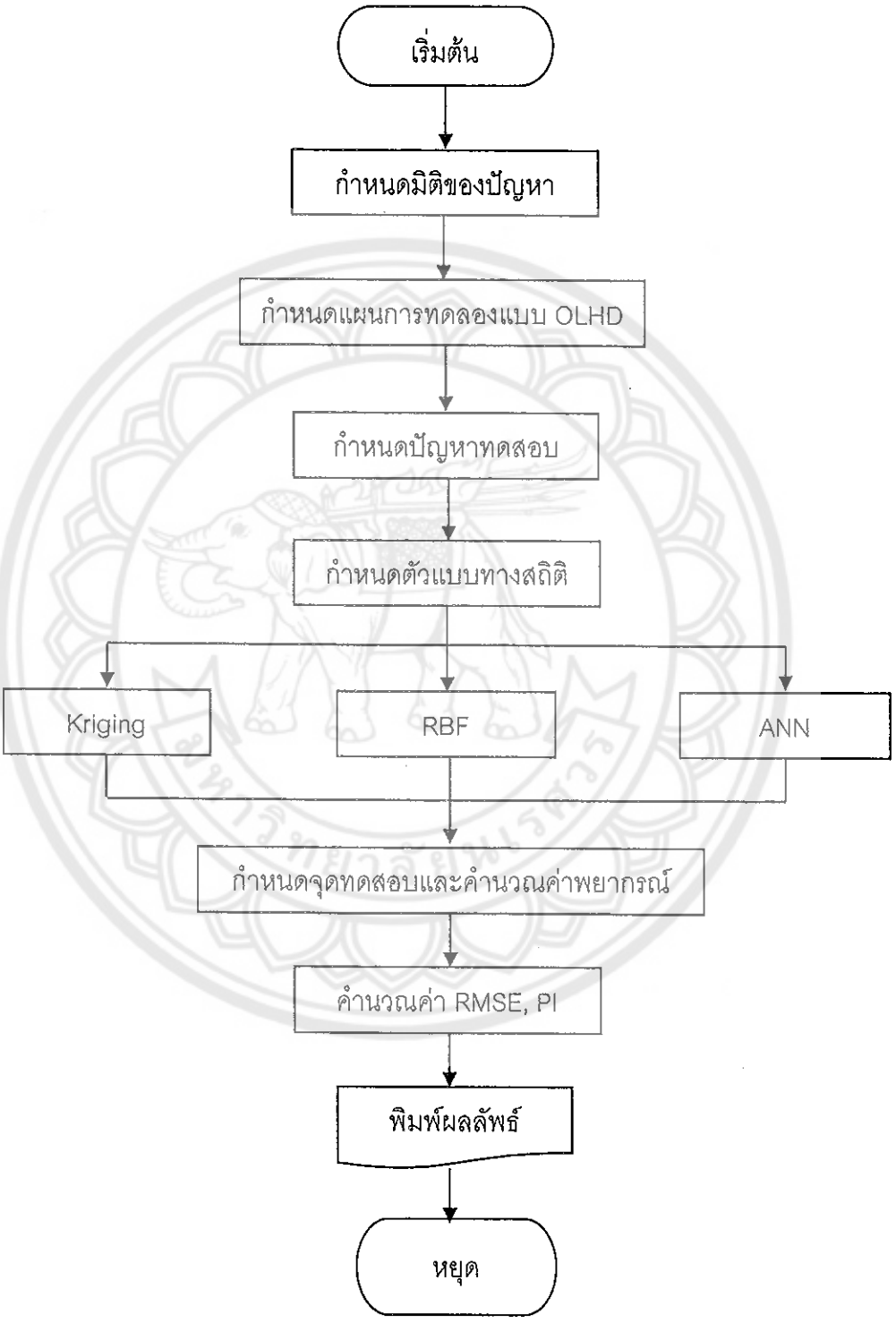
5. คำนวณหาค่า RMSE และ PI

ตัวแบบทางสถิติเพื่อการพยากรณ์ที่ถูกสร้างขึ้น จะต้องมีการวัดความแม่นยำของตัวแบบทางสถิติ โดยการวัดความแม่นยำของการนำเสนอตัวแบบทางสถิติเพื่อการพยากรณ์ผลตอบสนอง $y = \left(Y_1, Y_2, ..., Y_k\right)$ หาได้จากการเพิ่มจุดทดสอบ k จุด $\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$ ผ่าน CSE และโดยผ่านตัวแบบทางสถิติเพื่อการพยากรณ์ $\hat{y} = \left(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, ..., \hat{Y}_k\right)$ สำหรับคำนวณความแม่นยำของตัวแบบโดยการหาค่าความแตกต่างระหว่าง y และ $\hat{y}$ โดยในการศึกษาครั้งนี้ใช้เกณฑ์ RMSE ในการวัดความแม่นยำในการพยากรณ์ สามารถคำนวณได้ตามสมการ (5) ร่วมกับเกณฑ์ PI ตามสมการ (6)

6. เปรียบเทียบค่า RMSE และ PI สำหรับตัวแบบทางสถิติทั้ง 3 ตัวแบบ ในแต่ละมิติปัญหาทดสอบ

7. สรุปผลการวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัยสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังภาพ 13

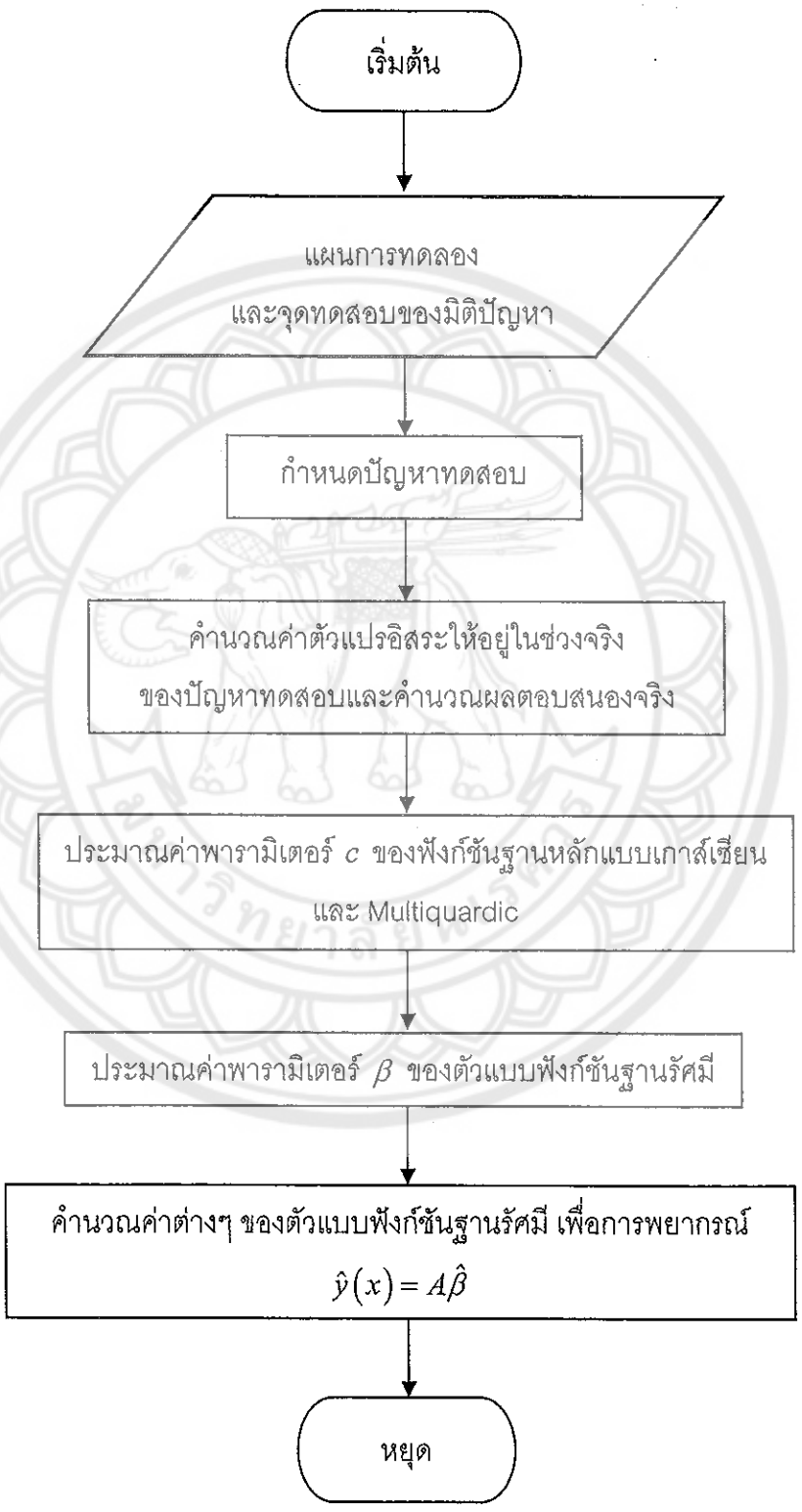


ภาพ 13 แสดงขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

การสร้างตัวแบบ Kriging ของแต่ละปัญหาทดสอบในโปรแกรม R แสดงดังภาพ 14

ภาพ 14 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบ Kriging

การสร้างตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีของแต่ละปัญหาทดสอบในโปรแกรม R แสดงดังภาพ 15



ภาพ 15 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี

การสร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมของแต่ละปัญหาทดสอบในโปรแกรม Weka แสดงดังภาพ 16

ภาพ 16 แสดงขั้นตอนการสร้างตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

บทที่ 4

ผลการวิจัย

จากการดำเนินการวิจัยที่ได้สร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม จำนวน 10 แผนการทดลอง สำหรับแต่ละมิติปัญหาและจำนวนจุดทดลองที่กำหนด เมื่อนำมาสร้างตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมของแต่ละปัญหาทดสอบ แล้วนำมาพยากรณ์ผลตอบสนองของจุดทดสอบ และคำนวณรากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย รวมทั้งร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging เพื่อเปรียบเทียบความสามารถของตัวแบบทางสถิติในการพยากรณ์ผลตอบสนอง สำหรับบริบทของการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

ผลการวิจัยนำเสนอโดยใช้รูปแบบตาราง แยกตามปัญหาทดสอบที่มีขนาด 2 ถึง 10 และ 16 มิติ ตามลำดับ กำหนดสัญลักษณ์แทนความหมายต่างๆ ดังนี้

KRG	แทน	ตัวแบบ Kriging
RBFG	แทน	ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน
RBFM	แทน	ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric
ANN	แทน	ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม
RMSE	แทน	รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย
PI	แทน	ค่าร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่า Kriging
S.D.	แทน	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)
d	แทน	จำนวนตัวแปรอิสระ
n	แทน	จำนวนจุดทดลอง

รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) ค่าพารามิเตอร์ θ ของตัวแบบ Kriging และค่าคงที่ c ของตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี จากทั้ง 10 แผนการทดลองของแต่ละมิติปัญหาและจำนวนจุดทดลอง รวมถึงการทดสอบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญของความสามารถในการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติ แสดงในภาคผนวก

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 2 มิติ

สำหรับปัญหาทดสอบขนาด 2 มิติ มีจำนวน 3 ปัญหา แบ่งออกเป็นปัญหาทดสอบที่มีความซับซ้อนมาก จำนวน 2 ปัญหา ได้แก่ Branin function และ Welch function และปัญหาทดสอบที่มีความซับซ้อนน้อย จำนวน 1 ปัญหา ได้แก่ 2D function ผลการวิจัยแสดงดังต่อไปนี้

ตาราง 9 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Branin function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
2	6	KRG	41.472	57.585	47.127		5.290
		RBFG	41.528	57.825	45.694	3.040	5.533
		RBFM	38.798	56.141	47.596	-0.994	5.125
		ANN	58.388	63.878	60.478	-28.329	1.744
	9	KRG	21.838	40.808	31.323		9.998
		RBFG	21.715	41.626	31.671	-1.110	10.494
		RBFM	28.109	43.918	36.014	-14.975	8.332
		ANN	56.849	58.596	57.794	-84.512	0.622

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 9 แสดงผลการวิจัยของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Branin function) ที่มีความซับซ้อนมาก สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ($n = 6$) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFG มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ 45.694 ชี้ให้เห็นว่ามีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงที่สุด ซึ่งแตกต่างจากค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG และ RBFM เพียงเล็กน้อย เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ 3.040% แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้ดีกว่าตัวแบบ KRG ไม่มากนัก สำหรับตัวแบบ RBFM ที่มีค่า PI เท่ากับ -0.994% หมายถึง ตัวแบบ RBFM สามารถพยากรณ์ได้ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เล็กน้อย ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ RBFG KRG และ RBFM สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำใกล้เคียงกัน

เมื่อจำนวนจุดทดลองมีขนาดใหญ่ (n = 9) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ 31.323 นั่นคือ มีความสามารถในการพยากรณ์ได้แม่นยำมากที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ RBFG RBFM และ ANN ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ที่เท่ากับ -1.110% แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG มีความสามารถพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เพียงเล็กน้อย ทำให้ได้ว่า สำหรับกรณีนี้ ตัวแบบ KRG และ RBFG สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำเท่าเทียมกัน

ตาราง 10 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Welch function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
2	6	KRG	4.483	6.439	5.492		0.808
		RBFG	3.479	6.499	5.170	5.874	1.339
		RBFM	6.164	9.229	7.787	-41.777	1.207
		ANN	8.404	9.807	9.020	-64.237	0.498
	9	KRG	3.382	4.326	3.854		0.497
		RBFG	4.043	4.376	4.210	-9.224	0.175
		RBFM	5.038	5.386	5.212	-35.237	0.183
		ANN	8.253	8.875	8.493	-120.359	0.194

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 10 แสดงผลการวิจัยของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (Welch function) ที่มีความซับซ้อนมาก สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n = 6) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFG มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ 5.170 รองลงมาคือตัวแบบ KRG RBFM และ ANN ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำที่สุด เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ 5.874% ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์มากกว่าตัวแบบ KRG เพียงเล็กน้อย ทำให้ได้ว่า ตัวแบบ RBFG และ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองใกล้เคียงกัน

กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n = 9) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าน้อยที่สุด และมีค่าใกล้เคียงกับตัวแบบ RBFG ซึ่งมีค่าน้อยกว่าตัวแบบ RBFM และตัวแบบ ANN ตามลำดับ ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ KRG และ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ได้แม่นยำใกล้เคียงกัน และเมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG มี -9.224% แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เพียงเล็กน้อย

ตาราง 11 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (2D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
2	6	KRG	2.345	2.840	2.595		0.154
		RBFG	0.902	1.167	1.028	60.390	0.113
		RBFM	3.476	3.934	3.699	-42.515	0.190
		ANN	6.143	8.210	6.876	-164.921	0.822
	9	KRG	2.013	2.036	2.024		0.012
		RBFG	1.014	1.080	1.047	48.278	0.035
		RBFM	2.582	2.810	2.695	-33.108	0.119
		ANN	6.039	8.774	7.169	-254.076	1.098

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 11 แสดงผลการวิจัยของปัญหาทดสอบ 2 มิติ (2D function) ที่มีความซับซ้อนน้อย พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n = 6) ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFG มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ 1.028 ซึ่งน้อยกว่าตัวแบบ KRG RBFM และ ANN ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFG จะเห็นว่ามีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ต่ำสุดของตัวแบบอื่นๆ และค่า PI ของตัวแบบ RBFG มีค่าเท่ากับ 60.390% จากข้อมูลดังกล่าว ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำที่สุด และแม่นยำกว่าตัวแบบ KRG เป็นอย่างมาก

เช่นเดียวกันกับกรณีจุดทดลองขนาดใหญ่ ($n = 9$) ที่ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFG มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ 1.047 ซึ่งน้อยกว่าตัวแบบ KRG RBFM และ ANN ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำที่สุด เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFG จะเห็นว่ามีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ต่ำสุดของตัวแบบอื่นๆ นอกจากนี้ ค่า PI ของตัวแบบ RBFG มีค่าเท่ากับ 48.278% ซึ่งหมายถึง ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG ค่อนข้างสูง

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 3 มิติ

ตาราง 12 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 3 มิติ (3D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
3	10	KRG	22849.400	32013.866	26534.580		3374.387
		RBFG	18508.199	28693.196	21999.530	17.091	3115.025
		RBFM	30700.325	36695.493	33836.692	-27.519	2091.952
		ANN	13630.945	43313.445	29558.612	-11.397	12579.78
	19	KRG	22816.640	29420.943	26383.050		2028.553
		RBFG	20390.853	24801.422	22924.036	13.111	1472.214
		RBFM	26425.008	32708.134	29550.922	-12.007	1844.839
		ANN	11687.649	46205.386	22565.176	14.471	12012.91

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 12 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 3 มิติ (3D function) พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ($n = 10$) ค่าเฉลี่ย RMSE ของตัวแบบ RBFG มีค่าต่ำที่สุด นั่นคือ มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ KRG ANN และ RBFM ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ที่มีค่าประมาณ 17.091 ซึ่งหมายความว่าตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG ค่อนข้างมาก

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n = 19) ค่าเฉลี่ย RMSE ของตัวแบบ ANN มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 22565.176 นั่นคือ มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด ซึ่งใกล้เคียงกับตัวแบบ RBFG ที่มีค่าเฉลี่ย RMSE เท่ากับ 22924.036 เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN และ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ 14.471% และ 13.111% ตามลำดับ จะได้ว่า ทั้งสองตัวแบบมีความสามารถในการพยากรณ์ได้ดีกว่าตัวแบบ KRG

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 4 มิติ

ตาราง 13 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 4 มิติ (Pressure vessel function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
4	15	KRG	724.993	1554.164	944.196		252.276
		RBFG	5687.091	12951.857	7938.058	-740.721	2435.184
		RBFM	4368.014	5730.937	5131.494	-443.478	425.947
		ANN	983.938	1705.028	1231.948	-30.476	203.454
	33	KRG	28.848	93.863	59.657		17.063
		RBFG	6844.916	30749.754	12474.464	-20810.311	7191.225
		RBFM	4452.842	4950.012	4693.202	-7766.976	192.404
		ANN	1008.535	1260.986	1093.946	-1733.726	70.959

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 13 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 4 มิติ (Pressure vessel function) พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n = 15) ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 944.196 ซึ่งหมายถึง ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมาคือ ตัวแบบ ANN RBFM และ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN RBFM และ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ -30.476%, -443.478 และ -740.721% ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ KRG มีความสามารถในการพยากรณ์ได้ดีกว่าตัวแบบอื่นๆ เป็นอย่างมาก

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n = 33) ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 59.657 ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมา คือ ตัวแบบ ANN RBFM และ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN RBFM และ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ -1733.726% -7766.976% และ 20810.311% ตามลำดับ แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบดังกล่าว มีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เป็นอย่างมาก และเมื่อพิจารณาจากค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ KRG พบว่า มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ของตัวแบบอื่น ดังนั้น ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 5 มิติ

ตาราง 14 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 5 มิติ (5D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
5	21	KRG	996.683	1182.953	1102.413		56.955
		RBFG	801.195	1347.176	1187.414	-7.711	175.227
		RBFM	1437.875	1558.134	1494.218	-35.541	41.545
		ANN	1258.971	2973.982	1836.095	-66.553	574.512
	51	KRG	351.990	1283.986	995.602		277.439
		RBFG	913.985	1264.806	1047.399	-5.202	101.668
		RBFM	1115.278	1255.278	1190.731	-19.599	38.443
		ANN	902.786	2513.222	1589.245	-59.627	615.387

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 14 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 5 มิติ (5D function) พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n =21) ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 1102.413 หมายถึง ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ RBFG RBFM และ ANN ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ที่เท่ากับ -7.711% แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG

เพียงเล็กน้อย จึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ KRG และ RBFG มีความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองใกล้เคียงกัน

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ ($n=51$) ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยตัวแบบ KRG มีค่า RMSE เฉลี่ยต่ำที่สุดเท่ากับ 995.602 และเมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด แสดงให้เห็นว่าตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด นอกจากนี้ ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าใกล้เคียงกับค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFG ที่มีค่าเท่ากับ 1047.399 เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFG ซึ่งเท่ากับ -5.203% จะได้ว่า ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เพียงเล็กน้อย จึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ KRG และ RBFG มีความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองใกล้เคียงกัน

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 6 มิติ

ตาราง 15 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 6 มิติ (Trid 6 function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
6	28	KRG	992.319	1078.544	1040.417		26.191
		RBFG	1773.894	2872.610	2433.626	-133.909	566.727
		RBFM	894.905	946.098	*922.897*	11.296	18.269
		ANN	950.305	1490.956	1198.648	-15.208	160.222
	73	KRG	9.863	49.683	*28.549*		13.684
		RBFG	1733.556	2872.610	2194.017	-7585.239	584.099
		RBFM	561.397	802.625	751.261	-2531.530	70.751
		ANN	822.595	1287.762	931.639	-3136.362	136.083

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 15 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 6 มิติ (Trid 6 function) สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ($n=28$) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำที่สุดเท่ากับ 922.897 รองลงมาคือตัวแบบ KRG ANN และ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM มีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ที่ได้จากตัวแบบอื่น จากข้อมูลดังกล่าว แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด โดยตัวแบบ RBFM มีความสามารถในการพยากรณ์มากกว่าตัวแบบ KRG ไม่มากนัก (PI=11.296%)

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ ($n=73$) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด เนื่องจากมีค่า RMSE เฉลี่ยต่ำที่สุด เท่ากับ 28.549% รวมทั้งค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ที่ได้จากตัวแบบอื่น นอกจากนี้เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ RBFM ANN และ RBFG พบว่า ตัวแบบทั้งสามมีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เป็นอย่างมาก (PI= -2531.530% -3136.362% และ -7585.239% ตามลำดับ)

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 7 มิติ

ตาราง 16 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 7 มิติ (Cyclone model)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
7	36	KRG	0.004	0.006	0.005		0.001
		RBFG	0.046	0.077	0.059	-1155.319	0.010
		RBFM	0.052	0.072	0.063	-1240.436	0.007
		ANN	0.007	0.010	0.009	-97.021	0.001
	99	KRG	0.004	0.005	0.004		0.000
		RBFG	0.009	0.016	0.012	-174.419	0.002
		RBFM	0.048	0.061	0.053	-1127.907	0.003
		ANN	0.004	0.005	0.004	0.000	0.000

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 16 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 7 มิติ (Cyclone model) พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n =36) ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.0047 เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN, RBFG และ RBFM พบว่า มีความสามารถในการพยากรณ์ด้อยกว่าตัวแบบ KRG เป็นอย่างมาก (PI=-97.021% -1155.319% และ -1240.436% ตามลำดับ) นอกจากนี้ ค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ KRG มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ของตัวแบบอื่น จึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n =99) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ ANN และตัวแบบ KRG มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.004 ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ ANN และ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุดอย่างเท่าเทียมกัน

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 8 มิติ

ตาราง 17 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 8 มิติ (Borehole function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
8	45	KRG	0.742	1.079	*0.949*		0.106
		RBFG	4.456	5.514	5.067	-433.997	0.342
		RBFM	5.101	6.343	5.599	-490.062	0.415
		ANN	1.243	3.058	2.046	-115.583	0.620
	129	KRG	0.647	1.069	0.840		0.140
		RBFG	2.456	3.369	2.897	-245.027	0.286
		RBFM	3.050	3.541	3.210	-282.359	0.154
		ANN	0.614	0.864	*0.710*	15.426	0.083

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 17 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 8 มิติ (Borehole function) ในกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ($n=45$) ตัวแบบ KRG มีค่า RMSE เฉลี่ยต่ำที่สุด เท่ากับ 0.949 แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN RBFG และ RBFM ที่มีค่าเท่ากับ -115.583% -433.997% และ -490.062% ตามลำดับ ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบดังกล่าวมีความสามารถในการพยากรณ์ด้วยกว่าตัวแบบ KRG อย่างมาก เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ KRG พบว่า มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ของตัวแบบอื่น ซึ่งเป็นการยืนยันว่าตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ ($n=129$) ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ ANN มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.710 ทำให้ได้ว่า ตัวแบบ ANN มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ KRG RBFG และ RBFM ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า PI ของตัวแบบ ANN ที่มีค่าเท่ากับ 15.426% ซึ่งหมายถึง ตัวแบบ ANN มีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 9 มิติ

ตาราง 18 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 9 มิติ (9D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
9	55	KRG	0.242	0.288	0.275		0.014
		RBFG	0.319	0.407	0.359	-30.710	0.027
		RBFM	0.229	0.242	0.237	13.843	0.004
		ANN	0.244	0.278	0.252	8.295	0.010
	163	KRG	0.231	0.253	0.242		0.006
		RBFG	0.278	0.327	0.302	-25.041	0.017
		RBFM	0.218	0.229	0.224	7.409	0.004
		ANN	0.234	0.252	0.243	-0.360	0.006

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 18 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 9 มิติ (9D function) สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n=55) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.237 รองลงมาคือตัวแบบ ANN, KRG และ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM มีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ต่ำสุดของตัวแบบอื่น จากข้อมูลดังกล่าว แสดงให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด นอกจากนี้ ค่า PI ของตัวแบบ RBFM ที่มีค่าเท่ากับ 13.843% ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM มีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG

กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n=163) พบว่า ค่าเฉลี่ย RMSE ของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.224 ซึ่งน้อยกว่าตัวแบบ KRG ANN และ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM พบว่า มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ต่ำสุดของตัวแบบอื่น ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด เมื่อพิจารณาจากค่า PI จะได้ว่าตัวแบบ RBFM มีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG (PI=7.409%)

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 10 มิติ

ตาราง 19 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 10 มิติ (10D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
10	66	KRG	0.282	0.317	0.297		0.013
		RBFG	0.360	0.414	0.380	-28.220	0.015
		RBFM	0.243	0.259	***0.250***	15.779	0.006
		ANN	0.263	0.290	0.273	7.953	0.009
	201	KRG	0.245	0.268	0.255		0.007
		RBFG	0.292	0.350	0.320	-25.510	0.020
		RBFM	0.231	0.239	***0.235***	7.928	0.003
		ANN	0.251	0.287	0.261	-2.524	0.011

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 19 แสดงค่า RMSE ปัญหาทดสอบ 10 มิติ (10D function) พบว่า ในกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n =66) ตัวแบบ RBFM มีค่า RMSE เฉลี่ยต่ำที่สุด เท่ากับ 0.250 ซึ่งน้อยกว่าตัวแบบ ANN, KRG และ ตัวแบบ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM พบว่า มีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ของตัวแบบอื่น ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด และมีความสามารถในการพยากรณ์ดีกว่าตัวแบบ KRG (PI = 15.779%)

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n =201) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก โดยค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 0.235 นอกจากนี้ ค่า RMSE ต่ำสุดและค่าสูงสุดของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ที่ได้จากตัวแบบอื่น จึงสามารถสรุปได้ว่า ตัวแบบ RBFM มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ KRG ANN และตัวแบบ RBFG ตามลำดับ

ผลการวิจัยสำหรับปัญหาทดสอบที่มีขนาด 16 มิติ

ตาราง 20 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 16 มิติ (16D function)

d	n	ตัวแบบทางสถิติ	RMSE				
			ค่าต่ำสุด	ค่าสูงสุด	ค่าเฉลี่ย	PI (%)	S.D.
16	153	KRG	634.054	912.999	705.775		85.097
		RBFG	1110.339	1128.105	1117.338	-58.314	5.321
		RBFM	548.979	582.712	565.905	19.818	11.415
		ANN	665.164	723.243	704.864	0.129	18.719
	513	KRG	635.443	673.599	655.877		14.474
		RBFG	704.036	769.963	737.501	-12.445	23.323
		RBFM	399.481	431.655	415.572	36.639	11.098
		ANN	579.524	616.106	596.971	8.981	12.088

หมายเหตุ: ตัวเลขที่มีลักษณะหนาและเอียงแสดงถึงค่า RMSE เฉลี่ยที่น้อยที่สุดของแต่ละกรณี

ตาราง 20 แสดงค่า RMSE ของปัญหาทดสอบ 16 มิติ (16D function) สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ($n=153$) พบว่า ตัวแบบ RBFM มีค่าRMSE เฉลี่ยเท่ากับ 565.905 ซึ่งเป็นค่าที่ต่ำที่สุด รองลงมาคือตัวแบบ ANN KRG และตัวแบบ RBFG ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM พบว่า มีค่าน้อยกว่าค่า RMSE ของตัวแบบอื่น ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM เป็นตัวแบบที่มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงที่สุด

สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ ($n=513$) พบว่า ค่า RMSE เฉลี่ยของแต่ละตัวแบบมีค่าลดลงเมื่อเทียบกับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ซึ่งค่า RMSE เฉลี่ยของตัวแบบ RBFM มีค่าต่ำที่สุด เท่ากับ 415.572 รองลงมาคือตัวแบบ ANN KRG และตัวแบบ RBFG ตามลำดับ และเมื่อพิจารณาค่า RMSE ต่ำสุดและสูงสุดของตัวแบบ RBFM พบว่า มีค่าต่ำกว่าค่า RMSE ที่ได้จากตัวแบบอื่น ชี้ให้เห็นว่า ตัวแบบ RBFM เป็นตัวแบบที่มีความแม่นยำที่สุด นอกจากนี้ ค่า PI ของตัวแบบ RBFM ซึ่งมีค่าเท่ากับ 36.639% ทำให้ได้ว่า ตัวแบบ RBFM สามารถพยากรณ์ได้ดีกว่าตัวแบบ KRG

ตาราง 21 แสดงตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละมิติปัญหา

d	ปัญหาทดสอบ	จุดทดลองขนาดเล็ก		จุดทดลองขนาดใหญ่	
		n	ตัวแบบทางสถิติ	n	ตัวแบบทางสถิติ
2	Branin function	6	RBFG, KRG, RBFM	9	KRG, RBFG, RBFM
2	Welch function	6	RBFG, KRG	9	KRG, RBFG
2	2D function	6	RBFG, KRG, RBFM	9	RBFG, KRG, RBFM
3	3D function	10	KRG, RBFG, ANN	19	ANN, RBFG, KRG
4	Pressure vessel function	15	KRG, ANN	33	KRG, ANN
5	5D function	21	KRG, RBFG	51	KRG, RBFG
6	Trid 6 function	28	RBFM, KRG	73	KRG, RBFM
7	Cyclone model	36	KRG, ANN	99	KRG, ANN
8	Borehole function	45	KRG	129	KRG, ANN
9	9D function	55	RBFM	163	RBFM
10	10D function	66	RBFM	201	RBFM
16	16D function	153	RBFM	513	RBFM

หมายเหตุ: ตัวแบบที่ถูกเน้นเป็นตัวหนาแสดงถึงตัวแบบที่มีค่า RMSE เฉลี่ยน้อยที่สุด

ตาราง 21 แสดงตัวแบบที่เหมาะสมสำหรับแต่ละมิติปัญหาแยกตามปัญหาทดสอบ พิจารณาจากค่า RMSE เฉลี่ย ค่า PI และผลการทดสอบความแตกต่างอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติของค่า RMSE เฉลี่ย ด้วยการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of variance: ANOVA) และการทดสอบไม่อิงพารามิเตอร์ (Nonparametric test) เมื่อข้อมูลไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้น จากนั้นทำการเปรียบเทียบเชิงซ้อน โดยใช้ระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 พบว่า สำหรับปัญหาทดสอบ 2 มิติ (d = 2) กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก (n = 6) ตัวแบบ RBFG มีความสามารถในการพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำมากที่สุด กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ (n = 9) ของปัญหา Branin function และ Welch function ที่มีความซับซ้อนมาก ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด สำหรับปัญหา 2D function ที่มีความซับซ้อนน้อย ตัวแบบ RBFG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด เมื่อพิจารณาผลการเปรียบเทียบเชิงซ้อน พบว่า ตัวแบบ RBFG KRG และ RBFM มีความเหมาะสมสำหรับปัญหาทดสอบ 2 มิติ

เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 3 และ 4 มิติ ได้แก่ ปัญหา 3D function และ Pressure vessel function พบว่า สำหรับกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุด กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ ตัวแบบ ANN และตัวแบบ KRG มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุดสำหรับปัญหาทดสอบ 3 และ 4 มิติ ตามลำดับ จากผลการเปรียบเทียบเชิงซ้อน จะเห็นได้ว่า ตัวแบบ KRG และตัวแบบ ANN มีความเหมาะสมกับปัญหาทดสอบ 3 และ 4 มิติ โดยตัวแบบ RBFG มีความเหมาะสมกับปัญหาทดสอบ 3 มิติเช่นเดียวกัน

เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 5 และ 6 มิติ ได้แก่ ปัญหา 5D function และ Trid 6 function พบว่า กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ตัวแบบ KRG และตัวแบบ RBFM สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำมากที่สุดสำหรับปัญหาทดสอบ 5 และ 6 มิติ ตามลำดับ สำหรับกรณีจุดทดลองขนาดใหญ่ ตัวแบบ KRG มีความสามารถในการพยากรณ์มากที่สุด เมื่อพิจารณาผลการเปรียบเทียบเชิงซ้อน พบว่า ตัวแบบ KRG และ RBFG มีความเหมาะสมกับปัญหาทดสอบ 5 มิติ สำหรับตัวแบบที่เหมาะสมกับปัญหาทดสอบ 6 มิติ คือ ตัวแบบ KRG และ RBFM

สำหรับปัญหาทดสอบ 7 และ 8 มิติ ได้แก่ ปัญหา Cyclone model และ Borehole function พบว่า ตัวแบบ KRG สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำมากที่สุด ทั้งในกรณีจุดทดลองขนาดเล็กและขนาดใหญ่ เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 7 มิติ กรณีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ พบว่า ตัวแบบ ANN มีความแม่นยำในการพยากรณ์มากที่สุดเช่นเดียวกับตัวแบบ KRG จากผลการเปรียบเทียบเชิงซ้อน จะได้ว่า ตัวแบบ KRG และ ANN สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้เท่าเทียมกันและเหมาะสมกับปัญหาทดสอบ 7 และ 8 มิติ

เมื่อพิจารณากรณีปัญหาทดสอบที่มีมิติขนาดใหญ่ ได้แก่ ปัญหา 9D function 10D function และ 16D function ทั้งในกรณีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็กและขนาดใหญ่ พบว่า ตัวแบบที่มีความเหมาะสมและสามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำมากที่สุด ได้แก่ ตัวแบบ RBFM

บทที่ 5

บทสรุป

การศึกษาเรื่องการเปรียบเทียบตัวแบบทางสถิติเพื่อพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ครั้งนี้ มีจุดมุ่งหมายเพื่อเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติ 3 ตัวแบบ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี ที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียนและ Multiquadric และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม สำหรับผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ โดยกำหนดมิติปัญหาที่มีขนาด 2 ถึง 10 และ 16 มิติ ซึ่งแต่ละมิติปัญหากำหนดจำนวนจุดทดลองออกเป็นจำนวนจุดทดลองขนาดเล็กและขนาดใหญ่ เพื่อสร้างแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ที่เหมาะสม จำนวน 10 แผนการทดลองด้วยวิธีการสืบค้นแบบ SA ควบคู่กับเกณฑ์ ϕ_p การเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติ ใช้เกณฑ์รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE) ร่วมกับเกณฑ์ร้อยละของประสิทธิภาพที่เหนือกว่าตัวแบบ Kriging (PI) พร้อมทั้งพิจารณาความแตกต่างของตัวแบบทางสถิติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เพื่อหาตัวแบบทางสถิติที่สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำและเหมาะสมสำหรับแต่ละมิติปัญหา

สรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยภายใต้ขอบเขตของการวิจัยครั้งนี้ พบว่า จำนวนจุดทดลอง (n) ของแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ มีผลต่อการพยากรณ์ผลตอบสนองของตัวแบบทางสถิติทั้ง 3 ตัวแบบ นั่นคือ สำหรับแต่ละปัญหาทดสอบ ตัวแบบที่ได้จากแผนการทดลองที่มีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำมากกว่าตัวแบบที่ได้จากแผนการทดลองที่มีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่

จากผลการเปรียบเทียบความแม่นยำของตัวแบบทางสถิติสำหรับพยากรณ์ผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ พบว่า เมื่อมิติปัญหามีขนาดเล็ก (d =2,3,4) ตัวแบบทางสถิติที่สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำและเหมาะสม สำหรับทั้งกรณีจุดทดลองขนาดเล็กและขนาดใหญ่ ได้แก่ ตัวแบบ Kriging เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 2 มิติ พบว่า ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีสามารถพยากรณ์ได้แม่นยำไม่แตกต่างกับตัวแบบ Kriging เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 3 และ 4 มิติ ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมสามารถพยากรณ์ได้แม่นยำไม่แตกต่างกับตัวแบบ Kriging อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ เมื่อมิติปัญหามีขนาดกลาง (d = 5, 6, 7, 8) ตัวแบบ Kriging สามารถ

พยากรณ์ผลตอบสนองได้อย่างแม่นยำ และแตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญทางสถิติกับตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี สำหรับปัญหาทดสอบ 5 และ 6 มิติ เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 7 และ 8 มิติ พบว่า ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมสามารถพยากรณ์ได้แม่นยำเทียบเท่ากับตัวแบบ Kriging เมื่อมิติปัญหามีขนาดใหญ่ (d =9,10,16) ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric สามารถพยากรณ์ได้แม่นยำที่สุด ทำให้ได้ว่า ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีและตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม สามารถเป็นทางเลือกที่ดีสำหรับการสร้างตัวแบบทางสถิติของผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์

อภิปรายผล

เนื่องจากผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ (CSE) มีรูปแบบเชิงกำหนด ดังนั้น แผนการทดลองที่มีคุณสมบัติเติมเต็มปริภูมิ ได้แก่ แผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ จึงมีความเหมาะสมสำหรับการคัดเลือกตัวแทนของค่าตัวแปรอิสระหรือจุดทดลองให้กระจายครอบคลุมบริเวณที่สนใจศึกษา เพื่อนำไปสร้างตัวแบบทางสถิติที่มีความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองของจุดทดสอบ จากผลการศึกษา พบว่า แต่ละปัญหาทดสอบ ตัวแบบทางสถิติทั้ง 3 ตัวแบบที่สร้างจากแผนการทดลองที่มีจำนวนจุดทดลองขนาดใหญ่ มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงกว่าตัวแบบเดียวกันที่สร้างจากแผนการทดลองที่มีจำนวนจุดทดลองขนาดเล็ก ซึ่งสอดคล้องกับ ผลการศึกษาของ Lin, Chen, & Simpson (2001; Mullur, & Messac, 2006) ที่พบว่า จำนวนจุดทดลองที่มากขึ้นของแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์มีผลต่อความแม่นยำในการพยากรณ์ตัวแบบ Kriging และตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่สูงขึ้นด้วย เนื่องจากมีคุณสมบัติในการประมาณค่าแบบช่วง (Interpolation) นั่นคือ สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้แม่นยำเมื่อจุดทดสอบอยู่ใกล้จุดทดลอง สำหรับตัวแบบโครงข่ายประสามเทียม จำนวนจุดทดลองที่มากขึ้น หมายถึง ข้อมูลที่มากขึ้น ซึ่งส่งผลต่อการเรียนรู้รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระและผลตอบสนองของตัวแบบ ทำให้ตัวแบบมีประสิทธิภาพในการพยากรณ์เพิ่มขึ้น

ตัวแบบ Kriging เป็นตัวแบบที่นิยมใช้ควบคู่กับแผนการทดลองแบบละตินไฮเปอร์คิวบ์ แต่บางครั้งการประมาณค่าพารามิเตอร์มีความซับซ้อนและใช้เวลานาน จึงมีการนำตัวแบบอื่นๆ มาประยุกต์ใช้ในงานด้าน CSE จากผลการวิจัยภายใต้ขอบเขตของการศึกษา สำหรับปัญหาทดสอบ 2 ถึง 8 มิติ ตัวแบบ Kriging สามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้อย่างแม่นยำ เนื่องจากมีคุณสมบัติในการประมาณค่าแบบช่วง เมื่อพิจารณาปัญหาทดสอบ 2 มิติ 5 มิติ และ 6 มิติ ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีสามารถพยากรณ์ได้แม่นยำไม่แตกต่างกับตัวแบบ Kriging สอดคล้องกับงานวิจัยของ Mullur, & Messac (2006; Yosboonruang, Na-udom, & Rungrattanaubol, 2013) ซึ่งผล

การศึกษา พบว่า ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงเท่าเทียมกันในปัญหาทดสอบ 2 มิติ และจากการศึกษาของนพดล ยศบุญเรือง (2554) ที่พบว่าตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบ Kriging มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงเท่าเทียมกันในปัญหาทดสอบ 5 และ 6 มิติ สำหรับปัญหาทดสอบ 3 และ 4 มิติ ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมสามารถพยากรณ์ได้แตกต่างอย่างไม่มีนัยสำคัญกับตัวแบบ Kriging สอดคล้องกับงานวิจัยของ Vicario, Craparotta, & Pistone (2016) ที่ศึกษาปัญหาทดสอบ 4 มิติ และพบว่าตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมสามารถพยากรณ์ได้เทียบเท่ากับตัวแบบ Kriging

ปัญหาทดสอบ 7 มิติ (Cyclone model) และ 8 มิติ (Borehole function) มักถูกนำมาใช้เป็นปัญหาทดสอบในงานด้าน CSE ปัญหาดังกว่าเป็นปัญหาจากสถานการณ์จริงและมีความซับซ้อนมาก จากผลการศึกษาที่พบว่า ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมมีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงกว่าหรือเทียบเท่ากับตัวแบบ Kriging สอดคล้องกับงานวิจัยของ Na-udom, & Rungrattanaubol (2013) ที่พบว่า ตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมมีความแม่นยำในการพยากรณ์ผลตอบสนองสูงกว่าตัวแบบ Kriging สำหรับปัญหา Cyclone model ชี้ให้เห็นว่าตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม มีความเหมาะสมและสามารถทำงานได้ดีในงานด้าน CSE เมื่อปัญหามีความซับซ้อนมาก

สำหรับปัญหาทดสอบ 9 ถึง 16 มิติ พบว่า ตัวแบบ RBF ที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric มีความสามารถในการพยากรณ์ได้แม่นยำมากที่สุด และแตกต่างจากตัวแบบอื่นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ สอดคล้องกับการศึกษาของนพดล ยศบุญเรือง (2554) ซึ่งพบว่าตัวแบบ RBF ที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric มีความแม่นยำในการพยากรณ์สูงในปัญหาทดสอบ 9 และ 10 ซึ่งอาจเนื่องมาจากคุณสมบัติของตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี รูปแบบฟังก์ชันฐานหลัก จำนวนจุดทดลอง จำนวนจุดทดสอบ และความสัมพันธ์ของตัวแปรอิสระกับผลตอบสนองของปัญหาทดสอบที่เหมาะสมกับฟังก์ชันฐานหลักแบบ Multiquadric

ข้อเสนอแนะ

1. จากการวิจัยพบว่า ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียมสามารถพยากรณ์ผลตอบสนองได้อย่างแม่นยำ และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างตัวแบบทางสถิติของผลตอบสนองจากการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์แทนตัวแบบ Kriging ที่มีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ใช้เวลานานได้

2. เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบของฟังก์ชันฐานหลัก ขั้นตอนวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ สำหรับตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และการพัฒนาขั้นตอนการปรับค่าพารามิเตอร์ให้เหมาะสมสำหรับการปรับปรุงความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

3. เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาเปรียบเทียบความแม่นยำของตัวแบบทางสถิติอื่นๆ สำหรับงานด้านการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์ เช่น ตัวแบบระบบอนุมานฟัซซี่โครงข่ายปรับตัวได้ (Adaptive neuro-fuzzy inference system: ANFIS) เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

ธัญดล จันทรวงศ์. (2553). *การเพิ่มประสิทธิภาพอัลกอริทึมการสืบค้นแบบสโตแคสติกเชิงวิวัฒน์สำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์* (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

นพดล ยศบุญเรือง. (2554). *การเปรียบเทียบความแม่นยำในการพยากรณ์ของตัวแบบทางสถิติสำหรับการจำลองการทดลองด้วยคอมพิวเตอร์* (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต). พิษณุโลก: มหาวิทยาลัยนเรศวร.

Astray, G., Gullon, B., Labidi, J., & Gullon, P. (2016). Comparison between developed models using response surface methodology (RSM) and artificial neural networks (ANNs) with the purpose to optimize oligosaccharide mixture production from sugar beet pulp. *Industrial Crops and Products, 92*, 290-299.

Box, G.E.P., Hunter, W.G., & Hunter, J.S. (2005). *Statistics for experimenters: design, innovation, and discovery* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Buhmann, M.D. (2004). *Radial basis function: Theory and implementations.* United Kingdom: Cambridge University.

Carlson, R.E., & Foley, T.A. (1991). The parameter R^2 in multiquadric interpolation. Computers Math. *Applic, 21*, 29-42.

Cressie, Noel, A.C. (1993). *Statistics for spatial data.* USA: John Wiley & Sons.

Cheong, Y.P. (2005). *Experimental design and analysis methods in reservoir uncertainty studies* (Doctoral dissertation). Australia: University of Technology.

Fang, H., & Horstemeyer, M.F. (2006). Global response approximation with radial basis functions. *Engineering Optimiztion, 38*(4), 407-424.

Fang, K.T., Li, R., & Sudjianto, A. (2006). *Design and modeling for computer experiments.* London: Chapman & Hall/CRC.

Hardy, R.L. (1971). Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research, 76*(8), 1905-1915.

Hock, W., & Schittkowski, K. (1981). *Test examples for nonlinear programming codes.* New York: Springer, Berlin Heidelberg.

Hussian, M.F., Barton, R.R., & Joshi, S.B. (2002). Metamodeling: Radial basis functions, versus polynomials. *European Journal of Opertion Research, 138*, 142-154.

Jamil, M., & Yang, X.S. (2013). A literature survey of benchmark functions for global optimization problems, Int. *Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation, 4*, 150–194.

Jin, R., Chen, W., & Simpson, T.W. (2001). Comparative studies of metamodelling techniques under multiple modelling criteria. *Struct Multidisc Optim, 23*, 1-13.

Jin, R., Chen, W., & Sudjianto, A. (2002). On sequential sampling for global metamodeling in engineering design. In *Proceedings of DETC'02 ASME 2002: Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (pp. 1-10). Canada: ASME.

Kirkpatrick, S. Gelatt, C.D., & Vecchi, M.P. (1983). Optimization by Simulated Annealing. *Science, 220*, 621-630.

Larous, D.T. (2005). *Discovering knowledge in data: An introduction to data mining.* New York: John Wileys & Sons.

Martin, J.D., & Simpson, T.W. (2003). A study on the use of kriging models to Approximate deterministic computer models. In *Proceedings of DETC'03 ASME 2003: Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (pp. 1-10). Canada: ASME.

Matheron, G. (1963). Principles of geostatistics. *Econm. Geol, 58*, 1246-1266.

Mckay, M.D., Beckman, R.J., & Conover, W.J. (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics, 21*, 239-246.

Morris, M.D., & Mitchell, T.J. (1995). Exploratory design for computational experiments. *Journal of Statistical Planning and Inference, 43*, 381-402.

Muller, A.A., & Messac, A. (2006). Metamodeling using extended radial basis functions: a comparative approach. *Engineering with Computers, 21*, 203-217.

Na-udom, A. (2007). *Experimental design methodology for modeling response from computer simulated experiments* (Doctoral dissertation). Australia: Curtin University of Technology.

Na-udom, A. (2008). Review of design and analysis of computer simulated experiments. *KhonKaen University Science Journal, 36*(2), 106-120.

Na-udom, A., & Rungrattanaubol, J. (2008). Optimization of correlation parameter for kriging approximation model. *International Joint Conference on Computer Science and Software Engineering, 1*, 159-164.

Na-udom, A., & Rungrattanaubol, J. (2013). A Comparison of artificial neural network and kriging model for predicting the deterministic output response. *NU Science Journal, 10*(1), 1-9.

Palmer, K., & Tsui, K.L. (2001). A minimum bias Latin hypercube design. *IIE Transactions, 33*, 793-808.

Rippa, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advance in Computational Mathematics, 11*, 193-210.

Sacks, J., Welch, W.J., Mitchell, T.J., & Wynn, H.P. (1989). Design and analysis of computer experiments. *Statistical Science, 4*(4), 409-435.

Simpson, T.W. (1998). *A concept exploration method for product family design* (Doctoral dissertation). Georgia: Georgia Institute of Technology.

Simpson, T.W., Lin, D.K.J., & Chen, W. (2001). Sampling strategies for computer experiments: Design and analysis. *International Journal of Reliability and applications, 2*(3), 209-240.

Thamma, T., Rungrattanaubol, J., & Na-udom, A. (2008). Modification on search algorithm for computer simulated experiment. In *Proceedings of the National Operations Research Network Conference* (pp. 117-123). Bangkok: n.p.

Tosun, E., Aydin, K., & Belgil M. (2016). Comparison of linear regression and artificial neural network model of a diesel engine fueled with biodiesel-alcohol mixtures. *Alexandria Engineering Journal, 55*, 3081-3089.

Vicario, G., Craparotta, G., & Pistone, G. (2016). Meta-models in Computer Experiments: Kriging versus Artificial Neural Networks. *Quality and Reliablity Engineering International, 32*, 2055-2065.

Welch, W.J., Buck, R.J., Sacks, J., Wynn, H.P., Mitchell, T.J., & Morris, M.D. (1992). Screening, predicting, and computer experiments. *Technometrics, 34*(1), 15-25.

Ye, K.Q., Li, W., & Sudjianto, A. (2000). Algorithm construction of optimal symmetric Latin hypercube designs. *Journal of Statistical Planning and Inference, 90*, 145-159.

Yosboonruang, N., Na-udom, A., & Rungrattanaubol, J. (2013). A comparative study on Predicting accuracy of statistical models for modeling deterministic output responses. *Thailand Statistician, 11*(1), 1-15.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก ค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ Kriging ตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมี และตัวแบบโครงข่ายประสาทเทียม

ตาราง 22 แสดงค่าพารามิเตอร์ θ ที่เหมาะสมของตัวแบบ Kriging ในแต่ละแผนการทดลอง

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	6	1	1.5016360	1.0727000	1.9999520	1.5016360	0.5963483	1.5016360	1.0727000	1.9999520	0.5881823	0.5881823
(Branin function)		2	1.9999520	1.9999530	1.9999520	1.9999520	1.9999517	1.9999520	1.9999530	1.9999520	1.9999517	1.9999517
2	9	1	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520
(Branin function)		2	1.6189260	1.6189260	1.6189260	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.6189260	1.6189260
2	6	1	1.9999640	1.9999520	1.9999520	1.9999640	1.9999480	1.9999640	1.9999520	1.9999520	1.9999390	1.9999390
(Welch function)		2	1.9999520	1.0244190	0.8757600	1.9999640	1.9999480	1.9999520	1.0244190	0.7698580	1.9355680	1.9355680
2	9	1	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520
(Welch function)		2	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.8897100	1.8897100	1.8897100	1.8897100	1.8897100	1.9999520	1.9999520
2	6	1	1.9999480	1.9999650	1.9999400	1.9999480	1.9999520	1.9999480	1.9999650	1.9999340	1.9999520	1.9999520
(2D function)		2	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9995200	1.9999580	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999520
2	9	1	0.7635282	0.7635282	0.7635282	1.9999661	1.9999661	1.9999661	1.9999661	1.9999661	0.7635282	0.7635282
(2D function)		2	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.9386807	0.9308607	0.9386807	0.9386807	0.9386807	1.9999517	1.9999517
3	10	1	0.0110943	0.0012564	0.0315919	0.0011609	0.2099638	0.0065870	0.2099638	0.0016652	0.0065870	0.0064963
		2	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999586	1.9999561	1.8468634	1.9999561	1.9999517	1.8468634	1.8896183
		3	1.9999616	1.3078094	1.9999517	1.9999617	1.6843414	1.2581147	1.6843414	1.9999588	1.2581147	1.2575434

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	19	1	1.3814510	1.2442790	1.9999500	1.3017160	1.9999520	0.5715801	0.8100787	0.6085876	1.2308000	0.0022163
		2	1.4165950	1.9999520	1.9999520	1.7110890	1.9999520	1.9999517	1.9999535	1.9999520	1.9999520	1.9999517
		3	1.8485810	1.9999640	1.9999520	1.9999520	1.9999520	1.9999517	1.9999525	1.9999517	1.9999520	1.9999517
4	15	1	0.5683927	0.4614503	0.4094427	0.3248742	0.3881004	0.2709325	0.4260369	0.3498491	0.3700101	0.324256
		2	0.0829304	0.2057719	0.0728209	0.0548844	0.0933233	0.0364837	0.0657739	0.0731063	0.1010487	0.0667162
		3	0.0078419	0.0153871	0.0300295	0.0182429	0.0257921	0.0204875	0.0120772	0.0155312	0.0215363	0.0172766
		4	0.0949166	0.0447612	0.0235281	0.0231870	0.0421601	0.0131571	0.0420589	0.0207550	0.0259702	0.0292819
4	33	1	0.1891270	0.2230617	0.2013174	0.1994173	0.1964436	0.1962187	0.2126996	0.1994717	0.1827785	0.2059989
		2	0.0090662	0.0153450	0.0181976	0.0103844	0.0049436	0.0107799	0.0153521	0.0084644	0.0099567	0.0134981
		3	0.0071231	0.0052491	0.0055924	0.0049436	0.0049436	0.0062112	0.0059687	0.0049776	0.0075518	0.0050085
		4	0.0032686	0.0036442	0.0038897	0.0028159	0.0028159	0.0031089	0.0023725	0.0023725	0.0035953	0.0030416
5	21	1	0.0000484	0.0362362	0.0000484	0.0519312	0.0004405	0.0246992	0.0576490	0.0006408	0.0000397	0.0032250
		2	0.0766451	0.0089092	0.0013564	0.0304672	0.0364462	0.1745992	0.0064986	0.0001806	0.0248517	0.0000484
		3	0.4786623	0.9436553	0.7149309	0.7149309	0.8108746	0.7473531	1.0182743	0.2139914	0.8601614	0.9417021
		4	0.8203246	1.4550698	1.9999457	1.9999517	1.9999517	1.4503095	1.3808381	1.2609272	1.3271747	0.8701447
		5	0.6661500	0.9166636	1.8947508	0.4715959	0.7286795	1.4246365	1.5125154	0.5395498	0.6934064	0.5295942
5	51	1	0.6572006	0.0000484	1.9999469	0.0225115	1.9999517	0.1559082	0.0000484	1.9999507	0.5127913	0.9053501

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		2	1.6832689	0.0006356	1.9999517	0.0005267	0.9739433	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.5246981
		3	1.1446585	0.9996661	0.6475324	0.4419210	0.8997343	1.0724882	0.8347542	1.0959315	0.8143244	0.8384751
		4	1.9999517	1.9999517	1.9999523	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999664	1.9999661	1.9999594
		5	0.9661786	1.5123943	0.8413899	1.9999517	0.9868735	1.1310250	1.9999517	1.3226588	1.1743874	0.6812151
6	28	1	0.8257333	1.5078402	0.5443500	1.7313193	1.9999522	0.9227119	1.9999661	1.0202461	0.8253004	0.5634087
		2	1.9999517	1.9999517	1.8849583	1.9999517	1.9999639	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999559	1.9999517
		3	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999641	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999641
		4	1.9999597	1.7197191	1.9999576	1.9999517	1.9999637	1.9999517	1.9999616	1.9999647	1.9999517	1.9999517
		5	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9027027	1.9999551	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		6	1.6884359	1.1773491	0.5303813	1.0802399	0.7446738	1.3964169	1.3074266	1.0051876	0.8398641	0.5192971
6	73	1	0.0249988	0.0244156	0.0261969	0.0225058	0.0234218	0.0215996	0.0214360	0.0252777	0.0243182	0.0244691
		2	0.0256201	0.0296967	0.0246931	0.0274195	0.0290105	0.0267862	0.0251193	0.0250666	0.0262719	0.0266574
		3	0.0264937	0.0259256	0.0269868	0.0275916	0.0253718	0.0248450	0.0266907	0.0248450	0.0253230	0.0258495
		4	0.0262112	0.0246342	0.0263710	0.0243934	0.0268623	0.0278328	0.0257799	0.0253937	0.0295539	0.0262779
		5	0.0266662	0.0252402	0.0261614	0.0282938	0.0248450	0.0283498	0.0267147	0.0285173	0.0252261	0.0248573
		6	0.0247237	0.0225868	0.0233787	0.0225960	0.0230714	0.0224670	0.0236795	0.0237854	0.0234240	0.0254136

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	36	1	0.0303162	0.0334287	0.0483876	0.0629321	0.0301613	0.0663694	0.0383553	0.0498413	0.0399585	0.0558648
		2	0.0396999	0.0376628	0.0468507	0.0526225	0.0312333	0.0465900	0.0378642	0.0462910	0.0491021	0.0471895
		3	0.0109746	0.0117565	0.0150219	0.0154691	0.0101739	0.0173425	0.0141160	0.0187549	0.0196761	0.0134863
		4	0.0014329	0.0022780	0.0025501	0.0028527	0.0019878	0.0029855	0.0032347	0.0026035	0.0024896	0.0028771
		5	0.0236496	0.0249415	0.0272411	0.0270595	0.0201595	0.0282346	0.0237002	0.0305721	0.0290534	0.0288103
		6	0.0071774	0.0113838	0.0136635	0.0065365	0.0087954	0.0052135	0.0093035	0.0082794	0.0106087	0.0137033
		7	0.0065656	0.0095839	0.0119890	0.0052509	0.0083587	0.0083693	0.0057051	0.0117606	0.0084951	0.0114330
7	99	1	0.1259602	0.0888718	0.1106630	0.0820360	0.0959605	0.1174229	0.1109727	0.1243760	0.0949685	0.1080307
		2	0.0999273	0.0692971	0.1094077	0.1064520	0.1030604	0.0764601	0.1060057	0.0699855	0.0923356	0.0917018
		3	0.0636822	0.0682967	0.0583503	0.0613569	0.0755421	0.091592	0.0906481	0.0617629	0.0788448	0.0704009
		4	0.0610536	0.0612088	0.0670058	0.0659591	0.0668319	0.0580583	0.0681497	0.0602564	0.0867768	0.0680466
		5	0.0636445	0.0679654	0.0727225	0.0635991	0.0563668	0.0642387	0.0619978	0.0810816	0.0480431	0.0595216
		6	0.0376544	0.0636922	0.0488203	0.0469322	0.0544442	0.0494023	0.0264098	0.0501957	0.0476695	0.0392567
		7	0.0520566	0.0591799	0.0373114	0.0626241	0.0438387	0.0400624	0.0494760	0.0494322	0.0442022	0.0596827
8	45	1	0.4971048	0.6092747	0.519144	0.6534711	0.602756	0.623471	0.5967259	0.6166009	0.4213366	0.4691071
		2	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484
		3	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484

ตาราง 22 (ต่อ)

d	*n*	*d*	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		4	0.0426677	0.0911661	0.0336015	0.0330395	0.0312417	0.0297751	0.0586374	0.0192422	0.0265201	0.0228191
		5	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484
		6	0.0451519	0.0435837	0.0281406	0.0419257	0.0411645	0.0257291	0.0591036	0.0239844	0.0455358	0.0280952
		7	0.0781917	0.0759418	0.0646961	0.0784507	0.0842430	0.0896773	0.0724284	0.0855636	0.0867928	0.0671569
		8	0.0086363	0.0196506	0.0198523	0.0184900	0.0228709	0.0095971	0.0203574	0.0144298	0.0178942	0.0134672
8	129	1	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		2	0.0000484	0.0071763	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484
		3	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484
		4	0.3301019	0.1379185	0.2464566	0.4528605	0.1175055	0.3666983	0.3925938	0.1108262	0.1102686	0.4530744
		5	0.0000817	0.0000484	0.0011519	0.0000817	0.001164	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484	0.0000484
		6	0.1307395	0.1267333	0.1325455	0.1014710	0.2490914	0.1158799	0.1094396	0.3367410	0.4065643	0.1071084
		7	1.9652781	1.9999517	1.9999517	1.8270113	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		8	0.0541330	0.0626845	0.0500655	0.0586883	0.0625307	0.0543176	0.0529750	0.0590147	0.0522212	0.0428440
9	55	1	0.1273794	0.1076811	0.0000484	1.9999654	1.9999517	1.9999434	1.9999517	0.0233277	0.2146798	0.2358460
		2	1.9999523	1.9999517	0.1299294	1.9999571	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.4121778	1.9999664	0.2585791
		3	0.0000484	1.9999517	1.9999563	1.9999517	1.9999517	0.5038716	1.9999590	1.9999541	0.6290038	0.4774684
		4	0.1513545	1.9999517	0.5452825	1.9999517	0.3435717	1.9999517	1.9999517	0.5901194	1.9999517	1.9999534

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		5	1.9999517	1.9556222	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1690630	1.9999517	1.9999517
		6	1.9999517	1.9999517	1.9999549	1.9999517	1.9999517	0.0000364	1.9999517	0.7494971	1.9999517	0.3560019
		7	1.9999517	1.9999517	0.3562223	0.9224208	1.9999517	0.6197514	1.9999517	1.9999517	0.1112763	0.5935844
		8	1.9999517	0.0000484	1.9999517	0.0000484	1.9999517	0.7243491	1.9999517	1.2013700	1.9999517	1.9999552
		9	1.9999651	1.0586502	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.2270231	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
9	163	1	0.1643619	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1272817	0.1957091	1.9999517	1.9999517	0.5005477
		2	1.9999517	1.9999517	0.6315610	1.9999517	0.3621812	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		3	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1941526	0.3598005	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		4	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.7661201	0.0677597	1.5504553	1.9999517	1.9999517	0.5005477
		5	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.4654210	1.9999517	1.7526556	0.3167556	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		6	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.1408040	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		7	0.0728155	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1173161	0.3558532	1.9999517	0.4275419	0.3082736
		8	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.0687177	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		9	0.1192486	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.3617994	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
10	66	1	0.0979617	1.9999517	1.9999517	1.9107200	0.0000484	1.9999517	0.2238613	0.1341508	1.9999517	0.5041828
		2	0.3313906	1.9999517	0.0465043	0.9578929	1.2101314	1.7143342	1.9999517	0.3981819	1.9999517	1.9999517
		3	0.0368405	0.0000484	0.1382329	0.4254505	0.1009931	1.9999517	1.9999601	0.1770407	0.2076382	0.0000484

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		4	1.9999517	1.0243937	1.9999517	0.3333359	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.5898749	1.3643005
		5	1.9999517	1.9999517	0.4729414	0.1285323	0.4967175	0.1558241	1.9999517	0.0000484	1.9999517	1.9999517
		6	1.9999517	0.0000484	0.1741646	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.0000484	1.9999517	1.9999645	0.4409221
		7	0.0000484	1.6170453	0.2833610	0.0000484	0.6137595	1.9999517	1.9999517	0.0000484	0.357133	0.0000484
		8	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.4570801	4.838E-05	1.8244697
		9	1.4694266	1.9999517	1.9999517	0.2177487	1.9999517	1.9999650	1.9999517	0.9105746	0.8946969	1.9999517
		10	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.9030059	1.9999517	1.9999531	1.9999517	1.2695373	0.3496754
10	201	1	1.9999517	0.5781217	0.1266999	1.2282018	1.9999517	1.9999502	0.4380507	0.2364081	1.9999517	1.9999517
		2	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1361986	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		3	1.9999517	1.9999517	0.2057014	1.9999517	1.2099163	0.4054725	1.9999517	1.0149916	1.9999517	1.9999517
		4	0.2480049	1.9999517	1.9999517	1.3451751	1.9999517	1.9999517	0.2309774	0.6906886	1.9999517	1.9999517
		5	0.2253963	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		6	1.9999517	0.1338747	1.9999517	1.9999517	0.3061722	0.9046348	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.5652058
		7	0.8069951	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.5766719	1.9999517
		8	1.9999517	0.2763471	1.9999517	1.9999585	0.1808422	1.9999517	0.0665559	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		9	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.1649103	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517
		10	0.0973814	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	1.9999517	0.0231647	1.9999517	1.9999517	1.9999517

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	153	1	0.0383231	0.0308502	0.0652562	0.035594	0.0948041	0.0451389	0.0551766	0.0346337	0.0948255	0.0561250
		2	0.0187673	0.0357995	0.0281920	0.0335053	0.0296827	0.0231019	0.0279744	0.1393060	0.0418880	0.0321393
		3	0.0630519	0.0763810	0.0729674	0.0653293	0.0924741	0.0771789	0.0640401	0.0215706	0.0681629	0.0548710
		4	0.0785067	0.0264599	0.0619400	0.0442056	0.0583269	0.0640615	0.0743281	0.0823222	0.0470860	0.0471492
		5	0.0680997	0.0591749	0.0516259	0.0338508	0.0805587	0.0603417	0.0711587	0.0399495	0.0406482	0.0494255
		6	0.0414065	0.0550055	0.0230227	0.0700927	0.0703948	0.0478585	0.0473452	0.0601773	0.0211951	0.0335920
		7	0.1404814	0.2685886	0.1675609	0.0883363	0.0908055	0.0822995	0.0738516	0.0636290	0.0797571	0.0837593
		8	0.0311994	0.0678710	0.0530061	0.0415760	0.0256003	0.0586054	0.0635532	0.0282920	0.0490756	0.0485259
		9	0.046149	0.0370050	0.1001990	0.0302747	0.0364556	0.0258969	0.0504866	0.0259714	0.0474949	0.0338106
		10	0.1090829	0.0576768	0.0640810	0.0654118	0.0774245	0.0473900	0.0571338	0.0727507	0.0555833	0.0618478
		11	0.0677238	0.0167186	0.0346350	0.0480768	0.0626108	0.0603386	0.0395176	0.0276740	0.0225834	0.0426738
		12	0.0552340	0.0365735	0.0201470	0.0527910	0.0664750	0.0566989	0.0355425	0.0299630	0.0351199	0.0264417
		13	0.0475075	0.0268140	0.0395188	0.0408132	0.0389076	0.0189834	0.0434717	0.0139575	0.0221236	0.0435104
		14	0.0379719	0.0638507	0.0776627	0.0524982	0.0998473	0.0342812	0.0805283	0.2180306	0.0602266	0.0550621
		15	0.0481090	0.1529073	0.0226842	0.0285969	0.0323019	0.0419796	0.0291973	0.0458290	0.0426542	0.0370125
		16	0.0704411	0.0246665	0.0553494	0.0505477	0.0358176	0.0335193	0.0376293	0.0326159	0.0277240	0.0259086

ตาราง 22 (ต่อ)

d	n	d	แผนการทดลอง									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	513	1	0.5101290	0.5076813	0.4205518	0.4621677	0.4993050	0.4682158	0.4833061	0.4612374	0.433188	0.4622182
		2	0.4678264	0.4342976	0.4879188	0.4351663	0.4463848	0.4316737	0.4901279	0.4711814	0.4371546	0.4766347
		3	0.6117849	0.6839329	0.5550740	0.5080099	0.7244081	0.7234163	0.6429005	0.5172131	0.5258786	0.6842771
		4	0.5066698	0.4782150	0.4624654	0.4205519	0.5100957	0.4867503	0.4710529	0.5040543	0.4449690	0.4766670
		5	0.4611797	0.4631577	0.4057565	0.5158286	0.4374721	0.4621677	0.4887803	0.5235899	0.6917363	0.4954329
		6	0.5060763	0.4806380	0.4912814	0.4556254	0.4285251	0.4644236	0.4601131	0.4464686	0.4462042	0.4203713
		7	0.7096421	0.6860297	0.6650632	0.6706565	0.7061587	0.5562425	0.6791396	0.6899895	0.7074628	0.7242944
		8	0.5304096	0.4878895	0.6644938	0.4994351	0.4800274	0.6664740	0.5058624	0.4965090	0.5089250	0.5528084
		9	0.4785127	0.4842024	0.4687288	0.4630739	0.4418182	0.4616670	0.4729056	0.4268820	0.4429739	0.4303375
		10	0.5353685	0.5363424	0.5656023	0.6971002	0.5479565	0.5168186	0.5443317	0.4582669	0.5343806	0.4397941
		11	0.4717431	0.4602738	0.4755802	0.4857291	0.3972066	0.4870965	0.4138964	0.4449185	0.4462042	0.4202875
		12	0.3937623	0.4862019	0.4584005	0.4898151	0.4701096	0.4583289	0.4681595	0.4581988	0.4922865	0.4402240
		13	0.4661386	0.4711522	0.4911158	0.5383010	0.4602012	0.4549231	0.4721908	0.6308176	0.4629772	0.4702752
		14	0.3863705	0.4746545	0.4657441	0.4883972	0.4806380	0.4133891	0.4790728	0.4818913	0.4845101	0.5340344
		15	0.4708836	0.4437506	0.4449185	0.4495818	0.4955986	0.4376374	0.5070842	0.4490186	0.4718992	0.4960263
		16	0.4715992	0.4003978	0.4499627	0.4044473	0.4631142	0.4902429	0.3950485	0.4970143	0.4662142	0.4558747

ตาราง 23 แสดงค่าพารามิเตอร์ c ที่เหมาะสมของตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีที่มีฟังก์ชันฐานหลักแบบเกาส์เซียน (Guassian) และ Multiquadric ในแต่ละแผนการทดลอง

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
2	6	1	0.0037135	0.9999339
(Branin function)		2	0.0002960	0.9999339
		3	0.0123300	0.9999339
		4	0.0037135	0.9999339
		5	0.0000662	0.9999339
		6	0.0037135	0.9999339
		7	0.0002960	0.9999339
		8	0.0008255	0.6510270
		9	0.0154765	0.9999339
		10	0.0154765	0.9999339
2	9	1	0.0049007	0.9999339
(Branin function)		2	0.0049007	0.9999339
		3	0.0049007	0.9999339
		4	0.0046244	0.9999339
		5	0.0046244	0.9999339
		6	0.0046244	0.9999339
		7	0.0046244	0.9999339
		8	0.0046244	0.9999339
		9	0.0049007	0.9999339
		10	0.0049007	0.9999339
2	6	1	0.0081778	0.9999339
(Welch function)		2	0.0124950	0.9999339
		3	0.0114709	0.9999339
		4	0.0081778	0.9999339
		5	0.0000638	0.9999339
		6	0.0081778	0.9999339
		7	0.0124950	0.9999339
		8	0.0288626	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		9	0.0374137	0.9999339
		10	0.0374137	0.9999339
2	9	1	0.0241043	0.9999339
(Welch function)		2	0.0241042	0.9999339
		3	0.0241043	0.9999339
		4	0.0129115	0.9999339
		5	0.0128598	0.9999339
		6	0.0131321	0.9999339
		7	0.0128700	0.9999339
		8	0.0128638	0.9999339
		9	0.0241048	0.9999339
		10	0.0241043	0.9999339
2	6	1	0.0026398	0.9999339
(2D function)		2	0.0000662	0.9999339
		3	0.0042094	0.9999339
		4	0.0026398	0.9999339
		5	0.0000662	0.9999339
		6	0.0026398	0.9999339
		7	0.0000662	0.9999339
		8	0.0026920	0.9999339
		9	0.0048949	0.9999339
		10	0.0048949	0.9999339
2	9	1	0.0100655	0.9999339
(2D function)		2	0.0100655	0.9999339
		3	0.0100655	0.9999339
		4	0.0100655	0.9999339
		5	0.0100655	0.9999339
		6	0.0100655	0.9999339
		7	0.0100655	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		8	0.0100655	0.9999339
		9	0.0100655	0.9999339
		10	0.0100655	0.9999339
3	10	1	0.0001071	0.9999339
		2	0.0000662	0.9999339
		3	0.0000662	0.9999339
		4	0.0000662	0.9999339
		5	0.0000662	0.9999339
		6	0.0000662	0.9999339
		7	0.0000662	0.9999339
		8	0.0000662	0.9999339
		9	0.0000662	0.9999339
		10	0.0000662	0.9999339
3	19	1	0.0002661	0.9999339
		2	0.0002661	0.9999339
		3	0.0004800	0.9999339
		4	0.0003069	0.9999339
		5	0.0010021	0.9999339
		6	0.0002661	0.9999339
		7	0.0003730	0.9999339
		8	0.0002661	0.9999339
		9	0.0002661	0.9999339
		10	0.0002661	0.9999339
4	15	1	0.0002071	0.9999339
		2	0.0002071	0.9999339
		3	0.0002071	0.9999339
		4	0.0002071	0.9999339
		5	0.0002071	0.9999339
		6	0.0002071	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		7	0.0002071	0.9999339
		8	0.0002071	0.9999339
		9	0.0002071	0.9999339
		10	0.0002071	0.9999339
4	33	1	0.0010031	0.0000662
		2	0.0010031	0.0000662
		3	0.0010031	0.0000662
		4	0.0010031	0.0000662
		5	0.0010031	0.0000662
		6	0.0010031	0.0000662
		7	0.0010031	0.0000662
		8	0.0010031	0.0000662
		9	0.0010031	0.0000662
		10	0.0010031	0.0000662
5	21	1	0.0016028	0.9999339
		2	0.0016028	0.9999339
		3	0.0016028	0.9999339
		4	0.0016028	0.9999339
		5	0.0016028	0.9999339
		6	0.0016028	0.9999339
		7	0.0016028	0.9999339
		8	0.0016028	0.9999339
		9	0.0016028	0.9999339
		10	0.0016028	0.9999339
5	51	1	0.0026831	0.9999339
		2	0.0026831	0.9999339
		3	0.0026831	0.9999339
		4	0.0026831	0.9999339
		5	0.0026831	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		6	0.0026831	0.9999339
		7	0.0026831	0.9999339
		8	0.0026831	0.9999339
		9	0.0026831	0.9999339
		10	0.0026831	0.9999339
6	28	1	0.9999339	0.9999339
		2	0.9999339	0.9999339
		3	0.9999339	0.9999339
		4	0.9999339	0.9999339
		5	0.9999339	0.9999339
		6	0.9999339	0.9999339
		7	0.9999339	0.9999339
		8	0.9999339	0.9999339
		9	0.9999339	0.9999339
		10	0.9999339	0.9999339
6	73	1	0.0014647	0.9999339
		2	0.0014647	0.9999339
		3	0.0014647	0.9999339
		4	0.0014647	0.9999339
		5	0.0014647	0.9999339
		6	0.0014647	0.9999339
		7	0.0014647	0.9999339
		8	0.0014647	0.9999339
		9	0.0014647	0.9999339
		10	0.0014647	0.9999339
7	36	1	0.3934920	0.9999339
		2	0.3934920	0.9999339
		3	0.3934920	0.9999339
		4	0.3934920	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		5	0.3934920	0.9999339
		6	0.3934920	0.9999339
		7	0.3934920	0.9999339
		8	0.3934920	0.9999339
		9	0.3934920	0.9999339
		10	0.3934920	0.9999339
7	99	1	0.0668300	0.9999339
		2	0.0668300	0.9999339
		3	0.0668300	0.9999339
		4	0.0668300	0.9999339
		5	0.0668300	0.9999339
		6	0.0668300	0.9999339
		7	0.0668300	0.9999339
		8	0.0668300	0.9999339
		9	0.0668300	0.9999339
		10	0.0668300	0.9999339
8	45	1	0.1000595	0.9999339
		2	0.1000595	0.9999339
		3	0.1000595	0.9999339
		4	0.1000595	0.9999339
		5	0.1000595	0.9999339
		6	0.1000595	0.9999339
		7	0.1000595	0.9999339
		8	0.1000595	0.9999339
		9	0.1000595	0.9999339
		10	0.1000595	0.9999339
8	129	1	0.1000595	0.9999339
		2	0.1000595	0.9999339
		3	0.1000595	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		4	0.1000595	0.9999339
		5	0.1000595	0.9999339
		6	0.1000595	0.9999339
		7	0.1000595	0.9999339
		8	0.1000595	0.9999339
		9	0.1000595	0.9999339
		10	0.1000595	0.9999339
9	55	1	0.0286159	0.0000662
		2	0.0286159	0.0000662
		3	0.0286159	0.0000662
		4	0.0286159	0.0000662
		5	0.0286159	0.0000662
		6	0.0286159	0.0000662
		7	0.0286159	0.0000662
		8	0.0286159	0.0000662
		9	0.0286159	0.0000662
		10	0.0286159	0.0000662
9	163	1	0.0320684	0.0000662
		2	0.0320684	0.0000662
		3	0.0320684	0.0000662
		4	0.0320684	0.0000662
		5	0.0320684	0.0000662
		6	0.0320684	0.0000662
		7	0.0320684	0.0000662
		8	0.0320684	0.0000662
		9	0.0320684	0.0000662
		10	0.0320684	0.0000662
10	66	1	0.0264765	0.0000662
		2	0.0264765	0.0000662

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		3	0.0264765	0.0000662
		4	0.0264765	0.0000662
		5	0.0264765	0.0000662
		6	0.0264765	0.0000662
		7	0.0264765	0.0000662
		8	0.0264765	0.0000662
		9	0.0264765	0.0000662
		10	0.0264765	0.0000662
10	201	1	0.0275509	0.0000662
		2	0.0275509	0.0000662
		3	0.0275509	0.0000662
		4	0.0275509	0.0000662
		5	0.0275509	0.0000662
		6	0.0275509	0.0000662
		7	0.0275509	0.0000662
		8	0.0275509	0.0000662
		9	0.0275509	0.0000662
		10	0.0275509	0.0000662
16	153	1	0.0050347	0.9999339
		2	0.0050347	0.9999339
		3	0.0050347	0.9999339
		4	0.0050347	0.9999339
		5	0.0050347	0.9999339
		6	0.0050347	0.9999339
		7	0.0050347	0.9999339
		8	0.0050347	0.9999339
		9	0.0050347	0.9999339
		10	0.0050347	0.9999339
16	513	1	0.0050361	0.9999339

ตาราง 23 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	c	
			Guassian	Multiquadric
		2	0.0050403	0.9999339
		3	0.0050391	0.9999339
		4	0.0050426	0.9999339
		5	0.0050400	0.9999339
		6	0.0050405	0.9999339
		7	0.0050407	0.9999339
		8	0.0050419	0.9999339
		9	0.0050365	0.9999339
		10	0.0050399	0.9999339

ตาราง 24 แสดงค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบ ANN ของแต่ละปัญหาทดสอบ

ปัญหาทดสอบ	d	n	พารามิเตอร์				
			จำนวนชั้นซ่อน	จำนวนโหนด	จำนวนรอบ	อัตราการเรียนรู้	อัตราโมเมนตัม
Branin function	2	6	1	1	500	0.1	0.3
		9	1	1	1000	0.1	0.1
Welch function	2	6	1	1	500	0.1	0.1
		9	1	1	500	0.1	0.1
2D function	2	6	1	1	1000	0.1	0.3
		9	1	1	500	0.3	0.1
3D function	3	10	1	2	10000	0.3	0.1
		19	1	2	5000	0.3	0.1
Pressure vessel function	4	15	1	2	10000	0.1	0.1
		33	1	2	10000	0.1	0.1
5D function	5	21	1	3	500	0.1	0.2
		51	1	3	300	0.2	0.3
Trid 6 function	6	28	1	3	500	0.1	0.2
		73	1	4	1000	0.1	0.1

ตาราง 24 (ต่อ)

ปัญหาทดสอบ	d	n	พารามิเตอร์				
			จำนวนชั้นซ่อน	จำนวนโหนด	จำนวนรอบ	อัตราการเรียนรู้	อัตราโมเมนตัม
Cyclone model	7	36	1	5	5000	0.1	0.1
		99	1	4	10000	0.2	0.2
Borehole function	8	45	1	5	10000	0.1	0.3
		129	1	5	10000	0.2	0.3
9D function	9	55	1	3	100	0.1	0.1
		163	2	5,2	100	0.1	0.1
10D function	10	66	1	4	100	0.1	0.1
		201	1	3	100	0.1	0.1
16D function	16	153	2	9,4	1000	0.2	0.1
		513	2	9,4	1000	0.2	0.2

ภาคผนวก ข รากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (RMSE)

ตาราง 25 แสดงรากของค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวแบบทางสถิติจากแต่ละแผนการทดลอง

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
2	6	1	43.51807	41.52828	48.15825	61.48600
(Branin function)		2	44.45618	43.29765	47.44532	58.38800
		3	41.47179	41.98045	38.79819	62.13520
		4	43.51807	41.52828	48.15825	61.46980
		5	53.98408	52.71588	56.14124	63.87780
		6	43.51807	41.52828	48.15825	59.94670
		7	44.45618	43.29765	47.44532	60.07970
		8	57.58542	57.82479	54.72492	58.42170
		9	49.38138	46.62155	43.46387	59.68420
		10	49.38138	46.62155	43.46387	59.28990
2	9	1	40.80780	41.62614	43.91790	57.36910
(Branin function)		2	40.80780	41.62614	43.91790	56.89530
		3	40.80780	41.62614	43.91790	56.84930
		4	21.83793	21.71517	28.10921	58.59560
		5	21.83793	21.71517	28.10921	58.42410
		6	21.83793	21.71517	28.10921	58.29560
		7	21.83793	21.71517	28.10921	58.07340
		8	21.83793	21.71517	28.10921	58.13720
		9	40.80780	41.62614	43.91790	57.84040
		10	40.80780	41.62614	43.91790	57.46410

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
2	6	1	4.48290	3.47847	8.37285	8.60540
(Welch function)		2	6.02262	6.36790	6.73480	9.75670
		3	5.01003	4.88560	6.16423	8.57170
		4	4.48290	3.47847	8.37285	8.85100
		5	5.96972	4.57409	8.48104	9.02210
		6	4.48290	3.47847	8.37285	8.62920
		7	6.02262	6.36790	6.73480	9.80680
		8	5.57220	6.49955	6.17697	8.40410
		9	6.43864	6.28333	9.22902	9.26250
		10	6.43864	6.28333	9.22902	9.29450
2	9	1	3.38240	4.04330	5.03845	8.62380
(Welch function)		2	3.38240	4.04330	5.03845	8.59320
		3	3.38240	4.04330	5.03845	8.48030
		4	4.32599	4.37615	5.38616	8.29990
		5	4.32599	4.37620	5.38616	8.25260
		6	4.32599	4.37619	5.38616	8.37780
		7	4.32599	4.37619	5.38616	8.65170
		8	4.32599	4.37623	5.38616	8.31490
		9	3.38240	4.04330	5.03845	8.46150
		10	3.38240	4.04330	5.03845	8.87510
2	6	1	2.51622	1.16684	3.47640	6.17570
(2D function)		2	2.83964	1.03605	3.70970	6.93720
		3	2.34471	0.93465	3.75205	6.23750
		4	2.51622	1.16684	3.47640	6.23940
		5	2.64138	1.07138	3.59173	6.14250
		6	2.51622	1.16684	3.47640	6.22630
		7	2.83964	1.02847	3.7097	6.92890
		8	2.50295	0.90188	3.92649	7.49980
		9	2.61811	0.90370	3.93391	8.15880
		10	2.61811	0.90370	3.93391	8.20880

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
2	9	1	2.01312	1.01352	2.80691	8.13930
(2D function)		2	2.01312	1.01349	2.80691	6.13860
		3	2.01312	1.01349	2.80691	6.08200
		4	2.03555	1.08043	2.58210	8.32670
		5	2.03555	1.08042	2.58210	6.03870
		6	2.03555	1.08042	2.58210	6.37410
		7	2.03555	1.08043	2.58210	8.32370
		8	2.03555	1.08043	2.58210	8.77360
		9	2.01312	1.01348	2.80691	7.00060
		10	2.01312	1.01350	2.80691	6.47840
3	10	1	28364.93852	28693.19603	35043.85582	21775.83530
		2	27998.17477	23089.52540	34914.66883	38683.68030
		3	25170.89803	23523.52521	33474.26528	39797.99980
		4	32013.86643	21562.95030	36695.49298	24693.85230
		5	22849.40004	23018.11629	30700.32471	13634.30990
		6	24717.54319	18508.82751	33374.95812	41359.53090
		7	22849.40004	23017.70450	30700.32471	13630.94560
		8	31858.90602	21564.55294	36694.43302	41919.84510
		9	24717.54319	18508.66176	33374.95812	16776.67190
		10	24805.13715	18508.19947	33393.64223	43313.44490
3	19	1	23893.08280	20435.61411	26425.00765	11687.64850
		2	27215.88187	23084.38633	29526.39140	15605.61200
		3	27598.30208	22778.68856	29941.53234	19168.96520
		4	29420.94340	24801.42172	32708.13369	19548.48430
		5	26818.39811	23981.19654	28628.32547	43706.79090
		6	26327.87444	23211.67570	30835.42658	17768.79740
		7	28189.30331	24223.34388	30856.45100	17183.97300
		8	26898.05586	23566.48798	30534.32160	17338.57840
		9	24652.01720	22766.69277	27348.57534	46205.38570
		10	22816.64046	20390.85323	28705.05476	17437.52930

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
4	15	1	1554.16281	5687.09120	4368.013490	1111.32600
		2	954.09813	6872.80735	4913.98089	983.93790
		3	1005.29494	6594.80451	5114.68923	994.28250
		4	818.61079	6151.33486	5234.27559	1236.98780
		5	724.99327	12951.85683	5671.99347	1705.02750
		6	805.47968	5859.41900	5550.37179	1253.32240
		7	1167.77076	8152.73568	5730.93697	1339.27520
		8	835.36575	7156.39387	4925.61605	1266.73140
		9	828.50369	11344.84493	4808.58329	1179.95420
		10	747.68234	8609.29577	4996.47985	1248.63490
4	33	1	57.68428	9603.70697	4497.54728	1061.84750
		2	73.47008	16982.87495	4760.34167	1066.95640
		3	65.88418	30749.75356	4734.74781	1121.92570
		4	63.85520	8157.58736	4455.10269	1045.31830
		5	52.29509	10063.36476	4668.35837	1153.92070
		6	56.93819	9380.54251	4946.93338	1079.69500
		7	93.86331	8427.33680	4874.60747	1081.95800
		8	28.84751	6844.91577	4591.52599	1058.31390
		9	57.64737	9050.74656	4950.01150	1260.98600
		10	46.08155	15483.81374	4452.84242	1008.53500
5	21	1	996.68333	1009.74391	1558.13442	2486.07180
		2	1101.64224	1114.67811	1511.18087	2973.98240
		3	1044.37246	801.195325	1455.02370	1341.20050
		4	1089.63858	1220.71552	1548.71006	1663.45800
		5	1148.45516	1147.82601	1473.06723	1990.41490
		6	1093.61657	1257.20069	1471.07029	2019.07750
		7	1123.05919	1317.17618	1499.47425	1308.46870
		8	1169.89862	1347.17574	1458.68052	1258.97140
		9	1182.95292	1339.07290	1528.96084	1307.81810
		10	1073.79882	1319.36139	1437.87518	2011.49100

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
5	51	1	1114.67900	1006.50873	1208.83570	1960.10280
		2	351.98992	913.98459	1224.70300	921.73840
		3	1283.98559	976.57076	1255.27774	902.78600
		4	653.24757	1264.80579	1184.31504	2073.07050
		5	1099.08121	1070.09197	1115.27842	1324.20960
		6	1046.08323	959.77712	1202.23336	2513.22230
		7	1052.64470	1002.32528	1205.88847	1998.34600
		8	1158.27320	1148.72049	1180.73109	2179.32770
		9	1100.64167	1073.39162	1173.21401	1076.52180
		10	1095.39639	1057.81706	1156.83144	943.12360
6	28	1	1068.71670	1773.89375	938.17138	1024.73840
		2	1025.76644	1776.82906	894.90489	1324.72960
		3	1056.94511	2872.61023	946.09778	1244.50840
		4	1078.54370	2872.61023	944.43720	1251.97560
		5	1034.63580	1774.13863	920.63351	950.30500
		6	1021.46850	2872.61023	897.93002	1028.44390
		7	1057.15990	2872.61023	937.11821	1239.67880
		8	1020.69693	1775.73890	920.48601	1490.95570
		9	992.31867	2872.61023	916.84493	1187.21070
		10	1047.92132	2872.61023	912.34095	1243.93450
6	73	1	11.59955	2872.61023	798.6923	872.9045
		2	33.03516	1745.26007	795.46684	841.2264
		3	31.69454	1733.55554	755.57780	979.9179
		4	49.68285	1736.75718	758.46529	907.1705
		5	16.80532	2872.61023	740.57844	1287.7616
		6	45.88660	1762.61401	795.63246	881.5713
		7	9.86253	2872.61023	561.39659	840.4334
		8	37.36621	1733.75176	753.81697	975.9312
		9	21.06822	2872.61023	750.36014	822.5945
		10	28.48353	1737.78677	802.62465	906.8802

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
7	36	1	0.00383	0.07737	0.06935	0.00990
		2	0.00577	0.04640	0.07176	0.01030
		3	0.00499	0.04953	0.05203	0.00970
		4	0.00490	0.05212	0.06203	0.00950
		5	0.00447	0.06234	0.06727	0.00820
		6	0.00462	0.05470	0.05328	0.00810
		7	0.00415	0.07125	0.07170	0.00990
		8	0.00487	0.05993	0.06301	0.00740
		9	0.00446	0.06634	0.05710	0.00940
		10	0.00525	0.05021	0.06290	0.01020
7	99	1	0.00456	0.01053	0.05166	0.00400
		2	0.00433	0.01108	0.05569	0.00380
		3	0.00372	0.01055	0.05107	0.00400
		4	0.00415	0.01263	0.05392	0.00390
		5	0.00438	0.01371	0.05500	0.00420
		6	0.00457	0.01137	0.04839	0.00410
		7	0.00490	0.01286	0.05254	0.00390
		8	0.00403	0.01028	0.05175	0.00390
		9	0.00429	0.01609	0.06049	0.00500
		10	0.00400	0.00872	0.04763	0.00430
8	45	1	0.88999	4.68814	5.10100	1.33280
		2	1.07587	5.21031	5.30945	2.63490
		3	1.03717	4.45607	5.31313	3.05830
		4	0.92475	5.15641	5.67461	1.24290
		5	0.94057	5.06808	5.64692	1.82560
		6	1.02229	5.35546	6.25628	2.36330
		7	0.89880	5.24235	5.57660	1.41690
		8	1.07856	5.29140	5.53932	1.79190
		9	0.87980	5.51345	6.34289	2.19310
		10	0.74150	4.68887	5.23049	2.59700

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
8	129	1	0.75850	2.99818	3.09792	0.63790
		2	0.85465	3.15680	3.04952	0.68730
		3	0.66216	2.464918	3.34305	0.64160
		4	0.91259	2.99291	3.18153	0.80520
		5	0.81956	2.71474	3.54047	0.75770
		6	0.82440	3.36945	3.06790	0.68440
		7	1.04120	2.91426	3.15700	0.76510
		8	0.64656	2.89560	3.09436	0.64490
		9	0.80637	2.45616	3.30000	0.61420
		10	1.06878	3.00203	3.26708	0.86430
9	55	1	0.26964	0.35863	0.23557	0.24350
		2	0.28812	0.36493	0.23404	0.27780
		3	0.28819	0.32941	0.23578	0.24520
		4	0.27083	0.38947	0.23962	0.24870
		5	0.26798	0.40665	0.23790	0.24680
		6	0.27607	0.34108	0.24110	0.25810
		7	0.24217	0.37406	0.22914	0.24880
		8	0.28598	0.35467	0.24238	0.25280
		9	0.28524	0.31941	0.23135	0.24620
		10	0.27030	0.35000	0.23772	0.24940
9	163	1	0.24395	0.29490	0.22495	0.23410
		2	0.23113	0.29690	0.22276	0.23550
		3	0.24465	0.32573	0.22616	0.24710
		4	0.23606	0.28810	0.22359	0.24350
		5	0.24343	0.29884	0.22889	0.24300
		6	0.24342	0.32686	0.21919	0.24590
		7	0.25318	0.31184	0.21865	0.24400
		8	0.24141	0.31306	0.21765	0.23750
		9	0.23920	0.28707	0.22781	0.25200
		10	0.23937	0.27755	0.22709	0.24210

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
10	66	1	0.31064	0.38221	0.25675	0.27900
		2	0.29599	0.38168	0.24682	0.27110
		3	0.28487	0.37439	0.24248	0.26300
		4	0.28453	0.36584	0.24503	0.26300
		5	0.28656	0.35967	0.25260	0.26390
		6	0.28148	0.39111	0.25399	0.28050
		7	0.29216	0.37586	0.25869	0.28170
		8	0.31679	0.38574	0.24704	0.26710
		9	0.30006	0.41419	0.24919	0.28570
		10	0.31297	0.372697	0.24511	0.27510
10	201	1	0.26827	0.34197	0.23120	0.25090
		2	0.25381	0.31435	0.23906	0.26570
		3	0.24495	0.29207	0.23261	0.25660
		4	0.25414	0.32665	0.23594	0.26190
		5	0.25112	0.29602	0.23127	0.28700
		6	0.26045	0.34991	0.23076	0.25300
		7	0.24560	0.30116	0.23802	0.25990
		8	0.25551	0.32988	0.23820	0.26730
		9	0.25173	0.33125	0.23238	0.25350
		10	0.26281	0.31498	0.23626	0.25650
16	153	1	693.05250	1113.35213	580.11164	719.09050
		2	774.07937	1117.51300	558.25083	719.42870
		3	694.45181	1119.60045	582.71223	665.16370
		4	653.88012	1110.33877	548.97925	704.60080
		5	655.50536	1128.10537	557.65202	712.29320
		6	634.05385	1113.37016	560.41446	723.24340
		7	664.63125	1114.98296	572.89603	700.77450
		8	912.99921	1113.49936	559.72820	723.19660
		9	735.27299	1122.10854	577.42667	690.25220
		10	639.82762	1120.50683	560.88055	690.59630

ตาราง 25 (ต่อ)

d	n	แผนการทดลอง	RMSE			
			Kriging	RBFG	RBFM	ANN
16	513	1	657.48091	758.21605	399.48091	588.71070
		2	650.60821	705.13805	429.89908	595.21230
		3	665.79435	751.79040	431.65492	613.12130
		4	656.39754	730.43692	418.94879	603.98500
		5	668.79537	730.47054	424.01751	581.30770
		6	635.44331	704.03618	408.29125	599.24920
		7	636.04141	744.77497	404.25396	579.52370
		8	673.59867	769.96334	412.37944	616.10560
		9	642.13392	719.16669	406.25276	593.82970
		10	672.48006	761.01633	420.53827	598.66100

ภาคผนวก ค การทดสอบความแตกต่างของตัวแบบทางสถิติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

ตาราง 26 แสดงการทดสอบภาวะปกติของความคลาดเคลื่อนด้วยการทดสอบชาพิโร-วิลค์ (Shapiro-Wilk) และการทดสอบภาวะเอกพันธุ์ด้วยการทดสอบของเลวีน (Levene's Test) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตาราง 26 แสดงการตรวจสอบข้อตกลงเบื้องต้นสำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวน

d	n	การทดสอบภาวะปกติ		การทดสอบภาวะเอกพันธุ์	
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ค่าสถิติ	ค่าพี
2	6	0.921	0.008*	2.338	0.090
(Branin function)	9	0.829	0.000*	8936.116	0.000*
2	6	0.936	0.026*	8.792	0.000*
(Welch function)	9	0.916	0.006*	83.775	0.000*
2	6	0.842	0.000*	15.520	0.000*
(2D function)	9	0.775	0.000*	61.276	0.000*
3	10	0.935	0.024*	42.035	0.000*
	19	0.697	0.000*	9.894	0.000*
4	15	0.727	0.000*	12.516	0.000*
	33	0.531	0.000*	11.674	0.000*
5	21	0.805	0.000*	14.949	0.000*
	51	0.910	0.004*	30.685	0.000*
6	28	0.815	0.000*	103.870	0.000*
	73	0.800	0.000*	94.243	0.000*
7	36	0.908	0.003*	13.879	0.000*
	99	0.855	0.000*	8.555	0.000*
8	45	0.980	0.686	7.010	0.000*
	129	0.963	0.217	2.975	0.044*
9	55	0.909	0.004*	5.230	0.004*
	163	0.946	0.055	10.463	0.000*

ตาราง 26 (ต่อ)

d	n	การทดสอบภาวะปกติ		การทดสอบภาวะเอกพันธุ์	
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ค่าสถิติ	ค่าพี
10	66	0.967	0.285	2.215	0.103
	201	0.949	0.067	8.051	0.000*
16	153	0.698	0.000*	8.360	0.000*
	513	0.985	0.858	3.915	0.016*

* มีนัยความสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

เมื่อความคลาดเคลื่อนมีภาวะปกติ จะใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนเพื่อทดสอบความแตกต่างของตัวแบบทางสถิติ และเปรียบเทียบเชิงซ้อนด้วยวิธีเอชเอสดีของตูกี (Tukey's HSD) และวิธีเกมส์-โฮเวลล์ (Games-Howell) สำหรับกรณีข้อมูลมีภาวะเอกพันธ์และไม่เอกพันธ์ตามลำดับ และเมื่อความคลาดเคลื่อนมีภาวะไม่ปกติ จะใช้การทดสอบครัสคัล-วอลลิส (Kruskal-Wallis) และการเปรียบเทียบเชิงซ้อนด้วยวิธีของดัน (Dunn's Test) ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 แสดงดังตาราง 27

ตาราง 27 แสดงการทดสอบความแตกต่างของตัวแบบทางสถิติและการเปรียบเทียบเชิงซ้อน

d	*n*	การทดสอบความแตกต่าง		การเปรียบเทียบเชิงซ้อน					
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ตัวแบบทางสถิติ	Mean RMSE	KRG	RBFG	RBFM	ANN
2 (Branin function)	6	23.272	0.000*	KRG	47.127	-			
				RBFG	45.694	1.000	-		
				RBFM	47.596	1.000	1.000	-	
				ANN	60.478	0.002*	0.000*	0.003*	-
2 (Branin function)	9	24.976	0.000*	KRG	31.323	-			
				RBFG	31.671	1.000	-		
				RBFM	36.014	0.895	0.895	-	
				ANN	57.794	0.000*	0.000*	0.023*	-
2 (Welch function)	6	28.196	0.000*	KRG	5.492	-			
				RBFG	5.170	1.000	-		
				RBFM	7.787	0.037*	0.042*	-	
				ANN	9.020	0.000*	0.000*	0.552	-
2 (Welch function)	9	34.130	0.000*	KRG	3.854	-			
				RBFG	4.210	1.000	-		
				RBFM	5.212	0.005*	0.098	-	
				ANN	8.493	0.000*	0.000*	0.328	-
2 (2D function)	6	36.644	0.000*	KRG	2.595	-			
				RBFG	1.028	0.334	-		
				RBFM	3.699	0.334	0.000*	-	
				ANN	6.876	0.000*	0.000*	0.334	-

ตาราง 27 (ต่อ)

d	*n*	การทดสอบความแตกต่าง		การเปรียบเทียบเชิงซ้อน					
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ตัวแบบทางสถิติ	Mean RMSE	KRG	RBFG	RBFM	ANN
2	9	36.862	0.000*	KRG	2.024	-			
(2D function)				RBFG	1.047	0.329	-		
				RBFM	2.695	0.329	0.000*	-	
				ANN	7.169	0.000*	0.000*	0.329	-
3	10	14.107	0.003*	KRG	26534.580	-			
				RBFG	21999.530	0.648	-		
				RBFM	33836.692	0.212	0.001*	-	
				ANN	29558.612	1.000	0.175	0.755	-
3	19	19.626	0.000*	KRG	26383.050	-			
				RBFG	22924.036	0.491	-		
				RBFM	29550.922	0.554	0.004*	-	
				ANN	22565.176	0.124	1.000	0.000*	-
4	15	34.679	0.000*	KRG	944.196	-			
				RBFG	7938.058	0.000*	-		
				RBFM	5131.494	0.002*	0.365	-	
				ANN	1231.948	1.000	0.000*	0.167	-
4	33	36.585	0.000*	KRG	59.657	-			
				RBFG	12474.464	0.000*	-		
				RBFM	4693.202	0.001*	0.335	-	
				ANN	1093.946	0.335	0.001*	0.335	-
5	21	26.966	0.000*	KRG	1102.413	-			
				RBFG	1187.414	1.000	-		
				RBFM	1494.218	0.000*	0.021*	-	
				ANN	1836.095	0.000*	0.013*	1.000	-
5	51	10.316	0.016*	KRG	995.602	-			
				RBFG	1047.399	0.972	-		
				RBFM	1190.731	0.129	0.044*	-	
				ANN	1589.245	0.248	0.099	0.988	-

ตาราง 27 (ต่อ)

d	*n*	การทดสอบความแตกต่าง		การเปรียบเทียบเชิงซ้อน					
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ตัวแบบทางสถิติ	Mean RMSE	KRG	RBFG	RBFM	ANN
6	28	34.106	0.000*	KRG	1040.417	-			
				RBFG	2433.626	0.004*	-		
				RBFM	922.897	0.111	0.000*	-	
				ANN	1198.648	1.000	0.111	0.004*	-
6	73	36.620	0.000*	KRG	28.549	-			
				RBFG	2194.017	0.000*	-		
				RBFM	751.261	0.334	0.001*	-	
				ANN	931.639	0.001*	0.334	0.334	-
7	36	33.305	0.000*	KRG	0.005	-			
				RBFG	0.059	0.000*	-		
				RBFM	0.063	0.000*	1.000	-	
				ANN	0.009	0.334	0.062	0.009*	-
7	99	33.528	0.000*	KRG	0.004	-			
				RBFG	0.012	0.077	-		
				RBFM	0.053	0.000*	0.334	-	
				ANN	0.004	1.000	0.007*	0.000*	-
8	45	722.490	0.000*	KRG	0.949	-			
				RBFG	5.067	0.000*	-		
				RBFM	5.599	0.000*	0.028*	-	
				ANN	2.046	0.001*	0.000*	0.000*	-
8	129	763.250	0.000*	KRG	0.840	-			
				RBFG	2.897	0.000*	-		
				RBFM	3.210	0.000*	0.039*	-	
				ANN	0.710	1.000	0.000*	0.000*	-
9	55	34.450	0.000*	KRG	0.275	-			
				RBFG	0.359	0.159	-		
				RBFM	0.237	0.002*	0.000*	-	
				ANN	0.252	1.000	0.002*	0.175	-

ตาราง 27 (ต่อ)

d	*n*	การทดสอบความแตกต่าง		การเปรียบเทียบเชิงซ้อน					
		ค่าสถิติ	ค่าพี	ตัวแบบทางสถิติ	Mean RMSE	KRG	RBFG	RBFM	ANN
9	163	84.768	0.000*	KRG	0.242	-			
				RBFG	0.302	0.000*	-		
				RBFM	0.224	0.000*	0.000*	-	
				ANN	0.243	0.985	0.000*	0.000*	-
10	66	222.657	0.000*	KRG	0.297	-			
				RBFG	0.380	0.000*	-		
				RBFM	0.250	0.000*	0.001*	-	
				ANN	0.273	0.001*	0.000*	0.000*	-
10	201	85.155	0.000*	KRG	0.255	-			
				RBFG	0.320	0.000*	-		
				RBFM	0.235	0.000*	0.000*	-	
				ANN	0.261	0.420	0.000*	0.000*	-
16	153	33.256	0.000*	KRG	705.775	-			
				RBFG	1117.338	0.009*	-		
				RBFM	565.905	0.045*	0.000*	-	
				ANN	704.864	1.000	0.045*	0.009*	-
16	513	872.813	0.000*	KRG	655.877	-			
				RBFG	737.501	0.000*	-		
				RBFM	415.572	0.000*	0.028*	-	
				ANN	596.971	0.001*	0.000*	0.000*	-

ภาคผนวก ง รหัส (code) สำหรับการสร้างตัวแบบ Kriging และตัวแบบฟังก์ชันฐานรัศมีในโปรแกรม R ตัวอย่างปัญหาทดสอบ Branin function

```
##### LHD_2var6run
##### Branin Test problem
## ysample is a real value
## ypredict is a predict value

ntime <- 10              ## ntime  = Number of designs
nrun <- 6                ## nrun = Number of design runs
nvar <- 2                ## nvar = Number of variables
nsample <- 81            ## nsample = Number of samples
p <- 2
one <- matrix(rep(1,nrun),nrow=nrun)  ## one is a one matrix
## Adjust the tolerance for process optimization ##
otol <- 0.0001
## Tolorance for stopping the loop ##
dtol <- 0.0001
LHD <- array(0,dim=c(ntime,nrun,nvar))
RMSEKRG <- matrix(0,nrow=ntime,ncol=1)
RMSERBFG <- matrix(0,nrow=ntime,ncol=1)      ## Gaussian basis function
RMSERBFM <- matrix(0,nrow=ntime,ncol=1)      ## Multiquadric basis function
theta <- matrix(1,nrow=nvar,ncol=1)
cgvalue <- matrix(0,nrow=ntime,1)
cmvalue <- matrix(0,nrow=ntime,1)
for(i in 1:ntime){
        LHD[i,,] <- LHD62[i,,]
        #print(LHD)
        x <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nvar)
        x[,1] <- -5+15*LHD[i, ,1]
```

```
            x[,2] <- 0+15*LHD[i, ,2]
            #print(x)
##### Calculation y using 10 designs from OLHD
            y <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=1)
            for(j in 1:nrun){
               y[j]    <-    (x[j,2]-(5.1/(4*(22/7)^2))*x[j,1]^2+(5/(22/7))*x[j,1]-6)^2+10*(1-
               (1/(8*(22/7))))*cos(x[j,1])+10
            }
            #print(y)
            result=cbind(x,y)
   print(result)
   filename=paste("BraninLHD62",i,".csv",sep="")
            write.csv(result,file=filename)
########## Obtains the prediction using Kriging ##########
##### Algorithm for obtain the theta values by Welch et al.1992 #####
##### Obtain the initial theta
## MLE is a likelihood function
            MLE <- function(theta){
               theta <- matrix(1,nrow=nvar,ncol=1)
               calR <- function(LHD,theta,nrun,nvar){
                  COV <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
                  for(j in 1:nrun){
                        for(k in 1:nrun){
                              sum <- 0
                              for(l in 1:nvar){
                                    sum <- sum+theta[l]*(abs(LHD[i,j,l]-LHD[i,k,l]))^p
                              }
                              COV[j,k] <- exp(-1*sum)
                        }
```

```
        }
        R <- COV
      }
    R <- calR(LHD,theta,nrun,nvar)
    Rinv <- solve(R)
    detR <- det(R)
    betahat <- solve( (t(one)) %*% Rinv %*% one ) %*% (t(one)) %*% Rinv %*% y
    sigmahat <- (1/nrun) * (t(y-one%*%betahat)) %*% Rinv %*% ( y -(one %*%
       betahat) )
    ans <- (-0.5)*( nrun*log(sigmahat) + log(detR) )
    #print(R)
    #print(betahat)
    #print(sigmahat)
    #print(ans)
    }
    intmax1 <- optimize(MLE,lower=0,upper=2,tol=otol,maximum=TRUE)
    #print(intmax1)
    intmax <- intmax1$objective
    #print(intmax)
    theta <- matrix(intmax1$maximum,nrow=nvar,ncol=1)
    #print(theta)
##### Obtain the theta values
## MLE1 is a likelihood function
    theta1 <- matrix(0,nrow=nvar,ncol=1)
    thetaMLE1 <- matrix(0,nrow=nvar,ncol=1)
    thetaMLE1 <- theta
    MLE1 <- function(otheta1){
       thetaMLE1[k] <- otheta1
       theta1 <- thetaMLE1
```

```
calR1 <- function(LHD,theta1,nrun,nvar){
  COV <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
  for(j in 1:nrun){
      for(k in 1:nrun){
          sum <- 0
          for(l in 1:nvar){
              sum <- sum+theta1[l]*(abs(LHD[i,j,l]-LHD[i,k,l]))^p
          }
          COV[j,k] <- exp(-1*sum)
      }
  }
  R <- COV
}
R1 <- calR1(LHD,theta1,nrun,nvar)
Rinv1 <- solve(R1)
detR1 <- det(R1)
betahat1 <- solve((t(one))%*%Rinv1%*%one)%*%(t(one))%*%Rinv1%*%y
sigmahat1 <- (1/nrun)*(t(y-(one%*%betahat1)))%*%Rinv1%*%(y-
  (one%*%betahat1))
answer <- (-0.5)*(nrun*log(sigmahat1)+log(detR1))
}
MAXl <- matrix(0,nrow=nvar,ncol=1)
for(j in 1:nvar){
  maxdiff <- 0
  for(k in 1:nvar){
    check <- 1
    for(l in 1:j){
        if(k==MAXl[l]){
            check <- 0
```

```
            }
        }
        if(check==1){
            max                                                    <-
optimize(MLE1,lower=0,upper=2,tol=otol,maximum=TRUE)
            if(k==1){
                maxdiff <- max$objective-intmax
                maxvar <- k
                maxvalue <- max$objective
                maxtheta <- max$maximum
            }
            else{
                diff1 <- max$objective-intmax
                if(diff1>maxdiff){
                    maxdiff <- diff1
                    maxvar <- k
                    maxvalue <- max$objective
                    maxtheta <- max$maximum
                }
            }
        }
    }
#print(maxvar)
#print(maxtheta)
#print(maxvalue)
MAXI[j] <- maxvar
intmax <- maxvalue
thetaMLE1[maxvar] <- maxtheta
```

```
    if(maxdiff <=0){
      j <- nvar+1
    }
}
#print(theta)
#print(thetaMLE1)
#print(intmax)
#print(MAXI)
theta2 <- matrix(0,nrow=nvar,ncol=1)
thetaMLE2 <- matrix(0,nrow=nvar,ncol=1)
thetaMLE2 <- thetaMLE1
MLE2 <- function(otheta2){
    thetaMLE2[k] <- otheta2
    theta2 <- thetaMLE2
    calR2 <- function(LHD,theta2,nrun,nvar){
      COV <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
      for(j in 1:nrun){
            for(k in 1:nrun){
                  sum <- 0
                  for(l in 1:nvar){
                        sum <- sum+theta2[l]*(abs(LHD[i,j,l]-LHD[i,k,l]))^p
                  }
                  COV[j,k] <- exp(-1*sum)
            }
      }
      R <- COV
    }
R2 <- calR2(LHD,theta2,nrun,nvar)
Rinv2 <- solve(R2)
```

```
detR2 <- det(R2)
betahat2 <- solve((t(one))%*%Rinv2%*%one)%*%(t(one))%*%Rinv2%*%y
sigmahat2 <- (1/nrun)*(t(y-(one%*%betahat2)))%*%Rinv2%*%(y-
   (one%*%betahat2))
answer <- (-0.5)*(nrun*log(sigmahat2)+log(detR2))
}
maxdiff <- 1
while(maxdiff > dtol){
   maxdiff <- 0
   for(k in 1:nvar){
     max <- optimize(MLE2,lower=0,upper=2,tol=otol,maximum=TRUE)
     if(k==1){
            maxdiff <- max$objective-intmax
            maxvar <- k
            maxvalue <- max$objective
            maxtheta <- max$maximum
     }
     else{
            diff1 <- max$objective-intmax
                 if(diff1>maxdiff){
                        maxdiff <- diff1
                        maxvar <- k
                        maxvalue <- max$objective
                        maxtheta <- max$maximum
                 }
     }
   }
   intmax <- maxvalue
   thetaMLE2[maxvar] <- maxtheta
```

```
}
#print(theta)
#print(intmax)
print("thetaMLE2")
print(thetaMLE2)
##### Obtains functions to calculate the estimators for used in prediction
calR1 <- function(LHD,theta1,nrun,nvar){
  COV <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
  for(j in 1:nrun){
   for(k in 1:nrun){
      sum <- 0
      for(l in 1:nvar){
         sum <- sum+theta1[l]*(abs(LHD[i,j,l]-LHD[i,k,l]))^p
      }
      COV[j,k] <- exp(-1*sum)
   }
  }
R <- COV
}

Betahat1 <- function(LHD,R1inv,one,y){
  R1 <- calR1(LHD,theta1,nrun,nvar)
  R1inv <- solve(R1)
  answer <- (solve(t(one)%*%R1inv%*%one))%*%(t(one))%*%R1inv%*%y
  #print(answer)
}

Sigmahat1 <- function(nrun,one,y,theta1){
  betahat1 <- Betahat1(LHD,R1inv,one,y)
```

```
        #print(betahat1)
        answer <- (1/nrun)*(t(y-(one%*%betahat1)))%*%R1inv%*%(y-
        (one%*%betahat1))
        #print(answer)
    }
##### Calculation ypredict and RMSE
    theta1 <- thetaMLE2
    R1 <- calR1(LHD,theta1,nrun,nvar)
    R1inv <- solve(R1)
    betahat1 <- Betahat1(LHD,R1inv,one,y)
    sigmahat1 <- Sigmahat1(nrun,one,y,theta1)
    ypredict <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
    rsample <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nsample)
    for(j in 1:nsample){
      for(k in 1:nrun){
        sum <- 0
        for(l in 1:nvar){
            sum <- sum+theta1[l]*(abs(LHD[i,k,l]-S[j,l]))^p
        }
        rsample[k,j] <- exp(-1*sum)
      }
      ypredict[j] <- betahat1+t(rsample[,j])%*%R1inv%*%(y-one%*%betahat1)
    }
    #print(ypredict)
    sum1 <- 0
    for(j in 1:nsample){
      sum1 <- sum1+(ypredict[j]-ysample[j])^2
    }
```

```
        RMSEKRG[i,1] <- sqrt((1/nsample)*surn1)
########## Obtains the prediction using RBFG ##########
##### Find c for Gaussian basis function (cg = c for gaussian basis function)
        RBFG <- function(cg){
          basisg <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
          for(j in 1:nrun){
            for(k in 1:nrun){
                  sum <- 0
                  for(l in 1:nvar){
                        sum <- sum+(x[j,l]-x[k,l])^2
                  }
                  basisg[j,k] <- exp(-cg*sum)
            }
          }
          Ag <- basisg
          #print(Ag)
          betag <- solve((t(Ag)) %*% Ag) %*% (t(Ag)) %*% y
          #print(betag)
          basispredictg <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=nrun)
          ypredictg <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
          errorg <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
          for(j in 1:nsample){
            betabasisg <- 0
            for(k in 1:nrun){
                  sum <- 0
                        for(l in 1:nvar){
                              sum <- sum+(X[j,l]-x[k,l])^2
                        }
                        basispredictg[j,k] <- exp(-cg*sum)
```

```
                    #print(basispredictg)
                    betabasisg <- betabasisg+(betag[k,1]*basispredictg[j,k])
                }
                ypredictg[j,1]=betabasisg
            }
            #print(ypredictg)
            sum1 <- 0
            for(j in 1:nsample){
              sum1 <- sum1+(ypredictg[j]-ysample[j])^2
            }
            errorg[j] <- sum1
            #print(errorm)
        }
        ming1 <- optimize(RBFG,lower=0.0000001,upper=1,tol=0.0001,maximum=F)
        #print(ming1)
        ming <- ming1$objective
        #print(ming)
        cg <- ming1$minimum
        cgvalue[i] <- cg
##### Obtains the prediction using RBF (Gaussian basis function)
        basisg1 <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
        for(j in 1:nrun){
          for(k in 1:nrun){
            sum <- 0
            for(l in 1:nvar){
                sum <- sum+(x[j,l]-x[k,l])^2
            }
            basisg1[j,k] <- exp(-cg*sum)
          }
```

```
}
Ag1 <- basisg1
#print(Ag1)

betag1 <- solve(t(Ag1) %*% Ag1) %*% (t(Ag1)) %*% y
#print(betag1)
basispredictg1 <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=nrun)
ypredictg1 <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
for(j in 1:nsample){
    betabasisg1 <- 0
    for(k in 1:nrun){
     sum <- 0
      for(l in 1:nvar){
              sum <- sum+(X[j,l]-x[k,l])^2
      }
      basispredictg1[j,k] <- exp(-cg*sum)
      #print(basispredictg1)
      betabasisg1 <- betabasisg1+(betag1[k,1]*basispredictg1[j,k])
    }
    ypredictg1[j,1]=betabasisg1
}
    #print(ypredictg1)
sum1 <- 0
for(j in 1:nsample){
    sum1 <- sum1+(ypredictg1[j]-ysample[j])^2
}
RMSERBFG[i] <- sqrt((1/nsample)*sum1)
```

```
########## Obtains the prediction using RBFM ##########
##### Find c for Multiquadric basis function (cm = c for multiquadric basis function)
        RBFM <- function(cm){
          basism <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
          for(j in 1:nrun){
            for(k in 1:nrun){
                    sum <- 0
                    for(l in 1:nvar){
                            sum <- sum+(x[j,l]-x[k,l])^2
                    }
                    basism[j,k] <- sqrt(sum+cm^2)
          }
          }
          Am <- basism
          #print(Am)

          betam <- solve((t(Am)) %*% Am) %*% (t(Am)) %*% y
          #print(betam)
          basispredictm <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=nrun)
          ypredictm <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
          errorm <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
          for(j in 1:nsample){
            betabasism <- 0
            for(k in 1:nrun){
                    sum <- 0
                            for(l in 1:nvar){
                                    sum <- sum+(X[j,l]-x[k,l])^2
                            }
                            basispredictm[j,k] <- sqrt(sum+cm^2)
```

```
                    #print(basispredictm)
                    betabasism <-
        betabasism+(betam[k,1]*basispredictm[j,k])
          }
          ypredictm[j,1]=betabasism
        }
        #print(ypredictm)
        sum1 <- 0
        for(j in 1:nsample){
          sum1 <- sum1+(ypredictm[j]-ysample[j])^2
        }
        errorm[j] <- sum1
        #print(errorm)
      }
      minm1 <- optimize(RBFM,lower=0.0000001,upper=1,tol=0.0001,maximum=F)
      #print(minm1)
      minm <- minm1$objective
      #print(minm)
      cm <- minm1$minimum
      cmvalue[i] <- cm
##### Obtains the prediction using RBF (Multiquadric basis function)
      basism1 <- matrix(0,nrow=nrun,ncol=nrun)
      for(j in 1:nrun){
        for(k in 1:nrun){
          sum <- 0
          for(l in 1:nvar){
              sum <- sum+(x[j,l]-x[k,l])^2
          }
          basism1[j,k] <- sqrt(sum+cm^2)
```

```
    }
}
Am1 <- basism1
#print(Am1)
betam1 <- solve(t(Am1) %*% Am1) %*% (t(Am1)) %*% y
#print(betam1)
basispredictm1 <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=nrun)
ypredictm1 <- matrix(0,nrow=nsample,ncol=1)
for(j in 1:nsample){
    betabasism1 <- 0
    for(k in 1:nrun){
      sum <- 0
      for(l in 1:nvar){
              sum <- sum+(X[j,l]-x[k,l])^2
      }
      basispredictm1[j,k] <- sqrt(sum+cm^2)
      #print(basispredictm1)
      betabasism1 <- betabasism1+(betam1[k,1]*basispredictm1[j,k])
    }
    ypredictm1[j,1]=betabasism1
}
    #print(ypredictm1)
sum1 <- 0
for(j in 1:nsample){
    sum1 <- sum1+(ypredictm1[j]-ysample[j])^2
}

RMSERBFM[i] <- sqrt((1/nsample)*sum1)
```

```
}

avg_RMSEKRG <- sum(RMSEKRG)/ntime
sdKRG <- sd(RMSEKRG)
maxKRG <- max(RMSEKRG)
minKRG <- min(RMSEKRG)
avg_RMSERBFG <- sum(RMSERBFG)/ntime
sdRBFG <- sd(RMSERBFG)
maxRBFG <- max(RMSERBFG)
minRBFG <- min(RMSERBFG)
avg_RMSERBFM <- sum(RMSERBFM)/ntime
sdRBFM <- sd(RMSERBFM)
maxRBFM <- max(RMSERBFM)
minRBFM <- min(RMSERBFM)
print("cg")
print(cgvalue)
print("cm")
print(cmvalue)
print("RMSEKRG")
print(RMSEKRG)
print("avg, sd, max, min for KRG")
print(avg_RMSEKRG)
print(sdKRG)
print(maxKRG)
print(minKRG)
print("RMSERBFG")
print(RMSERBFG)
print("avg, sd, max, min for RMSERBFG")
print(avg_RMSERBFG)
```

```
print(sdRBFG)
print(maxRBFG)
print(minRBFG)
print("RMSERBFM")
print(RMSERBFM)
print("avg, sd, max, min for RMSERBFM")
print(avg_RMSERBFM)
print(sdRBFM)
print(maxRBFM)
print(minRBFM)
```